Polynomdivision

Analog zum "schriftlichen Dividieren" von Zahlen kann man Polynome dividieren.

$$\frac{p_m(x)}{q_n(x)},$$

mit Polynomen p_m und q_n vom Grad m bzw. n. Dabei sind $n, m \in \mathbb{N}$ und $m \geq n$.

Am Beispiel der Testaufgabe wird Ihnen vorgeführt, wie die Polynomdivision funktioniert.
Folgen Sie dazu dem Link zum Beispiel.

Warum funktioniert es?

Es gilt für $q \neq 0$:

$$\frac{p}{q} = a - \frac{p - aq}{q}$$

Nachrechnen!

Sind p und q Polynome, und a der Quotient der beiden Summanden mit der größten Potenz in Zähler und Nenner (im Beispiel $a = x^5/x^2 = x^3$), so ist der Rest $p - aq$ ein Polynom von kleinerem Grad als $p(x)$.
Mit diesem Rest wird die Division schrittweise fortgesetzt bis schließlich ein Rest einen Grad besitzt, der kleiner als der Grad von $q(x)$ ist.
Ist dieser Rest ungleich Null, so muss er noch durch $q(x)$ dividiert und dieser Quotient zum erhaltenen Polynom addiert werden.

Faktorisierung von Polynomen

Ist x_0 eine Nullstelle eines Polynoms $p_m(x)$, so geht die Polynomdivision

$$p_m(x) : (x - x_0)$$

immer ohne Rest auf.

Beispiel:

Das Polynom $-5x^3 - 10x^2 - 5x - 10$ besitzt die Nullstelle $x_0 = -2$ (Nachprüfen!).

Wir erhalten bei Division des Polynoms durch $(x - (-2))$, also durch $(x + 2)$:

$$\begin{array}{l}
(-5x^3 - 10x^2 - 5x - 10) : (x + 2) \;=\; -5x^2 - 5 \\
\underline{-(-5x^3 - 10x^2)} \\
\qquad\qquad\quad 0 \;\; - 5x - 10 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(- 5x - 10)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Ergebnis:

$$(-5x^3 - 10x^2 - 5x - 10) : (x + 2) = (-5x^2 - 5)$$

beziehungsweise:

$$-5x^3 - 10x^2 - 5x - 10 = (x + 2)(-5x^2 - 5)$$

Beispiel 1:

$$(x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 3x + 1) : (x^2 + 2x - 3)$$

Lösungsweg:

$p_5(x)/q_3(x) =$

$$(x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 3x + 1) : (x^2 + 2x - 3)$$

(1) Die Summanden mit den größten Potenzen von p_m und q_n werden dividiert:

$$\frac{x^5}{x^2} = x^3$$

und das Ergebnis wird rechts notiert:

$$(x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 3x + 1) : (x^2 + 2x - 3) \quad = \quad x^3$$

Beispiel 1:

$$(x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 3x + 1) : (x^2 + 2x - 3) \quad = \quad x^3$$

(2) Jetzt wird x^3 multipliziert mit q_n:

$$x^3(x^2 + 2x - 3) \; = \; x^5 + 2x^4 - 3x^2$$

und das Resultat wird von p_m subtrahiert.
Dazu schreibt man es (wie bei der schriftlichen Division von Zahlen) unter p_m und subtrahiert.

$$\begin{array}{l}
\quad (x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 3x + 1) : (x^2 + 2x - 3) \quad = \quad x^3 \\
\underline{-(x^5 + 2x^4 - 3x^3)} \\
\qquad\qquad\quad x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1
\end{array}$$

Bemerkung: Es genügt, bei der Subtraktion nur so viele Summanden hinzuschreiben, wie für den nächsten Schritt benötigt werden.

So ist die Polynomdivision in der Lösung des Testbeispiels durchgeführt worden.

Beispiel 1:

$$
\begin{array}{rcl}
\quad (x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 3x + 1) : (x^2 + 2x - 3) & = & x^3 \\
\underline{-(x^5 + 2x^4 - 3x^3)} \qquad\qquad\qquad\qquad & & \\
x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1 \qquad\qquad & &
\end{array}
$$

(3) Mit dem Rest $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1$ wird fortgesetzt wie mit dem Ausgangspolynom. Also

$$\frac{x^4}{x^2} = x^2$$

rechts addieren, x^2 mit q_n multiplizieren:

$$x^2(x^2 + 2x - 3) = x^4 + 2x^3 - 3x$$

und das Resultat vom Rest subtrahieren:

$$
\begin{array}{rcl}
\quad (x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 3x + 1) : (x^2 + 2x - 3) & = & x^3 + x^2 \\
\underline{-(x^5 + 2x^4 - 3x^3)} \qquad\qquad\qquad\qquad & & \\
x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1 \qquad\qquad & & \\
\underline{-(x^4 + 2x^3 - 3x^2)} \qquad\qquad\qquad & & \\
-6x^3 + 7x^2 + 3x + 1 \qquad\qquad & &
\end{array}
$$

Beispiel 1:

$$
\begin{array}{rcl}
(x^5+3x^4-7x^3+4x^2+3x+1):(x^2+2x-3) & = & x^3+x^2 \\
\underline{-(x^5+2x^4-3x^3)} & & \\
x^4-4x^3\;+4x^2+3x+1 & & \\
\underline{-(x^4+2x^3\;-3x^2)} & & \\
-6x^3\;+7x^2+3x+1 & &
\end{array}
$$

(4) Mit dem neuen Rest $-6x^3 \;+7x^2\; +3x+1$ genauso fortsetzen.
Also $-6x^3/x^2=-6x$ rechts addieren und $-6x(x^2+2x-3)=-6x^3-12x^2+18x$ vom Rest subtrahieren:

$$
\begin{array}{rcl}
(x^5+3x^4-7x^3+4x^2+3x+1):(x^2+2x-3) & = & x^3+x^2-6x \\
\underline{-(x^5+2x^4-3x^3)} & & \\
x^4-4x^3\;+4x^2+3x+1 & & \\
\underline{-(x^4+2x^3\;-3x^2)} & & \\
-6x^3\;+7x^2+\;3x+1 & & \\
\underline{-(-6x^3-12x^2+18x)} & & \\
19x^2-15x\;+\;1 & &
\end{array}
$$

Beispiel 1:

$$
\begin{array}{l}
(x^5+3x^4-7x^3+4x^2+3x+1):(x^2+2x-3) \quad = \quad x^3+x^2-6x \\
\underline{-(x^5+2x^4-3x^3)} \\
\qquad x^4-4x^3 \ +4x^2+3x+1 \\
\quad \underline{-(x^4+2x^3 \ -3x^2)} \\
\qquad\quad -6x^3 \ +7x^2 + \ 3x+1 \\
\qquad \underline{-(-6x^3-12x^2+18x)} \\
\qquad\qquad\qquad 19x^2-15x \ + \ 1
\end{array}
$$

(5) Mit dem neuen Rest $19x^2-15x\ +\ 1$ genauso fortsetzen.
Also $19x^2/x^2=19$ rechts addieren,
und $19(x^2+2x-3)=19x^2+38x-57$ vom Rest subtrahieren.

$$
\begin{array}{l}
(x^5+3x^4-7x^3+4x^2+3x+1):(x^2+2x-3) \quad = \quad x^3+x^2-6x+19 \\
\underline{-(x^5+2x^4-3x^3)} \\
\qquad x^4-4x^3 \ +4x^2+3x+1 \\
\quad \underline{-(x^4+2x^3 \ -3x^2)} \\
\qquad\quad -6x^3 \ +7x^2 + \ 3x+1 \\
\qquad \underline{-(-6x^3-12x^2+18x)} \\
\qquad\qquad\qquad 19x^2-15x \ + \ 1 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(19x^2+38x-57)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -53x+58
\end{array}
$$

Beispiel 1:

$$
\begin{array}{rl}
(x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 3x + 1) : (x^2 + 2x - 3) & = \quad x^3 + x^2 - 6x + 19 \\
\underline{-(x^5 + 2x^4 - 3x^3)} & \\
x^4 - 4x^3 \ + 4x^2 + 3x + 1 & \\
\underline{-(x^4 + 2x^3 \ - 3x^2)} & \\
-6x^3 \ + 7x^2 + \ 3x + 1 & \\
\underline{-(-6x^3 - 12x^2 + 18x)} & \\
19x^2 - 15x \ + \ 1 & \\
\underline{-(19x^2 + 38x - 57)} & \\
{\color{orange} - 53x + 58} &
\end{array}
$$

(6) Der neue Rest ist von kleinerem Grad als q_m. Er wird mit q_m dividiert und der Quotient auf der rechten Seite addiert.

$$
\begin{array}{rl}
(x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 3x + 1) : (x^2 + 2x - 3) & = \quad x^3 + x^2 - 6x + 19 \ + \ \dfrac{-53x + 58}{x^2 + 2x - 3} \\
\underline{-(x^5 + 2x^4 - 3x^3)} & \\
x^4 - 4x^3 \ + 4x^2 + 3x + 1 & \\
\underline{-(x^4 + 2x^3 \ - 3x^2)} & \\
-6x^3 \ + 7x^2 + 3x + 1 & \\
\underline{-(-6x^3 - 12x^2 + 18x)} & \\
19x^2 - 15x \ + \ 1 & \\
\underline{-(19x^2 + 38x - 57)} & \\
- 53x + 58 &
\end{array}
$$

Das Ergebnis ist

$$
x^3 + x^2 - 6x + 19 + \frac{-53x + 58}{x^2 + 2x - 3}
$$

Aufgaben:

(a) Führen Sie die angegebenen Divisionen aus!

(a) $(x^3 + x^2 + x + 1) : (x - 1)$

(b) $(x^3 + x^2 + x + 1) : (x + 1)$

(c) $(x^3 - 3x^2 + 3x + 3) : (x - 1)$

(d) $(7x^3 + 18x^2 + 8x + 1) : (4x + 8)$

(e) $(2x^4 - 11x^3 + 25x^2 - 32x + 20) : (2x^2 - 7x + 6)$

(f) $(x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 2x + 4) : (x^2 + 1)$

(b) (a) $(q^5 - 1) : (q - 1),\ q \neq 1$

(b) $(q^n - 1) : (q - 1),\ q \neq 1,\ n \in N$

(c) $(x^4 - y^4) : (x - y),\ x \neq y$

(c) Weitere Aufgaben können Sie selbst erzeugen, indem Sie zwei Polynome miteinander multiplizieren (ausmultiplizieren) und dann wieder dividieren.
Beispiel:

$$(x^2 + 3x - 7) \cdot (x + 5) \ = \ x^3 + 8x^2 + 8x - 35$$

Die Polynomdivision

$$(x^3 + 8x^2 + 8x - 35) : (x + 5)$$

muss dann $x^2 + 3x - 7$ ergeben.

Lösungen

(a) (a) $x^2 + 2x + 3 + \dfrac{4}{x - 1}$

(b) $x^2 + 1$

(c) $x^2 - 2x + 1 + \dfrac{4}{x - 1}$

(d) $\dfrac{7}{4}x^2 + x + \dfrac{1}{4x + 8}$

(e) $x^2 - 2x + 2,5 + \dfrac{-2,5x + 5}{2x^2 - 7x + 6}$

(f) $x^2 + 2x + 4$

(b) (a) $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$

(b) $q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1 \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} q^i$

(c) $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$

Hilfen:

zu 1 (f)

$$
\begin{array}{rl}
(x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 2x + 4) : (x^2 + 1) & = \quad x^2 + 2x + 4 \\
\underline{-(x^4 \qquad\quad + \; x^2)} & \\
2x^3 + 4x^2 + 2x + 4 & \\
\underline{-(2x^3 \qquad\quad + 2x)} & \\
4x^2 \qquad + 4 & \\
\underline{-(4x^2 \qquad + 4)} & \\
0 &
\end{array}
$$

zu 2 (c) z.B. Division als Polynom mit Variable x und einem Parameter y:

$$(x^4 - y^4) : (x - y) = x^3 + \dots$$