1. EIGENSCHAFTEN ELEMENTARER FUNKTIONEN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie können mit dem Begriff *Funktion* umgehen.
- Die Konzepte Definitionsbereich und Wertemenge einer Funktion sind Ihnen vertraut.
- Sie können Nullstellen einer Funktion graphisch interpretieren.
- Sie verstehen den Zusammenhang zwischen *Lösungen einer Gleichung* und *Nullstellen einer Funktion*.
- Sie können Monotonieintervalle einer Funktion beschreiben.
- Der Umgang mit Extrem- und Wendestellen ist Ihnen vertraut.
- Sie kennen den Begriff der Symmetrie einer Funktion.
- Sie können entscheiden ob eine Funktion gerade, ungerade oder keins von beiden ist.

1.1 Funktionsbegriff

Eine Funktion beschreibt den Zusammenhang zwischen zwei variablen Größen, z.B. die Fläche eines Quadrats in Abhängigkeit von der Seitenlänge, die Auslenkung einer Feder abhängig von der angehängten Last oder auch die Temperatur eines Ortes in Abhängigkeit von der Zeit.

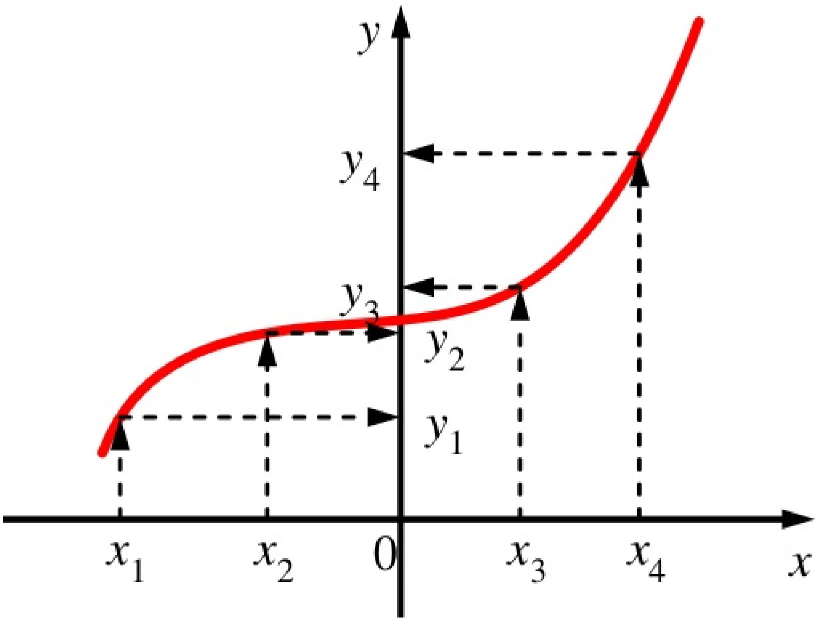
Die variablen Größen sind oft reelle Zahlen, in diesem Kurs wird nur dieser Fall behandelt.

Eine *Funktion* f ist eine Vorschrift, die jeder reellen Zahl x aus dem Definitionsbereich der Funktion eindeutig eine reelle Zahl $y = f(x)$, den Funktionswert, zuordnet.

Man nennt x die *unabhängige Variable* (oder das *Argument*) der Funktion und y die *abhängige Variable* (oder den *Funktionswert*).

Eine Funktion f wird auch als „Abbildung" bezeichnet, die die Zahl x auf den Funktionswert $f(x)$ abbildet.

Wir betrachten in der Regel Funktionen, bei denen $f(x)$ mittels einer Formel aus der unabhängigen Variablen berechnet wird. In der Praxis werden funktionale Zusammenhänge oft in einer Tabelle dargestellt oder durch einen Graphen in einem zweidimensionalen Koordinatensystem.



Die waagerechte Koordinatenachse heißt Abszisse oder x-Achse, die senkrechte heißt Ordinate oder y-Achse. Ein beliebiges x aus dem Definitionsbereich von f wird als Punkt auf der x-Achse, der zugehörige Funktionswert $y = f(x)$ als Punkt auf der y-Achse aufgefasst. Das Zahlenpaar beschreibt einen Punkt in der Ebene mit den Koordinaten $(x; f(x))$. Alle Zahlenpaare $(x; f(x))$ zusammengenommen ergeben den *Funktionsgraphen*.

Die Eindeutigkeit der Zuordnung $x \to y$ bedeutet, dass es zu jedem x aus dem Definitionsbereich nur einen Punkt auf dem Funktionsgraphen gibt, d.h., die senkrechte Gerade durch den Punkt x auf der x-Achse schneidet den Funktionsgraphen nur in einem Punkt.

Übung zum Begriff der Funktion

1.2 Definitionsbereich und Wertemenge

Der *maximale Definitionsbereich* einer Funktionsvorschrift $f(x)$ ist die Menge der reellen Zahlen, für die die unabhängige Variable in die Funktionsvorschrift $f(x)$ eingesetzt werden darf.

Als *Definitionsbereich* D_f einer Funktion f kann eine beliebige Teilmenge des maximalen Definitionsbereichs gewählt werden oder natürlich auch der maximale Definitionsbereich selbst.

Wenn der Definitionsbereich nicht explizit als Menge angegeben ist, ist der maximale Definitionsbereich gemeint. Man spricht dann meist kürzer von dem *Definitionsbereich* und meint damit den maximalen.

Statt Definitionsbereich ist auch der Begriff *Definitionsmenge* üblich.

Bei der Quadratwurzelfunktion lassen sich z.B. keine negativen Zahlen für die unabhängige Variable verwenden, da die (reelle) Wurzel aus einer negativen Zahl nicht definiert ist. Der (maximale) Definitionsbereich für $f(x) = \sqrt{x}$ ist dann $D_f = \{x \mid x \geq 0\}$.

In Modellierungen kommt es häufig vor, dass der Definitionsbereich kleiner als der maximale ist, wie das folgende Beispiel zeigt: Die Fallbewegung eines Steins kann durch die Funktion s mit $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ beschrieben werden. Wenn der Fall zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt, enthält der Defintionsbereich der Funktion keine negativen Zahlen. Da der Fall ein Ende hat, ist der Definitonsbereich ein Intervall $D_s = [0; t_{\max}]$. Der maximale Definitionsbereich ist hier $\mathbb{R}$, da die Formel $\frac{1}{2}gt^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$ anwendbar ist.

Da alle Funktionen in diesem Kurs reelle Funktionswerte haben, wird die *Zielmenge* $\mathbb{R}$ nicht jedes Mal angegeben (das wird oft als $f : D_f \to \mathbb{R}$ geschrieben). Die Wertemenge der Funktion f ist die Menge aller Funktionswerte $f(x)$, wenn die unabhängige Variable x den Definitionsbereich durchläuft.

Die *Wertemenge* der Funktion f ist die Menge der Funktionswerte

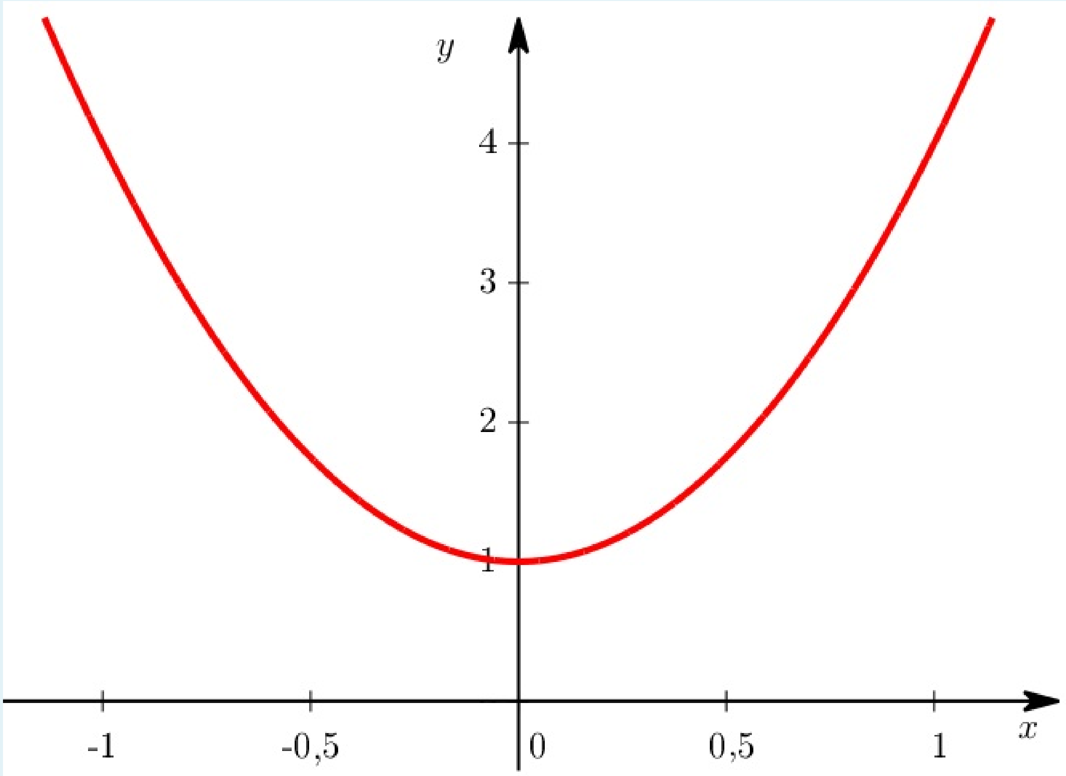
$$W_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}\,.$$

Die Wertemenge wird auch als *Bildmenge* bezeichnet.

> In diesen Beispielen ist der maximalen Definitionsbereich für die Funtionsvorschriften gewählt.

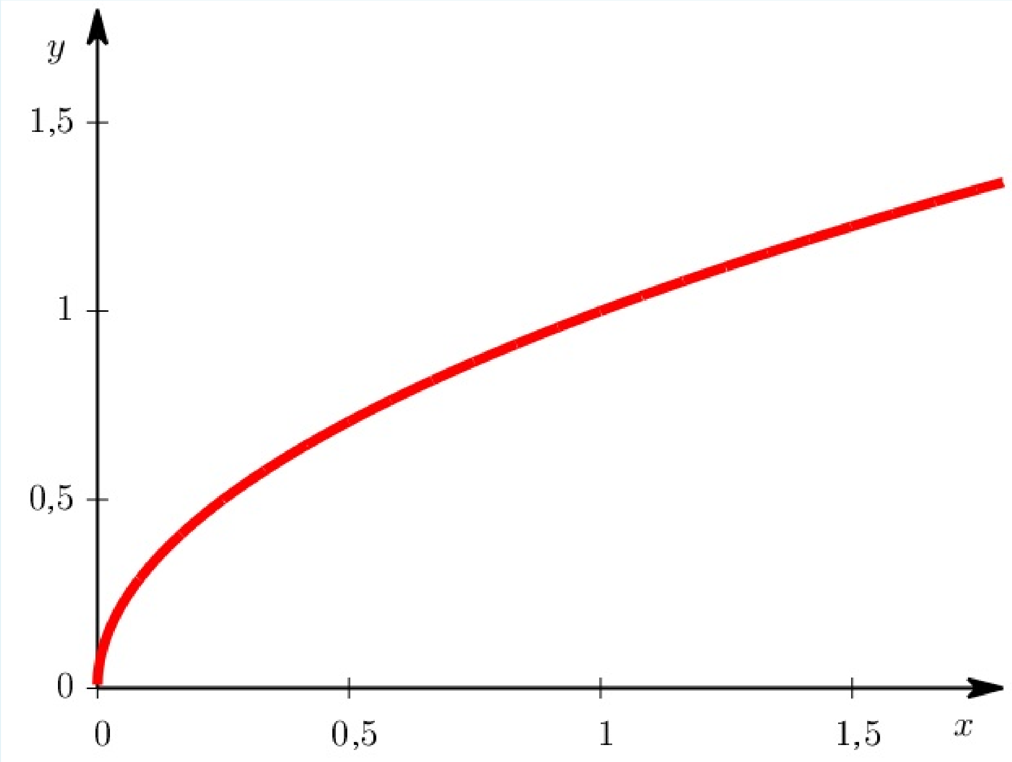
$D_f = \mathrm{R},\ W_f = [1; \infty)$

Eine quadratische Funktion, $f(x) = 3x^2 + 1$.
Jede reelle Zahl kann in diese Funktionsvorschrift eingesetzt werden $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$.
Aus $x^2 \geq 0$ folgt $f(x) \geq 1$. Deshalb ist die Wertemenge W_f in $[1; \infty)$ enthalten. Andererseits tritt jede Zahl $a \geq 1$ auch als Funktionswert auf: Für $x = \sqrt{(a-1)/3}$ gilt $f(x) = a$. Deshalb ist $W_f = [1; \infty)$.



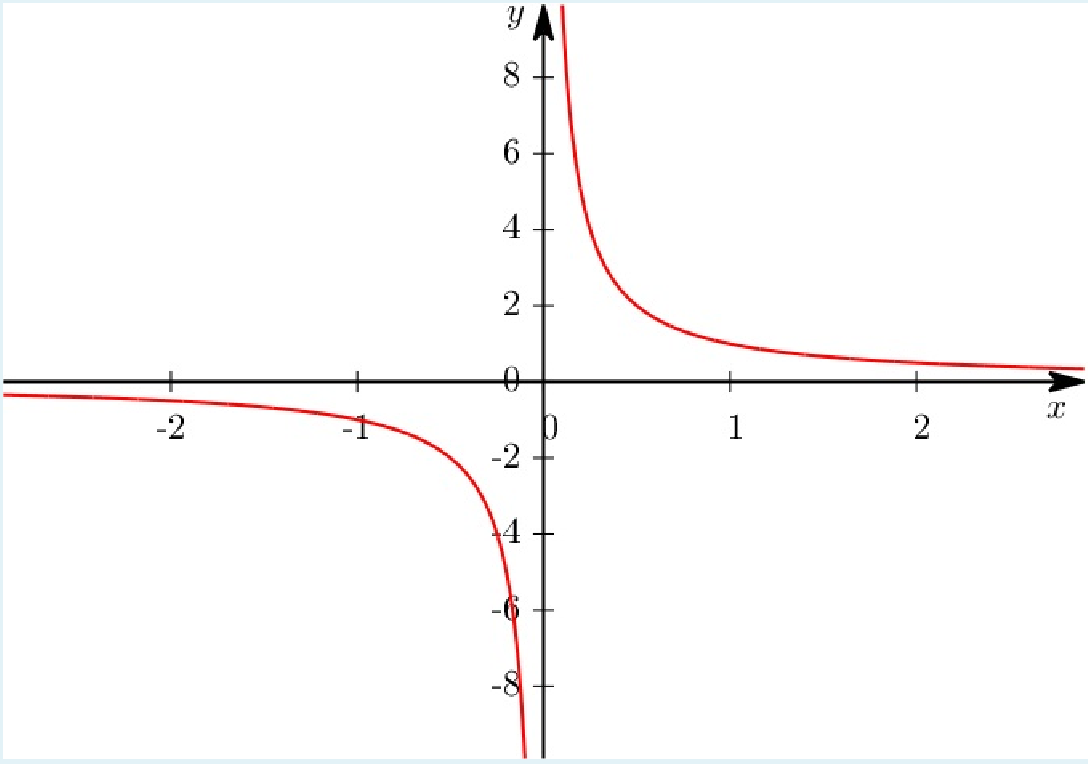
$D_f = \mathrm{R}_0^+$, $W_f = \mathrm{R}_0^+$

Wurzel-Funktion, $f(x) = \sqrt{x}$.
Negative reelle Zahlen können in diese Funktionsvorschrift nicht eingesetzt werden, deshalb gilt $D_f = \mathbb{R}_0^+ = [0; \infty)$.
Wurzeln sind nie negativ und zu jeder Zahl $a \geq 0$ gilt für $x = a^2$: $f(x) = \sqrt{a^2} = |a| = a$.
Damit ist $W_f = \mathbb{R}_0^+$.



$D_f = \mathrm{R} \setminus \left\{0\right\}$, $W_f = \mathrm{R} \setminus \left\{0\right\}$

$f(x) = \frac{1}{x}$, eine Funktion, die eine Hyperbel als Graph hat.
Jede reelle Zahl außer $x = 0$ kann in diese Funktionsvorschrift eingesetzt werden $\Rightarrow$
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Die Funktionswerte erfüllen $f(x) = \frac{1}{x} \neq 0$ und zu jedem $a \neq 0$ gilt $f(x) = a$ für $x = \frac{1}{a}$. Also ist $W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



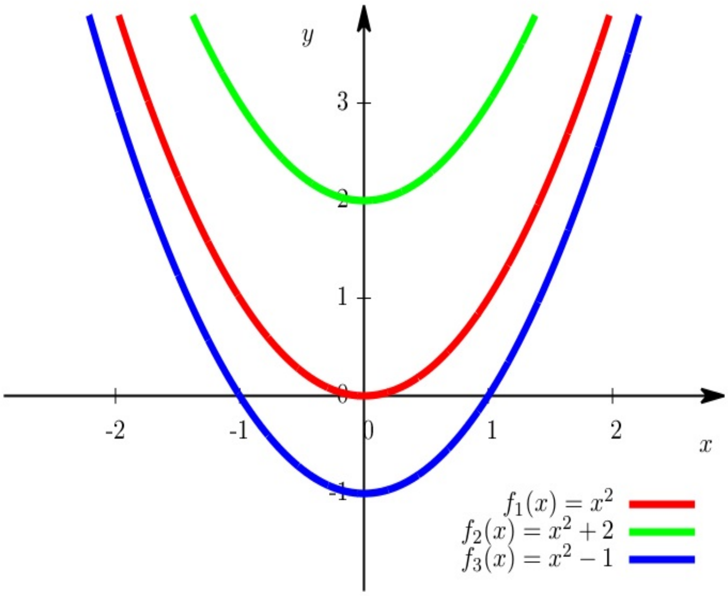
1.3 Nullstellen

Die *Nullstellen* einer Funktion f sind die Stellen $x \in D_f$ im Definitionsbereich, an denen die Funktion den Wert $f(x) = 0$ annimmt.

Bei der Darstellung der Funktion als Graph im zweidimensionalen Koordinatensystem sind die Nullstellen die x-Koordinaten der Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit der x-Achse.

Eine Funktion kann eine, mehrere oder keine Nullstelle haben.

$f(x) = x^2$ hat eine Nullstelle, $x = 0$,
$f(x) = x^2 + 2$ hat keine Nullstellen,
$f(x) = x^2 - 1$ hat zwei Nullstellen, $x = -1$ und $x = 1$.



Die Lösungen einer beliebigen Gleichung mit einer Unbekannten lassen sich als Nullstellen einer Funktion auffassen, indem man alle Terme der Gleichung auf eine Seite des Gleichheitszeichens bringt. Gleichungen lösen ist also gleichbedeutend mit Nullstellen von Funktionen bestimmen.

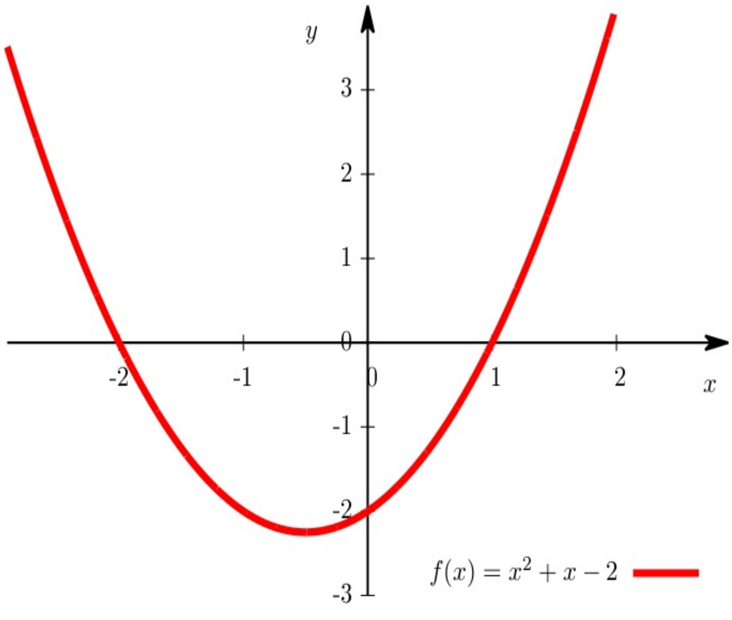
Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung $x^2 = 2 - x$ ist gleich der Nullstellenmenge der Funktion $f(x) = x^2 + x - 2$:

$$\begin{aligned} x^2 &= 2 - x \\ \Leftrightarrow x^2 + x - 2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich mit der p-q-Formel

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_{1,2} &= -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{3}{2} \\ \Rightarrow x_1 &= 1 \\ \Rightarrow x_2 &= -2\,. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{-2;\, 1\}$.



1.4 Monotonie

Eine Funktion ist auf einem Intervall im Definitionsbereich *monoton wachsend*, wenn für ein beliebiges Paar x_1, x_2 von Argumenten im Intervall, für die die Ungleichung $x_1 \leq x_2$ gilt, die Ungleichung $f(x_1) \leq f(x_2)$ für die zugehörigen Funktionswerte folgt.

Sie heißt *streng monoton wachsend*, falls aus der strengeren Ungleichung $x_1 < x_2$ die strengere Ungleichung $f(x_1) < f(x_2)$ folgt.

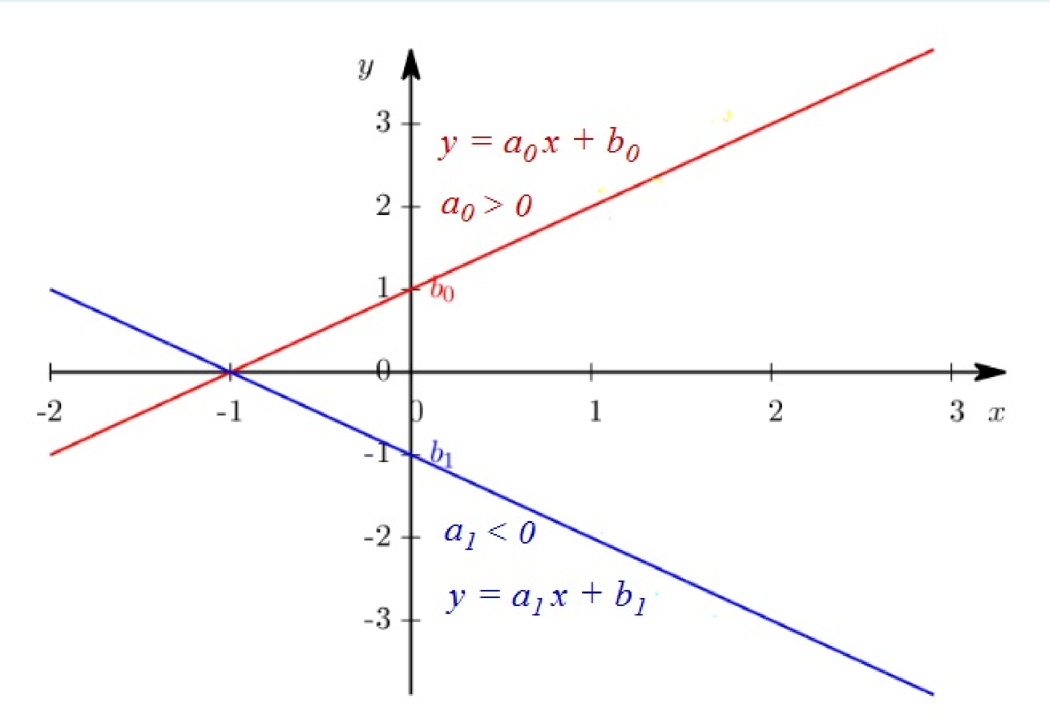
Eine Funktion ist auf einem Intervall im Definitionsbereich *monoton fallend*, wenn die Ungleichung $x_1 \leq x_2$ für ein beliebiges Paar von Argumenten aus dem Intervall die entsprechende Ungleichung $f(x_1) \geq f(x_2)$ für die zugehörigen Werte nach sich zieht.

Sie heißt *streng monoton fallend*, falls die strengere Folgerung $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ gilt.

Eine Funktion heißt auf einem Intervall *monoton*, wenn sie dort monoton wachsend oder fallend ist.

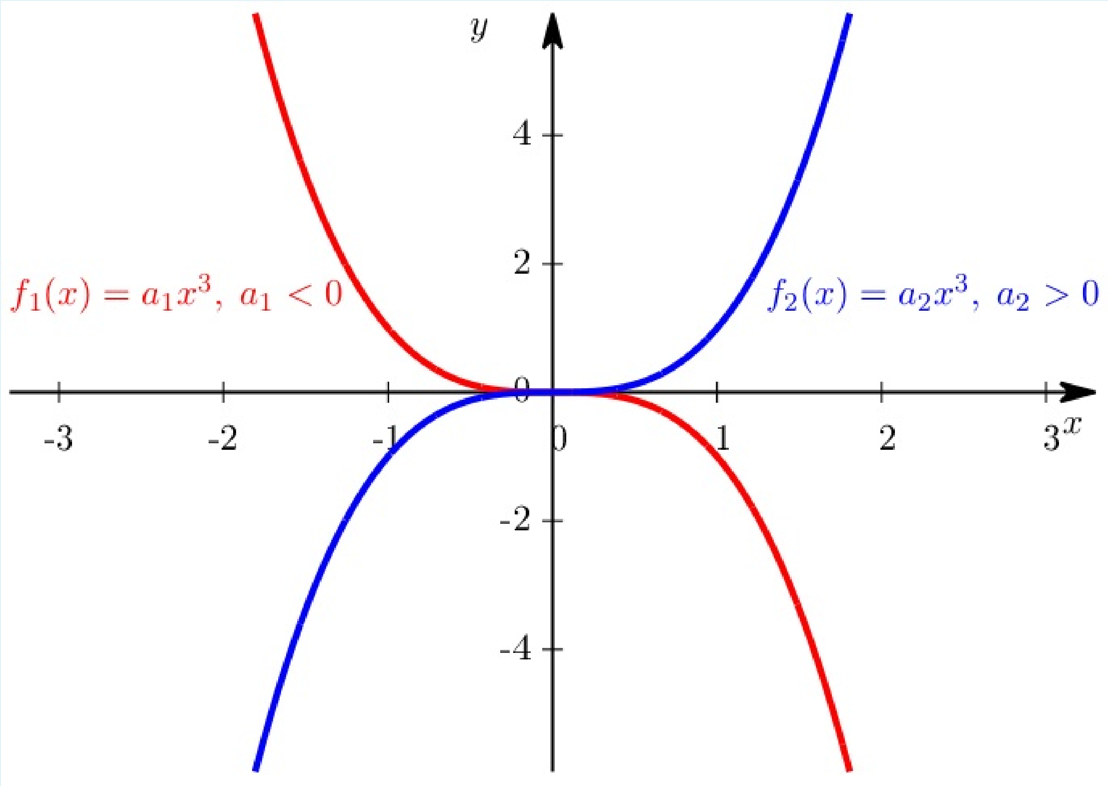
$f(x) = ax + b$

Der Funktionsgraph einer linearen Funktion $f(x) = ax + b$ ist eine Gerade mit der Steigung a und y-Achsenabschnitt b (Schnittpunkt mit der y-Achse). Die linearen Funktionen $f(x) = ax + b$ sind streng monoton steigend, wenn die Steigung grösser Null ist, d.h. $a > 0$ und streng monoton fallend, wenn die Steigung negativ ist, d.h. $a < 0$. Für $a = 0$ sind sie konstant und damit sowohl monoton steigend wie auch monoton fallend.



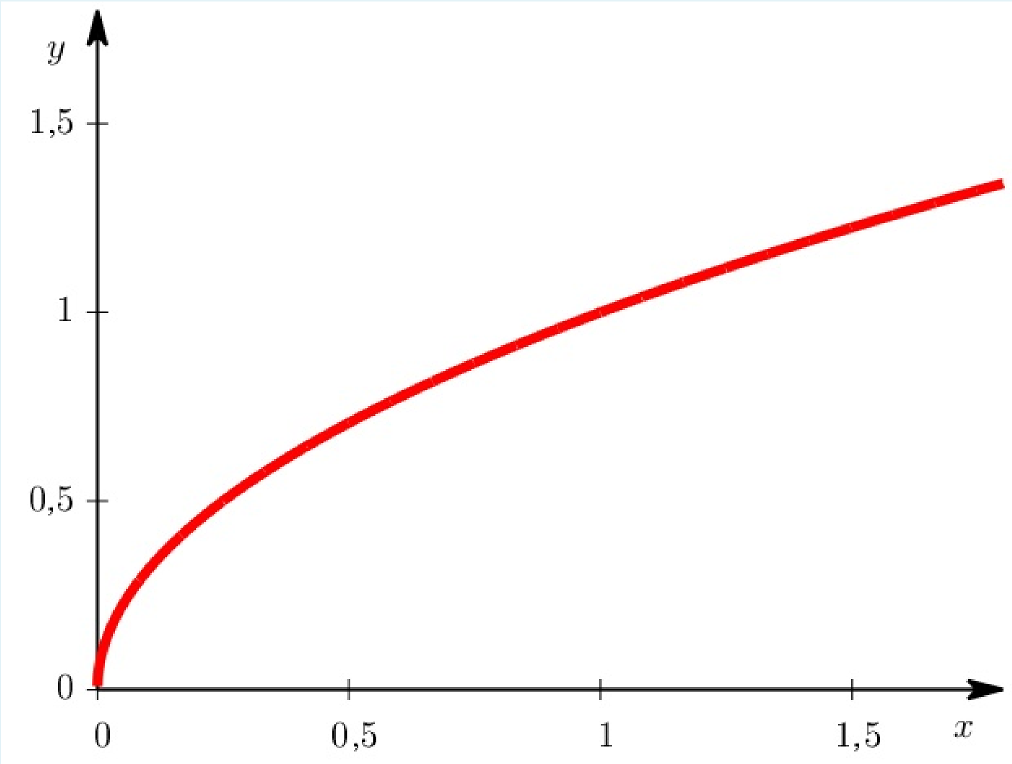
$f(x) = ax^3$

Eine Funktion der Form $f(x) = ax^3$ (Polynom 3. Grades) ist streng monoton steigend, wenn der Koeffizient a positiv ist, $a > 0$, und streng monoton fallend, wenn $a < 0$ ist.



$f(x) = \sqrt{x}$

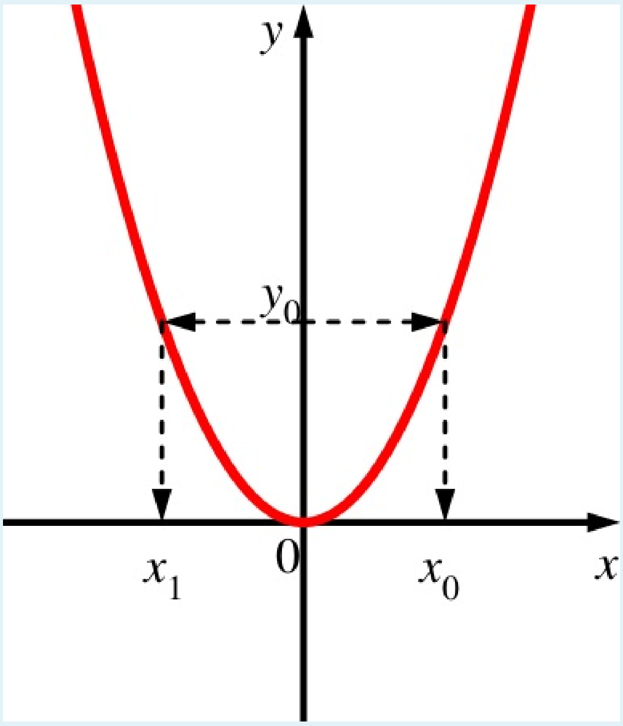
Die Quadratwurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist streng monoton steigend.



Funktionen haben in der Regel nicht ein einheitliches Steigungsverhalten auf dem ganzen Definitionsbereich, sondern sind nur abschnittsweise monoton.

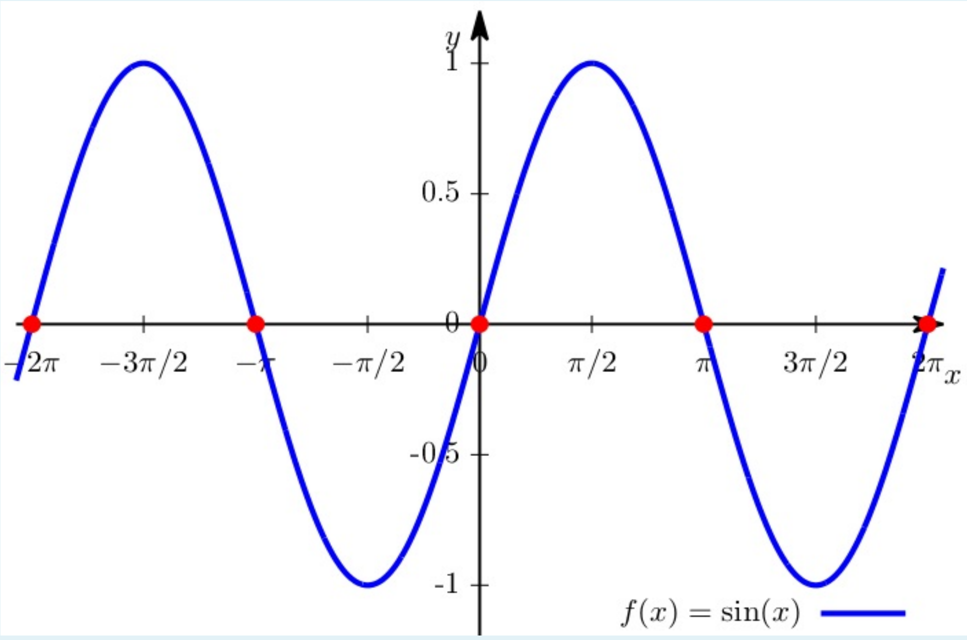
$f(x) = x^2$

Die Funktion $f(x) = x^2$ mit einer Parabel als Graph ist für negative x-Werte streng monoton fallend und für positive x-Werte streng monoton steigend.



$f(x) = \sin(x)$

Betrachte die Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$ mit Definitionsbereich $D_f = [-2\pi; 2\pi]$.
$f(x) = \sin(x)$ ist streng monoton fallend auf den Intervallen
$\left[-\frac{3}{2}\pi; -\frac{1}{2}\pi\right]$, $\left[\frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi\right]$
$f(x) = \sin(x)$ ist streng monoton steigend auf den Intervallen
$\left[-2\pi; -\frac{3}{2}\pi\right]$, $\left[-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi\right]$ und $\left[\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right]$.



Bei der graphischen Darstellung von Funktionen gibt die Tangente an den Funktionsgraphen ersten Aufschluss über das Steigungsverhalten: Die Funktion ist monoton steigend (fallend) in Bereichen, wo sie eine steigende (fallende) Tangente hat. Die Tangente wird im Abschnitt VII.1 Die Ableitung besprochen. Die Steigung von Geraden wird auch im Abschnitt IX.1 Geraden behandelt.
Dies soll an dieser Stelle zur graphischen Deutung des Monotonieverhaltens genügen. In Abschnitt VII.5 Monotonieverhalten von Funktionen wird der Zusammenhang des Monotonieverhaltens einer Funktion mit dem Wert ihrer (ersten) Ableitung dargestellt.

1.5 Extremal-, Minimal-, Maximalstellen

(a) Das Argument $x_{\max}$ im Definitionsbereich D_f heißt *globale Maximalstelle* oder kurz *Maximalstelle* der Funktion f, falls alle Funktionswerte kleiner oder gleich dem Wert der Funktion an der Stelle $x_{\max}$ sind: $f(x_{\max}) \geq f(x)$ für alle $x \in D_f$.

(b) $x_{\max}$ heißt *lokale Maximalstelle* von f, falls *in einer Umgebung* von $x_{\max}$ alle Funktionswerte kleiner oder gleich dem Wert der Funktion an der Stelle $x_{\max}$ sind oder genauer, wenn $x_{\max}$ zu einem offenen Intervall I gehört, so dass $f(x_{\max}) \geq f(x)$ für alle $x \in D_f \cap I$.

(c) Das Argument $x_{\min}$ im Definitionsbereich D_f heißt *globale Minimalstelle* oder kurz *Minimalstelle* der Funktion f, falls alle Funktionswerte grösser oder gleich dem Wert der Funktion an der Stelle $x_{\min}$ sind: $f(x_{\min}) \leq f(x)$ für alle $x \in D_f$,

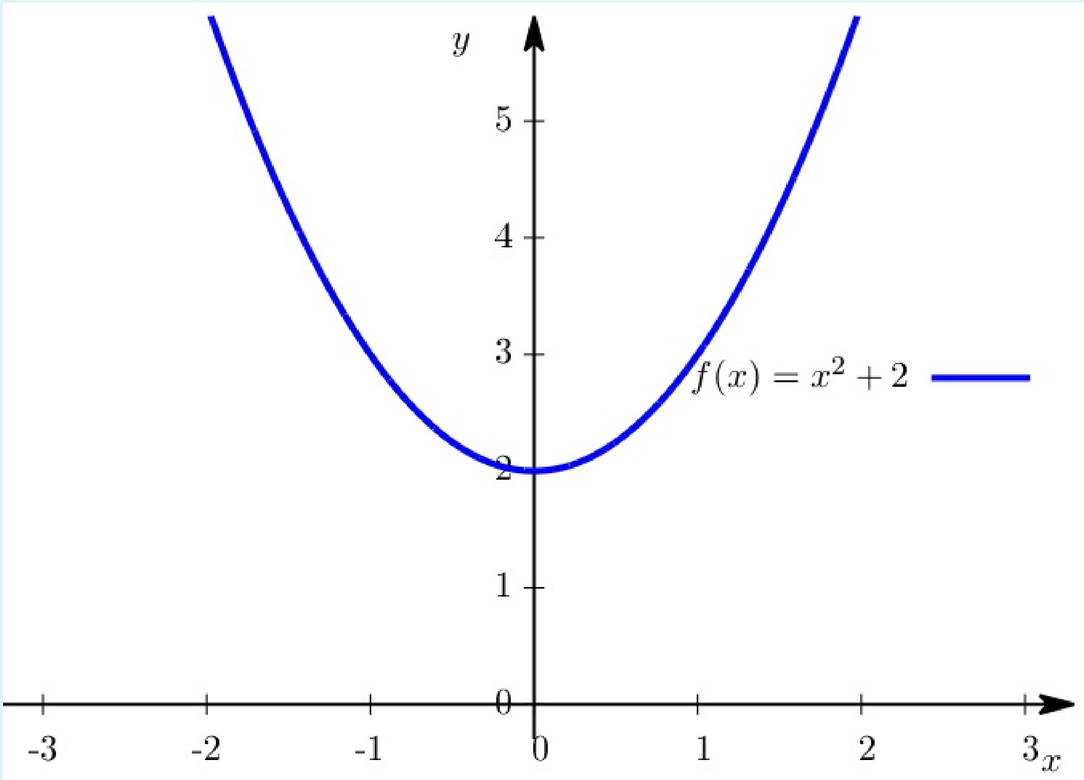
(d) $x_{\min}$ heißt *lokale Minimalstelle* von f, falls *in einer Umgebung* von $x_{\min}$ alle Funktionswerte grösser oder gleich dem Wert der Funktion an der Stelle $x_{\min}$ sind oder genauer, wenn $x_{\min}$ zu einem offenen Intervall I gehört, so dass $f(x_{\min}) \leq f(x)$ für alle $x \in D_f \cap I$.

(e) Eine lokale (globale) Maximal- oder Minimalstelle bezeichnet man auch als lokale (globale) *Extremalstelle*.

(f) Die Werte der Funktion f an einer lokalen (globalen) Maximalstelle heißen *lokales (globales) Maximum*. Analog sind die Begriffe *lokales (globales) Minumum* und *lokales (globales) Extremum* definiert.

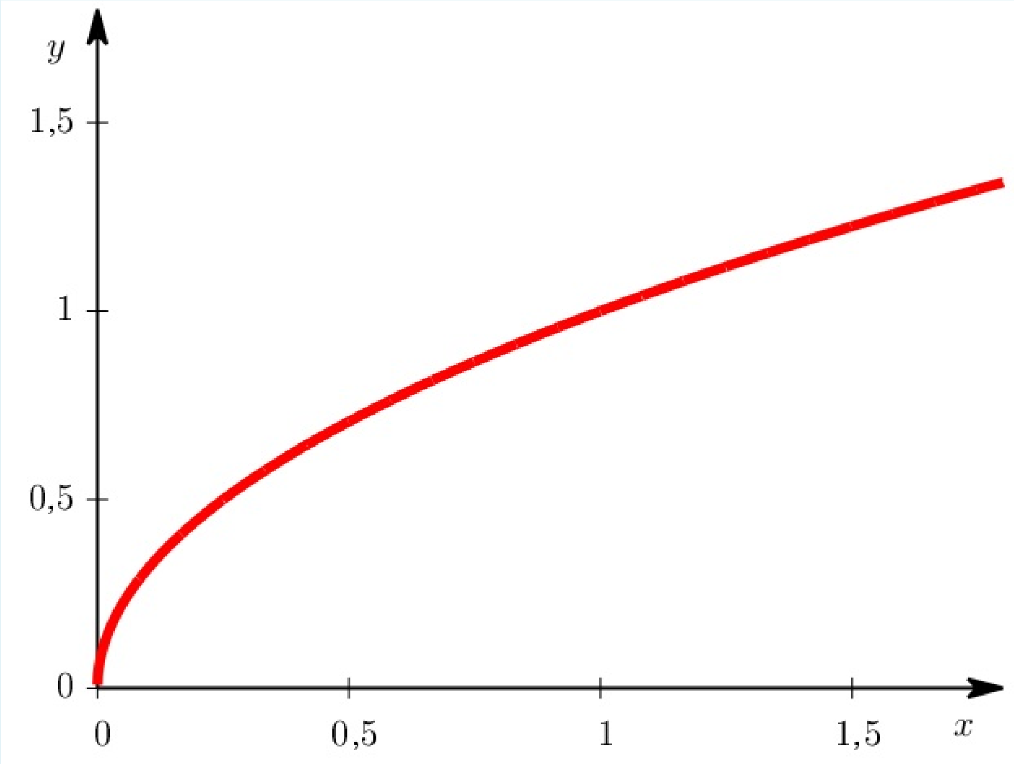
Beispiel 1:

Das globale Minimum der Funktion $f(x) = x^2 + 2$ ist $y = 2$. Dies ist der Funktionswert an der Minimalstelle $x_{\text{min}} = 0$. Jeder andere Funktionswert ist größer, da er noch den Summanden $x^2 > 0$ enthält.
Die Funktion besitzt kein Maximum, da für große x-Werte auch die Funktionswerte beliebig groß werden.



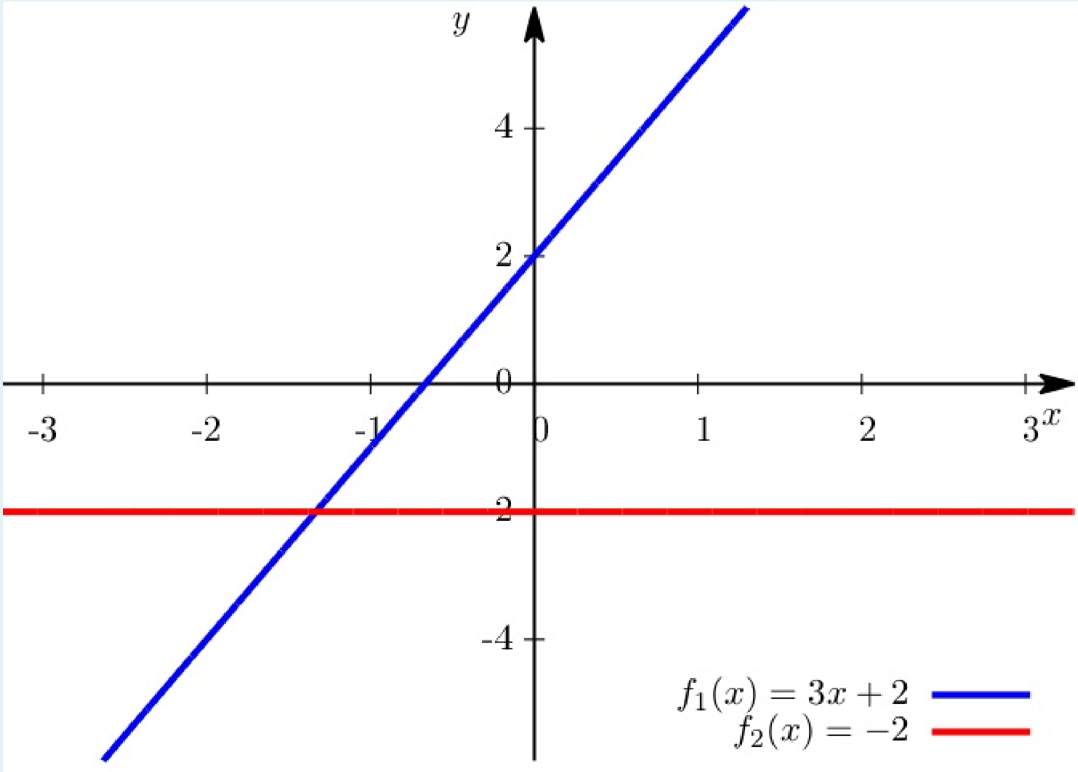
Beispiel 2:

Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ besitzt das globale Minimum $y = 0$, das ist der Funktionswert an der Minimalstelle $x_{\text{min}} = 0$ dieser Funktion. Die Funktion hat kein Maximum, da die Quadratwurzelwerte für steigendes x beliebig groß werden.



Beispiel 3:

Lineare Funktionen $f(x) = mx + b$ haben keine Extremwerte (weder Maxima noch Minima), es sei denn, die Steigung ist $m = 0$. Dann ist die Funktion konstant, und b ist zugleich Maximum und Minimum der Funktion.



1.6 Wendestellen

Lineare Funktionen $f(x) = mx + b$ zeichnen sich dadurch aus, dass die Steigung jeweils konstant gleich m ist: Die Graphen sind Geraden.

Ändert sich die Steigung einer Funktion bzw ihres Funktionsgraphen, so verläuft die Linie gekrümmt.

Der Graph einer Funktion f beschreibt auf einem Intervall
eine *Linkskurve*, wenn die Steigung der Funktion monoton wächst,
eine *Rechtskurve*, wenn die Steigung der Funktion monoton abnimmt.

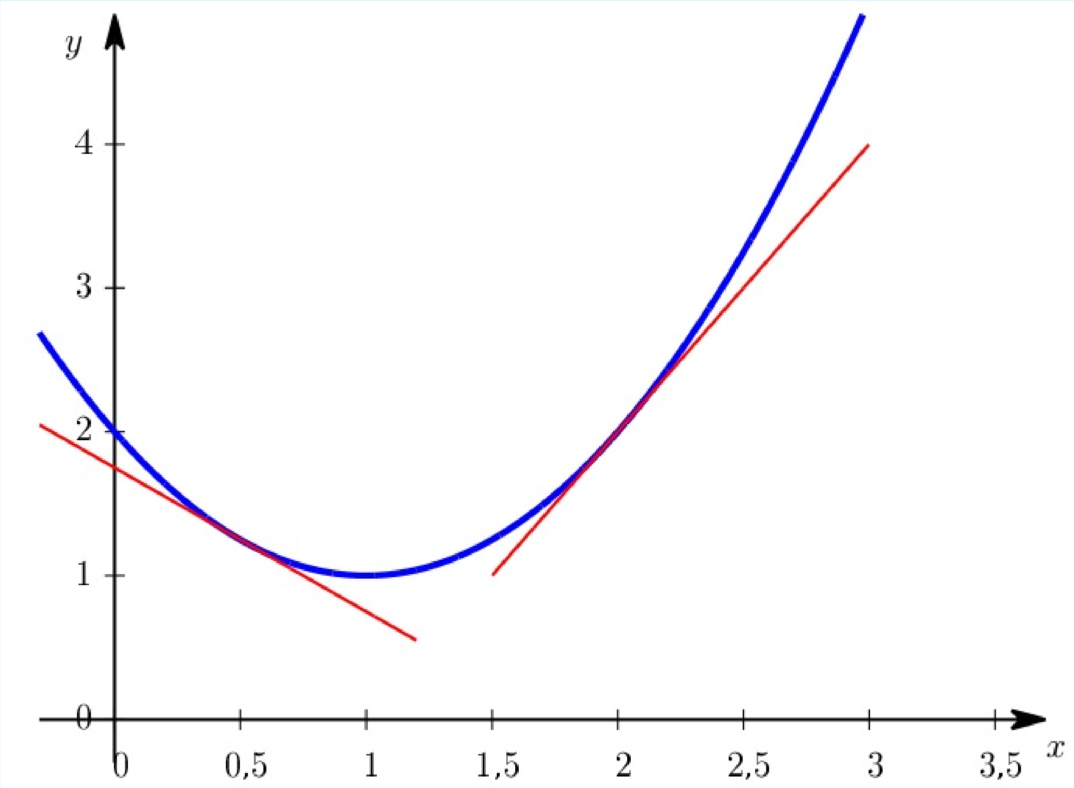
Damit liegt im Falle einer Linkskurve der Graph stets oberhalb der Tangente und im Falle der Rechtskurve stets unterhalb der Tangente.

Linkskurve

Wird die Steigung für wachsendes x größer, so erhält man eine Linkskurve. Die Tangentensteigung nimmt für wachsendes x zu.

$$f(x) = 1 + (x - 1)^2$$

Der blaue Graph der Funktion liegt stets oberhalb der roten Tangente.

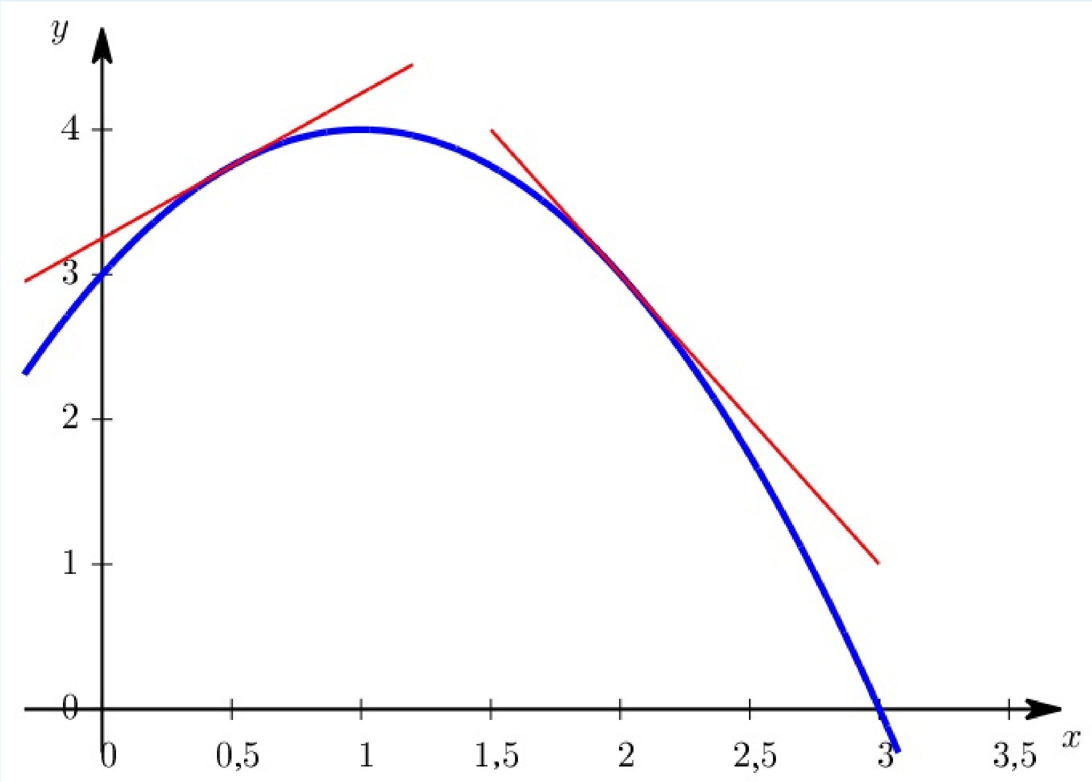


Rechtskurve

Wird die Steigung für wachsendes x kleiner, erhält man eine Rechtskurve. Die Tangentensteigung nimmt für wachsendes x ab.

$$f(x) = 4 - (x-1)^2$$

Der blaue Graph der Funktion liegt stets unterhalb der roten Tangente.



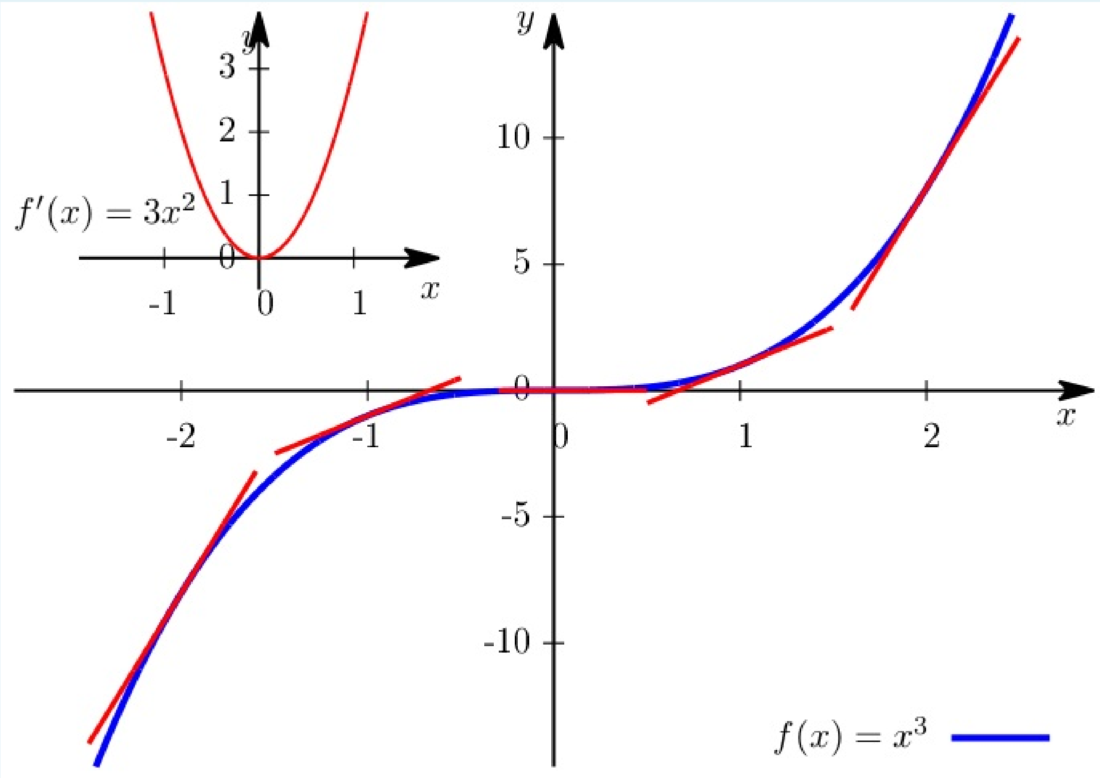
Wenn man sich eine Bewegung entlang des Funktionsgraphen vorstellt (mit wachsender x-Koordinate), so fährt man im ersten Bild eine Linkskurve und im zweiten eine Rechtskurve ab.

Der Punkt, an dem ein Funktionsgraph von einer Links- in eine Rechtskurve (oder umgekehrt) übergeht, heißt *Wendepunkt* der Funktion.

Die x-Koordinate eines Wendepunktes heißt *Wendestelle*.

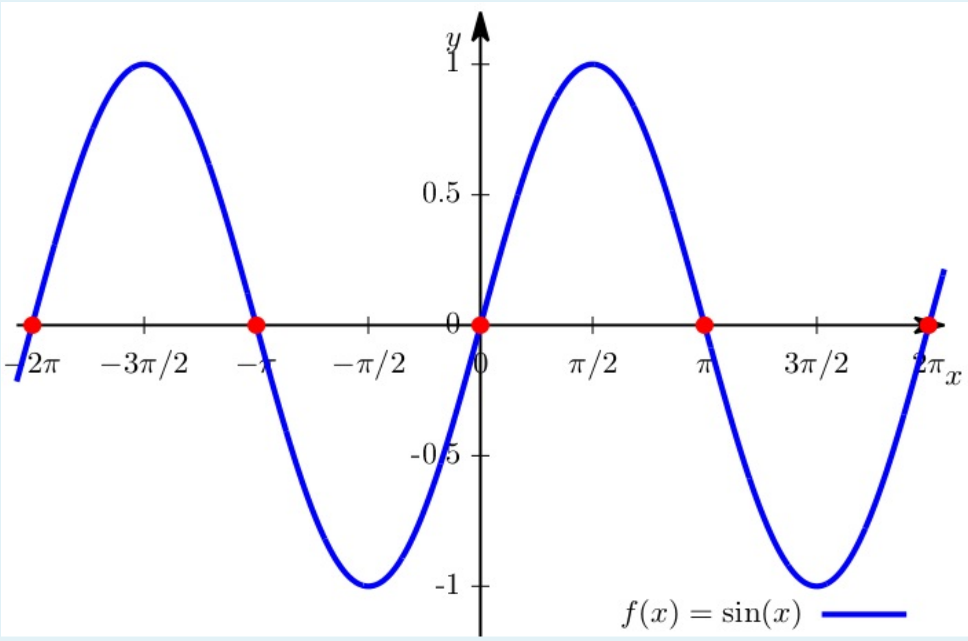
Beispiel 1:

Die einfachste Funktion mit einem Wendepunkt ist die Funktion $f(x) = x^3$. Der Wendepunkt ist der Ursprung $(0;0)$. Im Abschnitt VII.6 Die zweite Ableitung werden Sie noch lernen, dass eine Wendestelle einer Funktion $f(x)$ stets eine Extremstelle der ersten Ableitung $f'(x)$ ist.



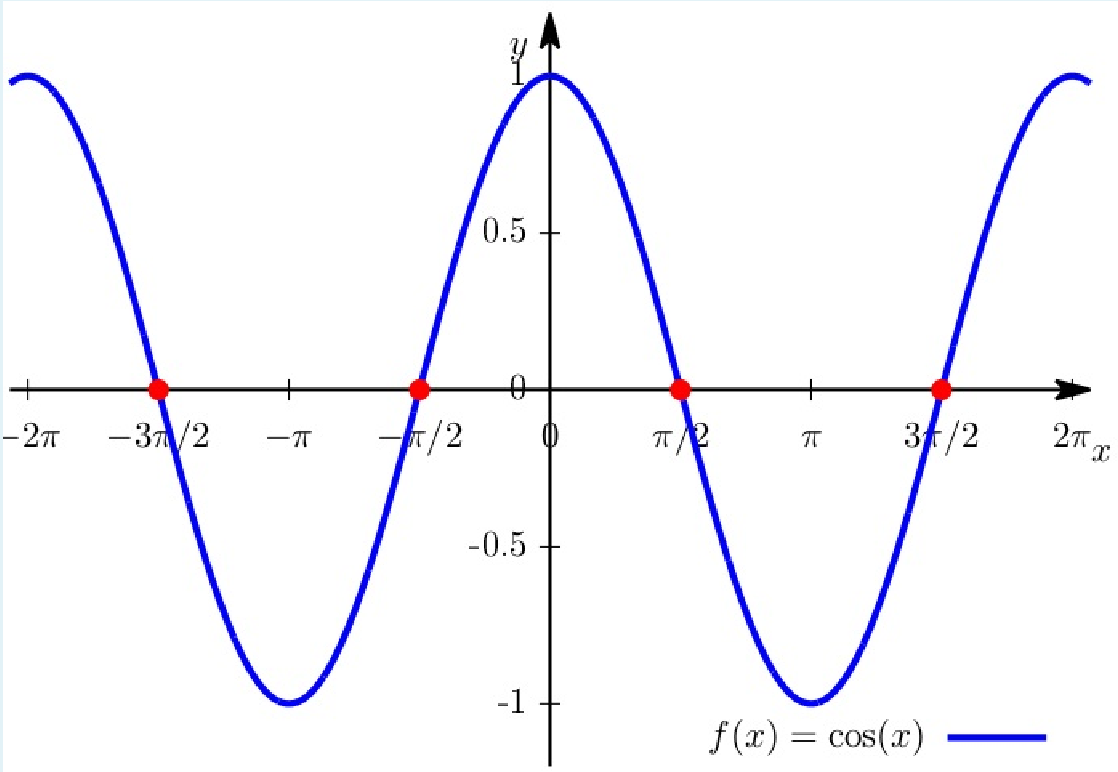
Beispiel 2:

Die Sinusfunktion hat Wendestellen, die mit ihren Nullstellen übereinstimmen, $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$ usw.



Beispiel 3:

Die Kosinusfunktion hat Wendestellen, die auch mit ihren Nullstellen übereinstimmen, $-\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$ usw.



Die Berechnung von Wendestellen geschieht mit Hilfe der zweiten Ableitung einer Funktion. Man muss feststellen, wo die zweite Ableitung ihr Vorzeichen wechselt. Dies werden Sie im Kapitel über Differentialrechnung genauer kennenlernen.

1.7 Symmetrie

Die folgenden Symmetrieeigenschaften von Funktionen lassen sich am besten geometrisch erklären, es werden die Begriffe aus Kapitel V benutzt. Wir setzen dabei voraus, dass der Definitionsbereich der betrachteten Funktionen symmetrisch um $x = 0$ liegt, also z.B. $D_f = (-a; a)$ oder $D_f = \mathbb{R}$ oder $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

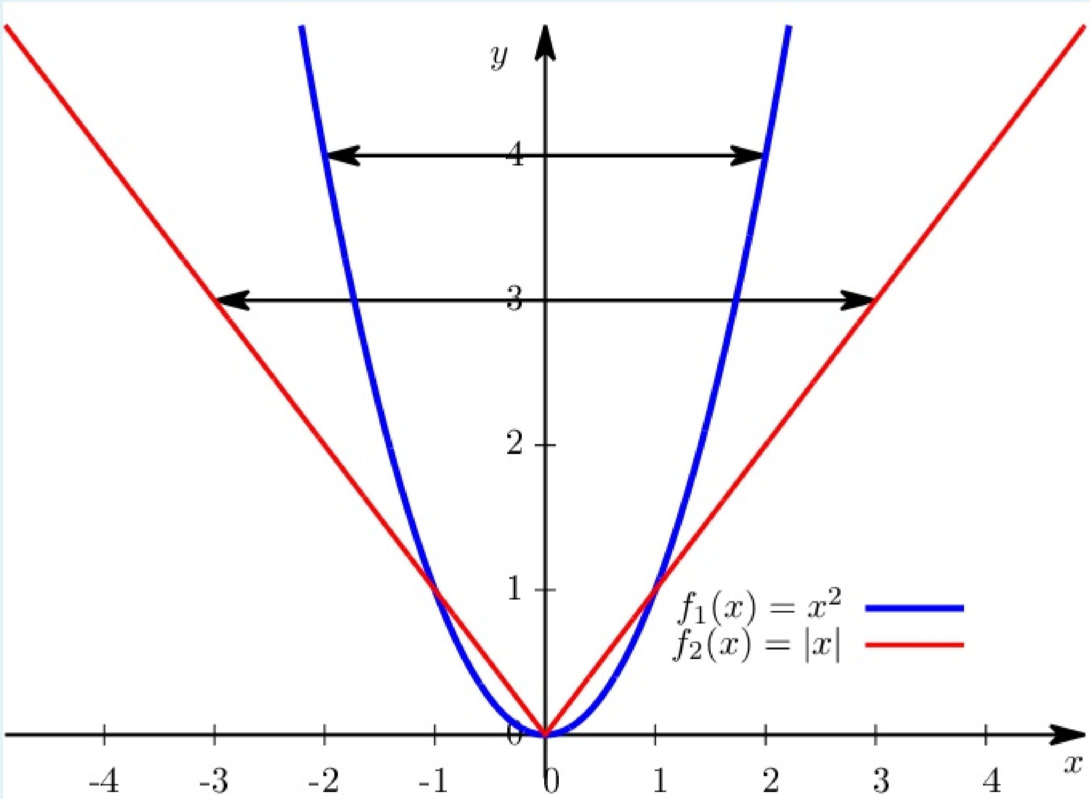
Eine Funktion heißt *gerade*, wenn ihr Funktionsgraph durch Spiegelung an der y-Achse in sich selbst übergeht, d. h., wenn die y-Achse des Koordinatensystems eine Symmetrieachse des Funktionsgraphen ist.

Eine Funktion heißt *ungerade*, wenn ihr Funktionsgraph durch Punktspiegelung am Ursprung des Koordinatensystems in sich selbst übergeht.

Die Namensgebung gerade und ungerade hat ihre Berechtigung, weil Polynome, in denen nur gerade Exponenten auftreten, gerade Funktionen und Polynome, in denen nur ungerade Exponenten auftreten, ungerade Funktionen sind.

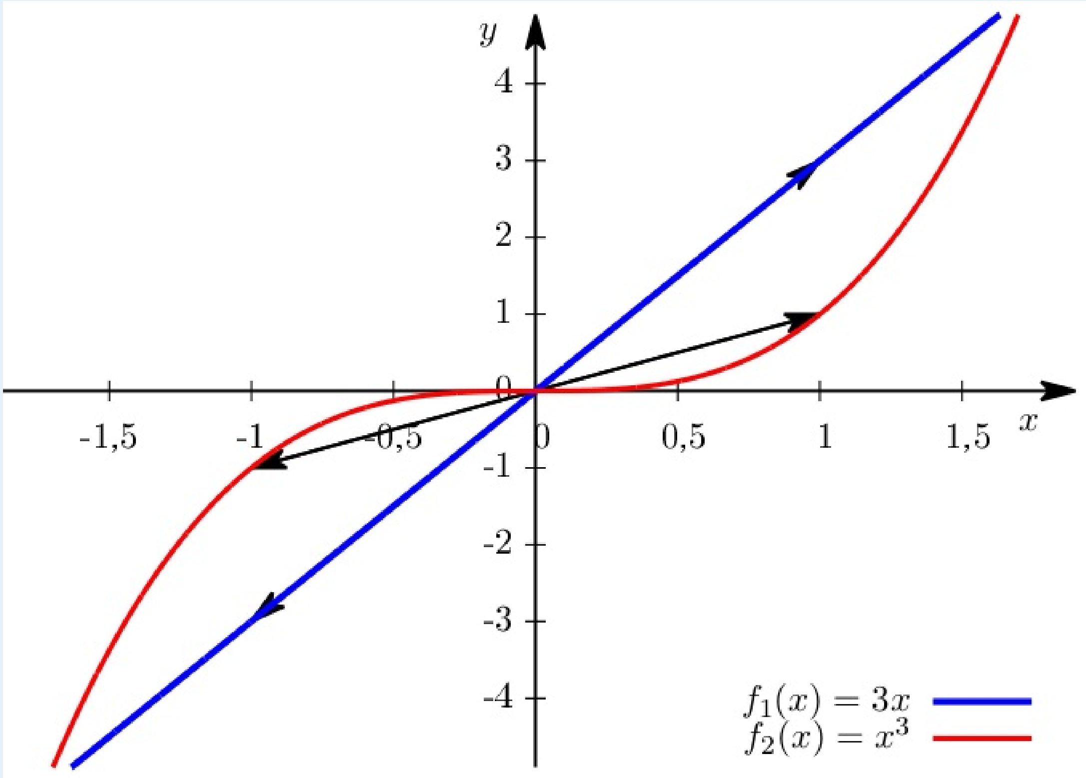
Gerade Funktionen:

Die Parabelfunktion $f_1(x) = x^2$ und die Betragsfunktion $f_2(x) = |x|$ sind gerade Funktionen, da ihre Graphen achsensymmetrisch zur y-Achse verlaufen.

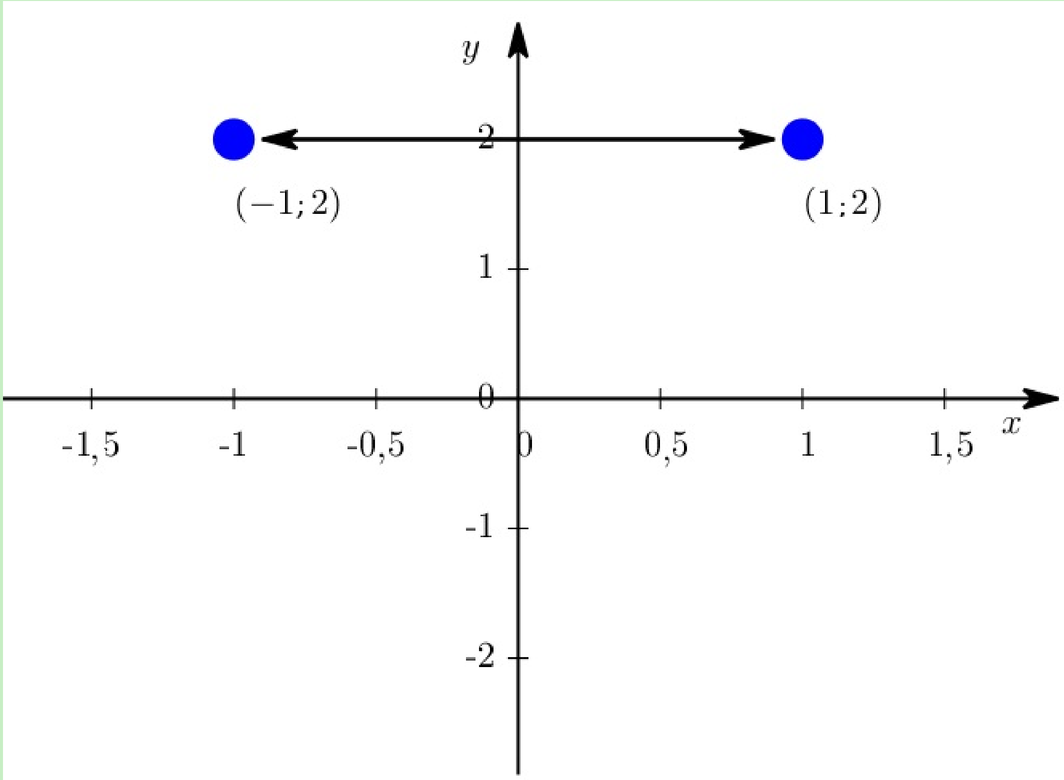


Ungerade Funktionen:

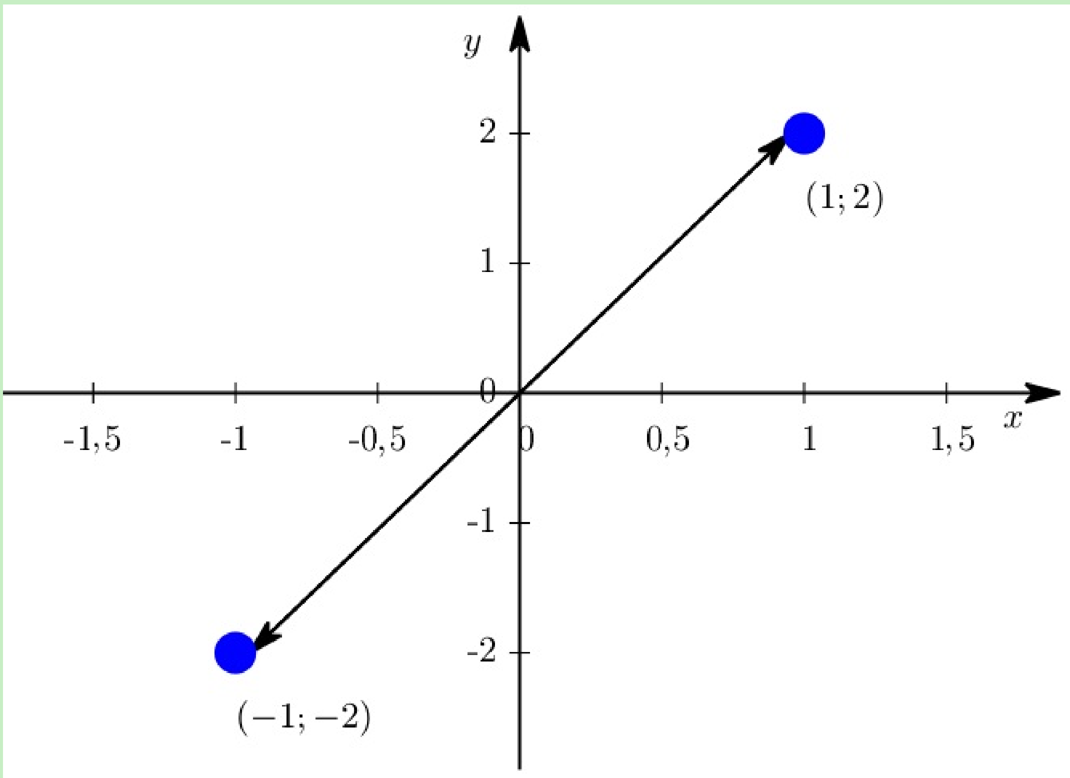
Die Funktion $f(x) = ax$ ist ungerade, desgleichen die Funktion $f(x) = x^3$. Ihre Graphen sind zum Ursprung des Koordinatensystems symmetrisch.



Spiegelt man einen Punkt $(x; y)$ im zweidimensionalen Koordinatensystem an der y-Achse, so erhält man den Punkt $(-x; y)$: die senkrechte Koordinate y bleibt auf gleicher Höhe, und die waagerechte Koordinate x wechselt auf die gegenüberliegende Seite der x-Achse.



Spiegelt man einen Punkt $(x; y)$ am Ursprung, so wechseln sowohl die waagerechte als auch die senkrechte Koordinate auf die gegenüberliegende Seite ihrer jeweiligen Achse und man erhält den Punkt $(-x; -y)$.



Voraussetzung dafür, dass eine Funktion gerade oder ungerade Symmetrie haben kann, ist, dass der Definitionsbereich symmetrisch ist: Immer, wenn x Element des Definitionsbereichs ist, muss auch $-x$ im Definitonsbereich liegen.

Z.B. erfüllt die Quadratwurzelfunktion diese Voraussetzung nicht und kann daher keine der beiden Symmetrien haben.

Die Überlegungen zur Spiegelung eines einzelnen Punktes am Ursprung bzw. an der y-Achse führen in Verbindung mit der Definition der Funktionssymmetrien zu der Aussage:

Eine Funktion f ist gerade, wenn für alle x aus dem Definitionsbereich die Gleichung $f(-x) = f(x)$ gilt.

Eine Funktion f ist ungerade, wenn für alle x aus dem Definitionsbereich die Gleichung $f(-x) = -f(x)$ gilt.

Dabei haben wir in beiden Fällen vorausgesetzt, dass der Definitionsbereich zum Nullpunkt auf der x-Achse symmetrisch ist.

Wenn eine Funktion auf Symmetrie untersucht werden soll, gibt die Betrachtung des Funktionsgraphen den besten Aufschluss.

Um einen rechnerischen Nachweis zu führen, überlegt man zunächst, ob der Definitionsbereich symmetrisch zum Nullpunkt der x-Achse ist.

Dann beginnt man am besten mit dem Ausdruck $f(-x)$ (alle x in der Funktionsvorschrift durch $(-x)$, jeweils geklammert, ersetzen). Anschließend versucht man, durch Vereinfachung dieses Ausdrucks zu $f(x)$ oder $-f(x)$ zu kommen.

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{x^2-2}{x+x^3} \\ f(-x) &= \tfrac{(-x)^2-2}{-x+(-x)^3} \\ &= \tfrac{x^2-2}{-x-x^3} \\ &= -\tfrac{x^2-2}{x+x^3} \\ &= -f(x) \\ \Rightarrow f(-x) &= -f(x) \end{aligned}$$

Die Funktion $f(x) = \frac{x^2-2}{x+x^3}$ ist eine ungerade Funktion.

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3-x)^2 \\ f(-x) &= ((-x)^3+x)^2 \\ &= (-x^3+x)^2 \\ &= (-(x^3-x))^2 \\ &= (x^3-x)^2 \\ &= f(x) \\ \Rightarrow f(-x) &= f(x) \end{aligned}$$

Die Funktion $f(x) = (x^3-x)^2$ ist eine gerade Funktion.

Um zu widerlegen, dass eine Funktion eine dieser Symmetrien hat, genügt es, einzelne Werte x_1 mit $f(-x_1) \neq -f(x_1)$ und x_2 mit $f(-x_2) \neq f(x_2)$ zu finden (es kann sich dabei auch um denselben x-Wert handeln, d.h. $x_1 = x_2$).

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2+x \\ x=1: & \\ f(-1) &= (-1)^2-1=0 \\ f(1) &= 1^2+1=2 \\ \Rightarrow f(-1) &\neq f(1) \quad \text{und} \quad f(-1)\neq -f(1) \end{aligned}$$

Also gilt weder $f(-x)=f(x)$ noch $f(-x)=-f(x)$ für alle x. Die Funktion $f(x)=x^2+x$ ist weder eine gerade noch eine ungerade Funktion.

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3+|x^3| \\ x=1: & \\ f(-1) &= (-1)^3+|(-1)^3|=(-1+1)=0 \\ f(1) &= 1^3+|1^3|=1+1=2 \\ \Rightarrow f(-1) &\neq f(1) \quad \text{und} \quad f(-1)\neq -f(1) \end{aligned}$$

Also gilt weder $f(-x)=f(x)$ noch $f(-x)=-f(x)$ für alle x. Die Funktion $f(x)=x^3+|x^3|$ ist weder eine gerade noch eine ungerade Funktion.

Dies klingt vielleicht kompliziert, jedoch ist bei unsymmetrischen Funktionen die Chance sehr groß, dass schon für einen beliebig herausgegriffenen Wert x gilt: $f(-x)\neq f(x)$ und auch $f(-x)\neq -f(x)$, womit dann der Gegenbeweis geführt ist.

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Welche der folgenden Zuordnungen für reelle Zahlen x sind Funktionen?

a) Der Zahl x wird die Zahl $x+1$ zugeordnet.

b) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - x$

c) Der Zahl x wird jede Zahl, die rechts von x auf der Zahlengeraden liegt, zugeordnet.

d) Der Zahl x wird sowohl 1 als auch -1 zugeordnet.

Antwort

a) $f(x) = x + 1$ ist eine Funktion.

b) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - x$ ist eine Funktion.

c) Keine Funktion.

d) Keine Funktion.

Lösung a)

Man erhält die Zahl $x+1$, indem man die Zahl x um eine Einheit nach rechts entlang der Zahlengeraden verschiebt. Dies ist eine Vorschrift, die jeder Zahl x eine eindeutige Zahl $y = f(x) = x + 1$ zuordnet. Damit ist die beschriebene Zuordnung eine Funktion.

Lösung b)

Die Zuordnung $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - x$ ordnet jedem x die Zahl $3x^3 + 2x^2 - x$ auf eine eindeutige Weise zu (man kann sie ausrechnen!). So ist dadurch eine Funktion gegeben.

Lösung c)

Mit dieser Zuordnung wird zum Beispiel der Zahl 2 sowohl die Zahl 3 als auch 7 zugeordnet, weil $2 < 3$ und auch $2 < 7$ (man kann natürlich statt 3 und 7 andere Zahlen nehmen, die größer als 2 sind). Man ordnet einem Element somit mehrere Werte zu. Diese Zuordnung ist deshalb keine Funktion.

Lösung d)

Diese Zuordnung ist nicht eindeutig, denn sie ordnet x zwei verschiedene Zahlen 1 und -1 zu. Also handelt es sich nicht um eine Funktion.

ÜBUNG 2

Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion $f(x)$.

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}-1}$

Antwort

a) D_f besteht aus allen nicht-negativen reellen Zahlen.

b) D_f besteht aus allen reellen Zahlen ungleich Null.

c) $D_f = \mathbb{R}$

d) D_f besteht aus allen reellen Zahlen $x \geq 1$, die ungleich 2 sind.

Lösung a)

Die Wurzelfunktion $\sqrt{x}$ ist nur für nicht-negative reelle Zahlen x definiert. Der Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}_0^+$ besteht also aus allen positiven reellen Zahlen und der Null.

Lösung b)

Bei Brüchen müssen wir beachten, dass man nicht durch Null dividiert. Der Definitionsbereich D_f enthält also alle reellen Zahlen ungleich Null.

Lösung c)

Man muss beachten, dass der Nenner nicht Null wird. Der Definitionsbereich D_f enthält also keine Zahlen x mit $x^2 + 2 = 0$.

Die Gleichung $x^2 + 2 = 0$ besitzt aber keine reellen Lösungen.

Man darf also jede Zahl x in $f(x)$ einsetzen. Der Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$ besteht aus allen reellen Zahlen.

Lösung d)

Man muss folgende Bedingungen erfüllen:

1. Wegen der Wurzel $\sqrt{x}$ im Zähler muss $x \geq 0$ erfüllt sein.

2. Wegen der Wurzel $\sqrt{x-1}$ im Nenner muss $x \geq 1$ erfüllt sein.

3. Da wir einen Bruch haben, darf der Nenner $\sqrt{x-1}-1$ nicht Null werden.

Um die letzte Bedingung zu erfüllen, berechnen wir:

$$\begin{aligned} & \sqrt{x-1}-1 && = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{x-1} && = 1 \\ \Rightarrow \quad & x-1 && = 1^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x-1 && = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x && = 2 \end{aligned}$$

Also ist $\sqrt{x-1}-1 \neq 0$ für $x \neq 2$ und offenbar ist $\sqrt{x-1}-1 = 0$ für $x = 2$.

Insgesamt besteht der Definitionsbereich D_f aus allen Zahlen x mit $x \geq 0$ und $x \geq 1$ und $x \neq 2$.

Da mit $x \geq 1$ natürlich auch $x \geq 0$ gilt, ist die Bedingung $x \geq 0$ überflüssig. Also besteht D_f aus allen reellen Zahlen $x \geq 1$ mit $x \neq 2$.

ÜBUNG 3

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x)$.

a) $f(x) = 2x - 6$

b) $f(x) = x^2 - 9$

c) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^4}$

d) $f(x) = x\sqrt{x-3}$

Antwort

a) $x = 3$

b) $x_1 = 3$ und $x_2 = -3$

c) $x = -1$

d) $x = 3$

Lösung a)

Die Nullstellen der Funktion $f(x) = 2x - 6$ sind die Stellen x, die die Gleichung $2x - 6 = 0$ erfüllen.

Man löse diese Gleichung nach x auf.

$$\begin{aligned} & 2x - 6 && = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x && = 6 \\ \Leftrightarrow\ & x && = 3 \end{aligned}$$

$x = 3$ ist also die einzige Nullstelle von $f(x)$.

Lösung b)

Man löse die Gleichung $f(x) = 0$ nach x auf.

$$\begin{aligned} & f(x) && = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 9 && = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 && = 9 \\ \Leftrightarrow\ & x && = 3 \ \text{ oder } \ x = -3 \end{aligned}$$

Die Nullstellen von $f(x)$ sind also $x_1 = 3$ und $x_2 = -3$.

Lösung c)

Der Bruch ist gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist und der Nenner dort ungleich Null ist. Man setze den Zähler von $f(x)$ gleich Null und rechne wie folgt.

$$\begin{aligned} & x^2+2x+1 &&= 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (x+1)^2 &&= 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x+1 &&= 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x &&= -1 \end{aligned}$$

$x^4 = 1 \neq 0$ für $x = -1$.

$x = -1$ ist also die einzige Nullstelle von $f(x)$.

Lösung d)

Der Definitionsbereich der Funktion $f(x)$ ist $D(f) = \{x \geq 3\}$.

Man rechne

$$\begin{aligned} & f(x) &&= 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x\sqrt{x-3} &&= 0. \end{aligned}$$

Da der Definitionsbereich nur aus $x \geq 3$ besteht, insbesondere $x \neq 0$, darf man die Gleichung durch x dividieren.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\quad & \sqrt{x-3} &&= 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x-3 &&= 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x &&= 3 \end{aligned}$$

Die einzige Nullstelle von $f(x)$ ist also $x = 3$.

ÜBUNG 4

Ist die gegebene Funktione $f(x)$ gerade oder ungerade?

a) $f(x) = x^4 + x^2$

b) $f(x) = 3x^3$

c) $f(x) = \frac{x^3+x^2}{x^2-2x+2}$

d) $f(x) = x\sqrt{x}$

Antwort

a) gerade

b) ungerade

c) weder gerade noch ungerade

d) weder gerade noch ungerade

Lösung a)

Der Definitionsbereich $\mathbb{R}$ ist symmetrisch. Man ersetze x durch $-x$ in der Funktion $f(x)$ und vereinfache den Ausdruck.

$$f(-x) \quad = (-x)^4 + (-x)^2 \quad = x^4 + x^2 = f(x)$$

Da $f(-x)$ gleich $f(x)$ ist, bedeutet dies, dass die Funktion $f(x)$ gerade ist.

Lösung b)

Der Definitionsbereich $\mathbb{R}$ ist symmetrisch. Man ersetze x durch $-x$ in der Funktion $f(x)$ und vereinfache $f(-x)$:

$$f(-x) \quad = 3(-x)^3 \quad = -3x^3 = -f(x).$$

$f(-x) = -f(x)$, also ist die Funktion $f(x)$ ungerade.

Lösung c)

Der Definitionsbereich $\mathbb{R}$ ist symmetrisch. Man berechne einige Funktionswerte von $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1^3+1^2}{1^2-2\cdot 1+2} \\ &= \frac{1+1}{1-2+2} \\ &= \frac{2}{1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= \frac{(-1)^3+(-1)^2}{(-1)^2-2\cdot(-1)+2} \\ &= \frac{-1+1}{1+2+2} \\ &= \frac{0}{5} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Da $f(-1) = 0 \neq f(1) = 2$ und $f(-1) = 0 \neq -f(1) = -2$, ist die gegebene Funktion weder gerade noch ungerade.

Lösung d)

Zuerst muss man sich überlegen was der Definitionsbereich von $f(x)$ ist.

Da in der Funktion die Wurzel vorkommt, darf x nicht negativ sein. Der Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}_0^+$ besteht also aus allen positiven reellen Zahlen und Null.

Nur für Funktionen mit einem Definitionsbereich, der symmetrisch um $x = 0$ liegt, sind die Begriffe gerade und ungerade Funktion definiert.

Die Funktion $f(x)$ ist weder gerade noch ungerade.

2. POTENZFUNKTIONEN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele:

- Sie verstehen, wie Graphen von Potenzfunktionen qualitativ verlaufen.
- Sie kennen die Graphen von Parabeln, Hyperbeln und Wurzeln.
- Sie können eine Zuordnung von Graphen und entsprechenden Funktionen herstellen.

2.1 Einführung in Potenzfunktionen

Die Funktionen mit den Funktionsgleichungen

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m \,,$$

wobei m eine ganze Zahl ($m \in \mathbb{Z}$) und n eine natürliche Zahl ist ($n \in \mathbb{N}$),
heißen *Potenzfunktionen*.

Ihr Definitionsbereich hängt davon ab, ob der Exponent $\frac{m}{n}$ ganzzahlig ist oder nicht und ob er positiv oder negativ ist. Die verschiedenen Fälle werden im Folgenden erklärt.

In der Grafik können Sie eine Potenzfunktion mit einem beliebigen Exponenten $\frac{m}{n}$ eingeben und sich die Funktion anzeigen lassen.

Sie erkennen in der Grafik, dass die Funktionen einen unterschiedlichen Verlauf in Abhängigkeit vom Exponenten haben.

[online-only]

Die Eigenschaften der Potenzfunktionen wie Definitionsbereich, Monotonie und Symmetrie sind vom Exponenten $\frac{m}{n}$ abhängig. In den Abschnitten unten sind unterschiedliche Fälle systematisch zusammengefasst.

2.2 Monome

Wenn $m \in \mathbb{N}_0$ und $n = 1$ ist, erhält man ein Monom.

Die Potenzfunktionen $f(x) = x^m$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $D_f = \mathbb{R}$, das heißt $f(x) = x,\ x^2,\ x^3,\ x^4, \ldots$ sowie $f(x) = x^0 = 1$, heißen *Monome*.

Speziell heißt $f(x) = x^2$ auch *Parabelfunktion*, denn der Graph ist eine Parabel.

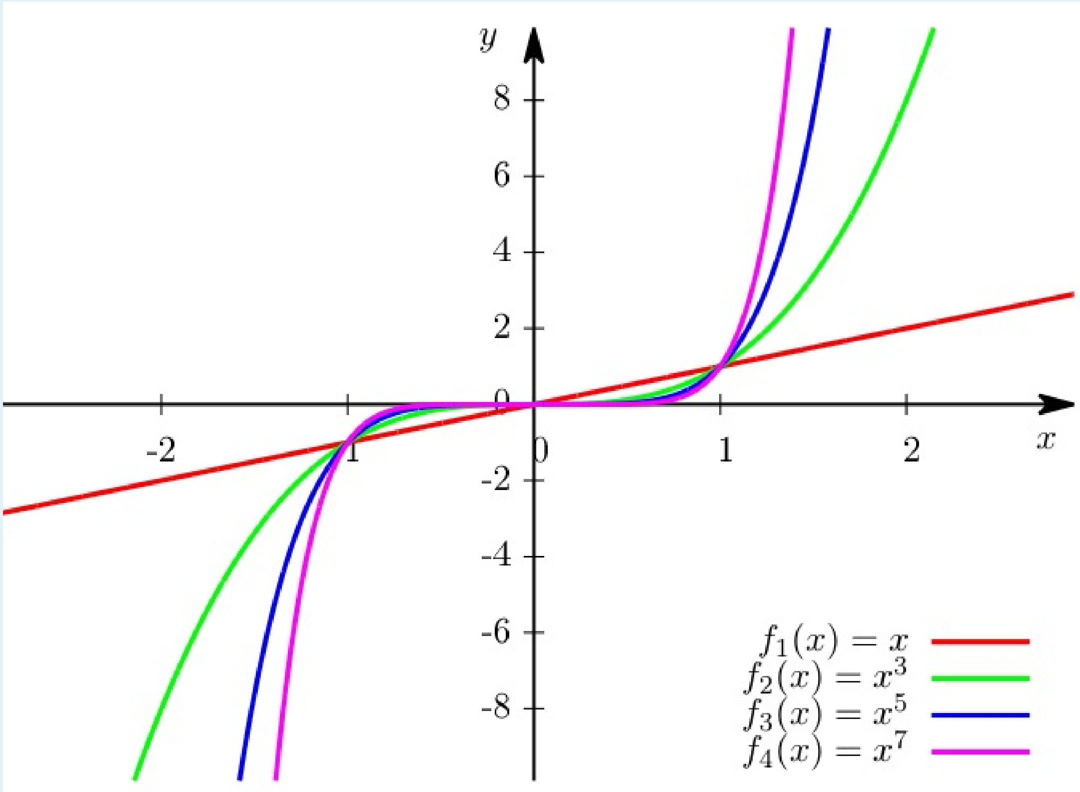
Die Symmetrie der Funktion $f(x) = x^m$ hängt davon ab, ob der Exponent geradzahlig oder ungeradzahlig ist.

- Ist m eine gerade Zahl ($m = 2k,\ k \in \mathbb{N}_0$), so ist $f(x) = x^m$ eine gerade Funktion, das heißt $f(x)$ ist symmetrisch bezüglich Spiegelung an der y-Achse und es gilt stets $f(-x) = f(x)$.
- Ist m eine ungerade Zahl ($m = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}$), so ist $f(x) = x^m$ eine ungerade Funktion, das heißt $f(x)$ ist symmetrisch bezüglich Punktspiegelung am Koordinatenursprung und es gilt stets $f(-x) = -f(x)$.

Den Funktionsgraphen von Monomen (außer der einfachen konstanten Funktion $f(x) = x^0 = 1$), ihren Definitionsbereich, ihren Wertebereich, ihre Monotonie und ihre Symmetrie können Sie aus den unten angefügten Grafiken und Tabellen entnehmen.

m = 2k - 1

Die Monome mit **ungeraden Exponenten**, $m = 1, 3, 5, \ldots, 2k - 1,\ k \in \mathbb{N}$.

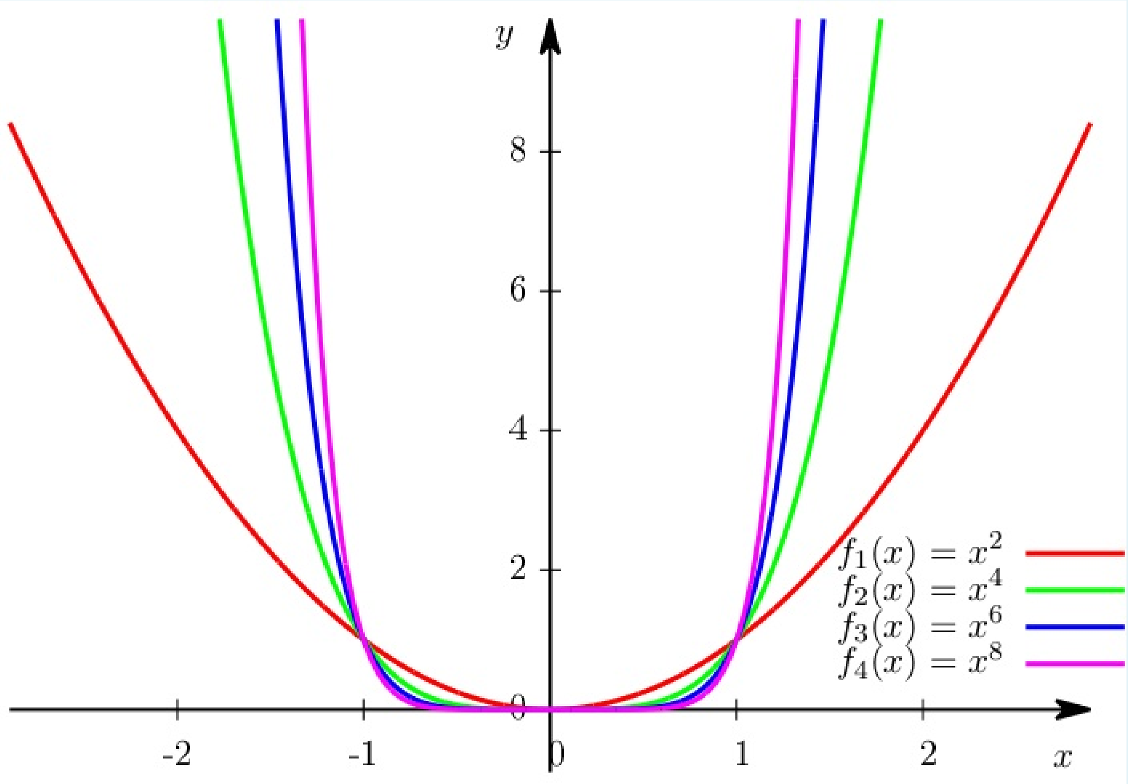


Die Funktion mit $m = 1$ ist eine lineare Funktion. Sie ist für alle x-Werte definiert, darüber hinaus nehmen ihre Funktionswerte alle reellen Zahlen an. Ihr Graph, die Gerade geht durch den Achsenursprung und ist zum Achsenursprung symmetrisch. Wie man sehen kann, haben alle Funktionen mit höheren ungeraden Exponenten die gleichen Eigenschaften. Wir können das zusammenfassen:

$f(x) = x^m,\ m = 2k - 1,\ k \in \mathbb{N}$	Die Funktionsgleichung.
$D_f = \mathbb{R}$	Definitionsbereich ist die Menge der reellen Zahlen.
$W_f = \mathbb{R}$	Wertemenge ist die Menge der reellen Zahlen.
$f(-x) = -f(x)$, ungerade Funktion	Die Funktionen sind zum Ursprung symmetrisch.
$f(0) = 0$	Für $x = 0$ sind alle Funktionen gleich Null.
$f(x_1) < f(x_2),\ x_1 < x_2$	Die Funktionen sind streng monoton wachsend.
Für $m \geq 3$:	
Steigung wachsend für $x \in [0; \infty)$	Linkskurve im Intervall $[0;\ \infty)$.
Steigung fallend für $x \in (-\infty; 0]$	Rechtskurve im Intervall $(-\infty;\ 0]$.
Rechtskurve für $x \leq 0$, Linkskurve für $x \geq 0$	0 ist eine Wendestelle.

$m = 2k$

Die Funktionen mit **geraden Exponenten**, $m = 2, 4, 6, \ldots, 2k,\ k \in \mathbb{N}$



Wie man sehen kann, haben auch alle Funktionen mit geraden Exponenten $f(x) = x^2, x^4, x^6, \ldots$. die gleichen Eigenschaften.

$f(x) = x^m, m = 2k,\ k \in \mathbb{N}$	Die Funktionsgleichung.
$D_f = \mathbb{R}$	Definitionsbereich ist die Menge der reellen Zahlen.
$W_f = \mathbb{R}_0^+$	Wertemenge ist die Menge der positiven reellen Zahlen und Null.
$f(-x) = f(x)$, gerade Funktion	Die Funktionen sind zur y-Achse symmetrisch.
$f(0) = 0$	für $x = 0$ sind alle Funktionen gleich Null.
$f(x_1) > f(x_2),\ x_1 < x_2 < 0$	streng monoton fallend auf dem Intervall $(-\infty;\ 0)$.
$f(x_1) < f(x_2),\ 0 < x_1 < x_2$	streng monoton wachsend auf dem Intervall $[0;\ \infty)$.
Waagerechte Tangente	in $x = 0$ hat die Funktionen ein Minimum.
Steigung überall wachsend.	Linkskurve, kein Wendepunkt.

2.3 Potenzfunktionen mit ganzzahliger negativer Potenz

Bei negativem Exponenten m und $n = 1$ ergeben sich die Funktionen

$$f(x) = \quad x^m = \frac{1}{x^{-m}}, \quad (-m) > 0$$
$$\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \ldots$$

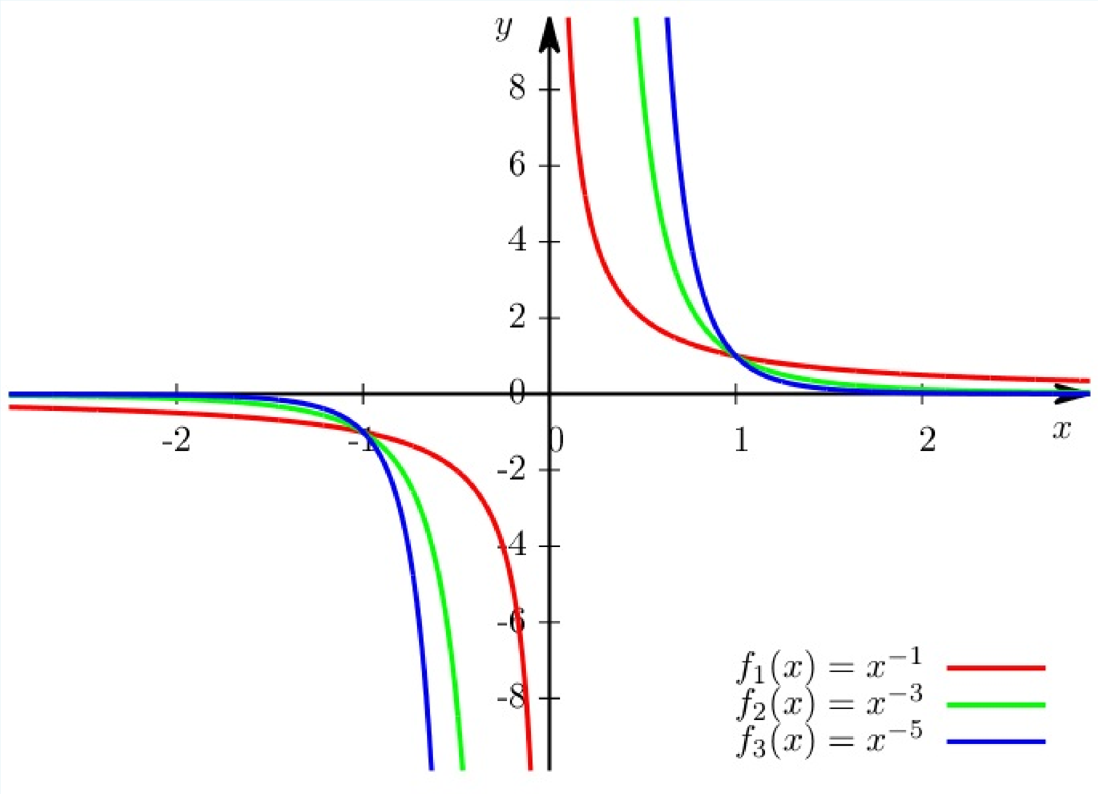
Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, da nicht durch 0 geteilt werden kann.

Für $m = -1$ ist der Graph von $f(x) = \frac{1}{x}$ eine *Hyperbel*, bei $x = 0$ hat die Funktion eine sogenannte *Polstelle*.

Die Symmetrie der Funktion hängt genauso wie bei den Monomen davon ab, ob m gerade oder ungerade ist.

$m =$ - $2k + 1$

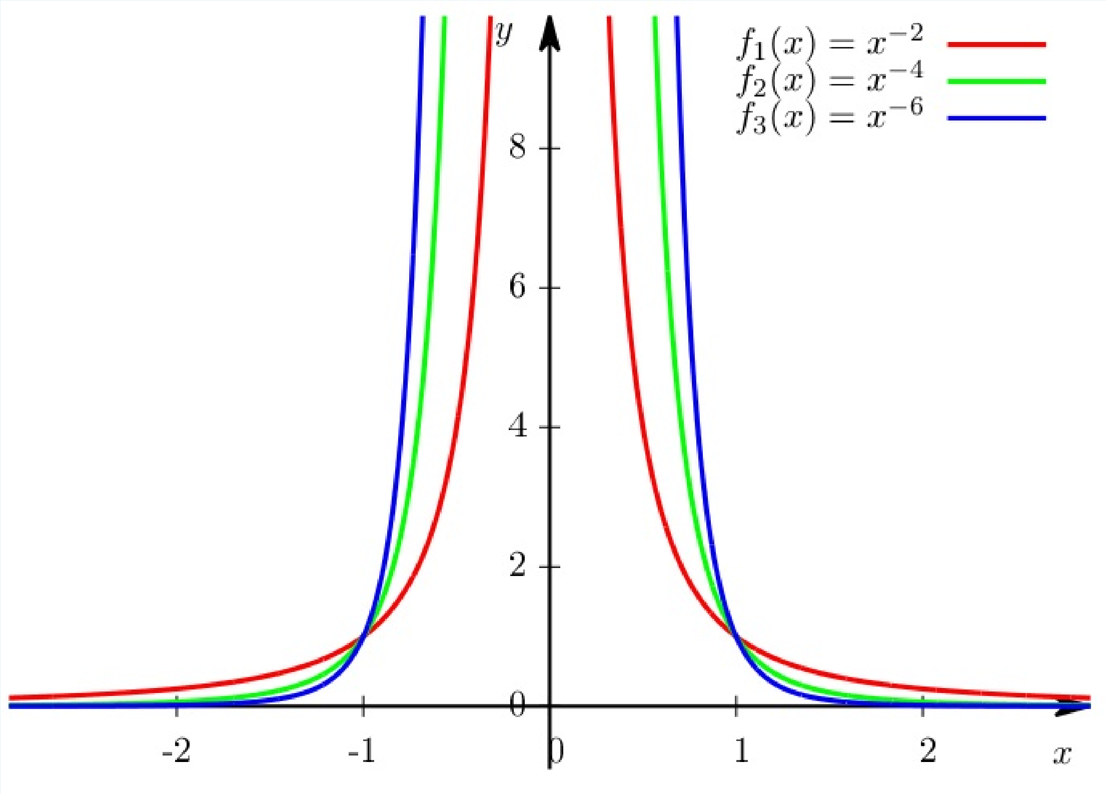
Die Funktionen mit **ungeraden Exponenten**, $m = -1, -3, -5, ..., -2k+1,\ k \in \mathbb{N}$



$f(x) = x^{-m},\ m = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}$	Die Funktionsgleichung.
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	Definitionsbereich ist die Menge der reellen Zahlen ohne 0.
$W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	Wertemenge ist die Menge aller reellen Zahlen ohne 0.
$f(-x) = -f(x)$, ungerade Funktion	Die Funktionen sind zum Achsenursprung symmetrisch.
$f(x) \neq 0$	Die Funktionen haben keine Nullstellen.
$f(x_1) > f(x_2),\ x_1 < x_2 < 0$	Die Funktionen sind streng monoton fallend auf $(-\infty; 0)$.
$f(x_1) > f(x_2),\ 0 < x_1 < x_2$	Die Funktionen sind streng monoton fallend auf $(0; \infty)$.
Steigung wachsend für $x \in (0; \infty)$	Linkskurve im Intervall $(0\,; \infty)$.
Steigung fallend für $x \in (-\infty; 0)$	Rechtskurve im Intervall $(-\infty\,; 0)$.

$m = -2k$

Die Funktionen mit **geraden Exponenten**, $m = -2, -4, -6, \ldots, -2k,\ k \in \mathbb{N}$



$f(x) = x^{-m}, m = 2k, k \in \mathbb{N}$	Die Funktionsgleichung.
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	Definitionsbereich ist die Menge der reellen Zahlen ohne 0.
$W_f = \mathbb{R}^+$	Wertemenge ist die Menge aller positiven reellen Zahlen.
$f(-x) = f(x)$, gerade Funktion	Die Funktionen sind zur y-Achse symmetrisch.
$f(0) \neq 0$	Die Funktionen haben keine Nullstellen.
$f(x_1) > f(x_2), 0 < x_1 < x_2$	streng monoton fallend auf dem Intervall $(0\,;\infty)$.
$f(x_1) < f(x_2), x_1 < x_2 < 0$	streng monoton wachsend auf dem Intervall $(-\infty\,;0)$.
Steigung überall wachsend	Linkskurve in beiden Intervallen

2.4 Wurzelfunktionen

Wenn der Exponent $\frac{m}{n}$ keine ganze Zahl ist, dann gilt $n \geq 2$ (auch wenn der Bruch vollständig gekürzt ist). Die Funktionen $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ sind dann *Wurzelfunktion*, denn $f(x) = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$.

Die Potenzfunktionen vom Typ

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m \quad m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\quad n \geq 2, \quad \text{mit} \\ D_f &= \mathbb{R}_0^+ = [0;\ \infty) \ \text{ für } m > 0, \\ D_f &= \mathbb{R}^+ = (0;\ \infty) \ \text{ für } m < 0, \end{aligned}$$

heißen *Wurzelfunktionen*, wenn der Bruch $\frac{m}{n}$ keine ganze Zahl ist.

Beispiele von Wurzelfunktionen sind $f(x) = \sqrt{x},\ \sqrt[2]{x^3},\ \sqrt[3]{x^2}\ \ldots$, die Funktion $f(x) = x^{\frac{6}{3}} = x^2$ wird nicht als Wurzelfunktion bezeichnet.

Da negative Basen bei gebrochenen Exponenten bzw. Wurzeln verboten sind, besteht der Definitionsbereich der Wurzelfunktionen immer aus positiven Zahlen und evtl. der Null. Die Wurzelfunktionen sind für negative x nicht definiert.

Die Problematik negativer Zahlen unter Wurzeln kann man an folgendem Beispiel sehen:

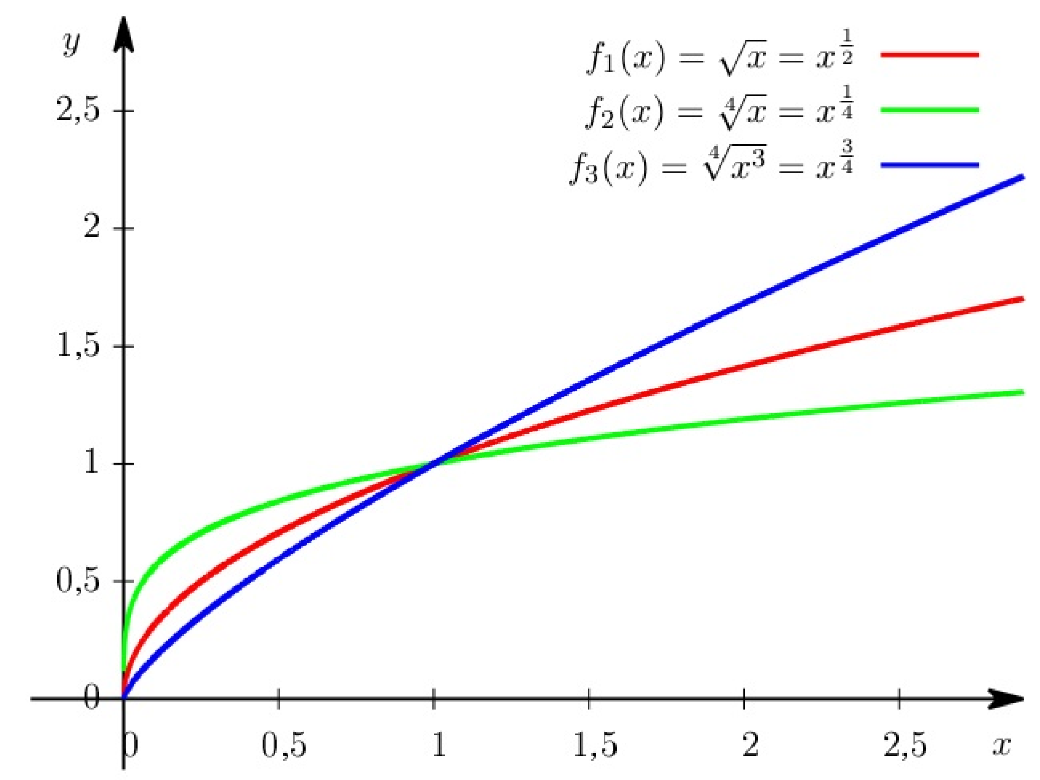
$$\begin{aligned} (-8)^{\frac{1}{3}} &= \sqrt[3]{-8} = -2,\ \text{denn } (-2)^3 = -8, \quad (??) \\ (-8)^{\frac{1}{3}} &= (-8)^{\frac{2}{6}} = \left((-8)^2\right)^{\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{6}} = 2. \end{aligned}$$

Man kann mit zulässigen Umformungen (Potenzrechenregeln) widersprüchliche Vorzeichen erhalten, wenn unter der Wurzel negative Zahlen erlaubt werden. Darum sind die Wurzelfunktionen für negative x nicht definiert.

Der Verlauf des Graphen ist vom Vorzeichen des Exponenten und dem Verhältnis von m zu n abhängig.

0<mn<1

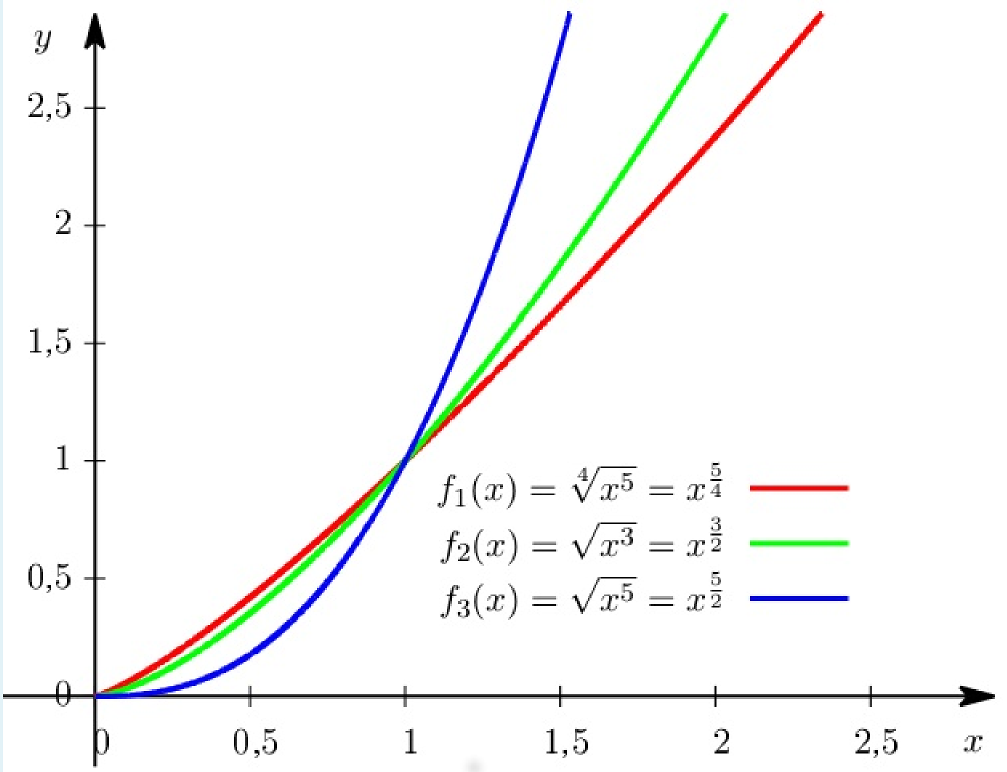
Die Wurzelfunktionen mit Exponenten $0 < \frac{m}{n} < 1,\ m, n \in \mathbb{N}$.
Der Punkt $(1;\ 1)$ liegt auf dem Graphen jeder Potenzfunktion, die Graphen sind monoton steigend. Bei Annäherung von x an Null werden die Graphen immer steiler und streben gegen Null, für große x werden sie immer flacher und streben gegen Unendlich.



$f(x) = x^{\frac{m}{n}}$, $0 < \frac{m}{n} < 1,\ m, n \in \mathbb{N}$	Die Funktionsgleichung.
$D_f = \mathbb{R}_0^+$	Definitionsbereich: positive reelle Zahlen und Null.
$W_f = \mathbb{R}_0^+$	Wertemenge: positive reelle Zahlen und Null.
Definitionsbereich ist nicht symmetrisch.	Die Funktionen sind weder gerade noch ungerade.
$f(0) = 0$	$x = 0$ ist eine Nullstelle.
$f(x_1) < f(x_2),\ x_1 < x_2$	Die Funktionen sind streng monoton wachsend.
Steigung ist abnehmend.	Die Funktionsgraphen verlaufen als Rechtskurve.

mn>1

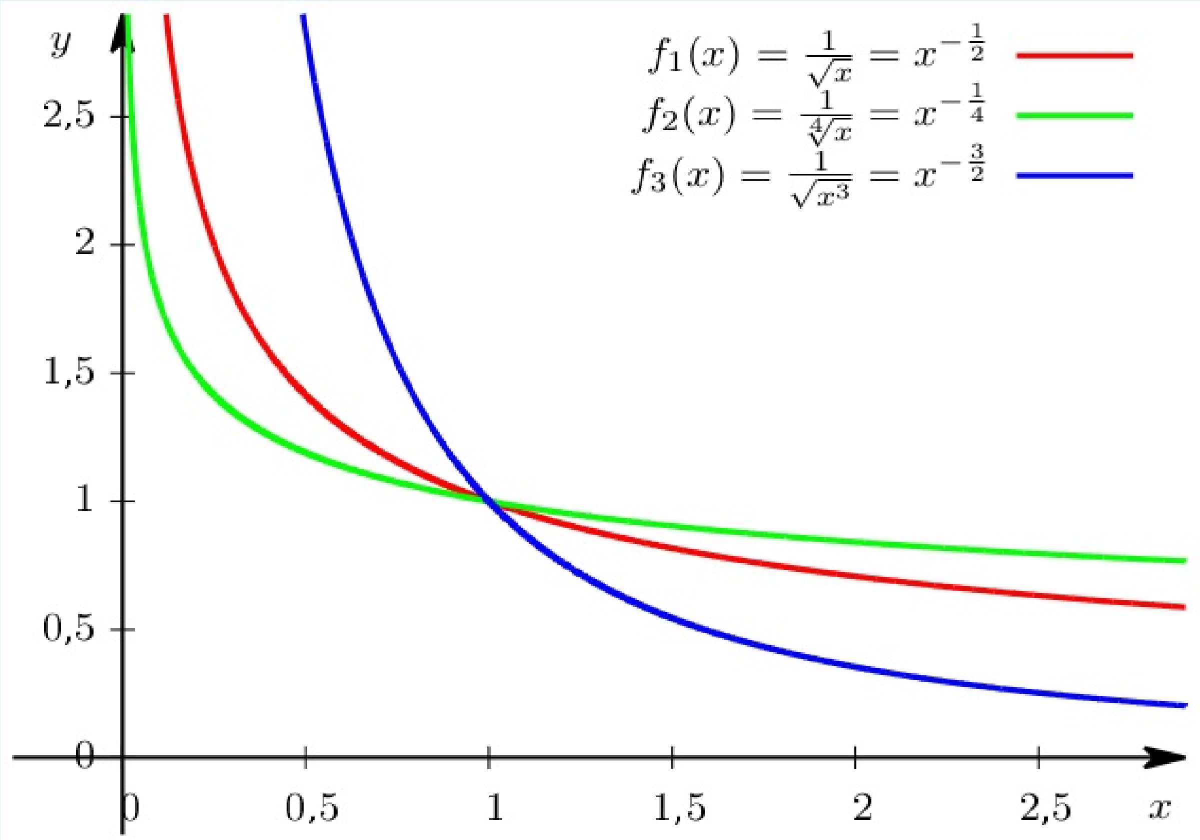
Die Wurzelfunktionen mit Exponenten $\frac{m}{n} > 1,\ m, n \in \mathbb{N}$.
Der Punkt $(1;\ 1)$ liegt auf dem Graphen jeder Potenzfunktion, die Graphen sind monoton steigend. Bei Annäherung von x an Null werden die Graphen immer flacher und streben gegen Null, für große x werden sie immer steiler und streben gegen Unendlich.



$f(x) = x^{\frac{m}{n}},\ \frac{m}{n} > 1,\ m, n \in \mathbb{N}$	Die Funktionsgleichung.
$D_f = \mathbb{R}_0^+$	Definitionsbereich: positive reelle Zahlen und Null.
$W_f = \mathbb{R}_0^+$	Wertemenge: positive reelle Zahlen und Null.
Definitionsbereich ist nicht symmetrisch.	Die Funktionen sind weder gerade noch ungerade.
$f(0) = 0$	$x = 0$ ist eine Nullstelle.
$f(x_1) < f(x_2),\ x_1 < x_2$	Die Funktionen sind streng monoton wachsend.
Steigung ist wachsend.	Die Funktionsgraphen verlaufen als Linkskurve.

mn<0

Die Wurzelfunktionen mit Exponenten $\frac{m}{n} < 0,\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$.
Der Punkt $(1;\ 1)$ liegt auf dem Graphen jeder Potenzfunktion, die Graphen sind monoton fallend. Bei Annäherung von x an Null werden die Graphen immer steiler und streben gegen Unendlich, für große x werden sie immer flacher und streben gegen Null.



$f(x) = x^{\frac{m}{n}},\ \frac{m}{n} < 0,$ $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$	Die Funktionsgleichung.
$D_f = \mathbb{R}^+$	Definitionsbereich ist die Menge der positiven reellen Zahlen.
$W_f = \mathbb{R}^+$	Wertemenge ist die Menge der positiven reellen Zahlen.
Definitionsbereich ist nicht symmetrisch.	Die Funktionen sind weder gerade noch ungerade.
$f(x) \neq 0$	Die Funktionen haben keine Nullstellen.
$f(x_1) > f(x_2),\ x_1 < x_2$	Die Funktionen sind streng monoton fallend.
Steigung ist wachsend.	Die Graphen verlaufen als Linkskurven.

2.5 Potenzfunktionen mit Vorfaktor

Multiplikation der Potenzfunktionen mit einer reellen Zahl a

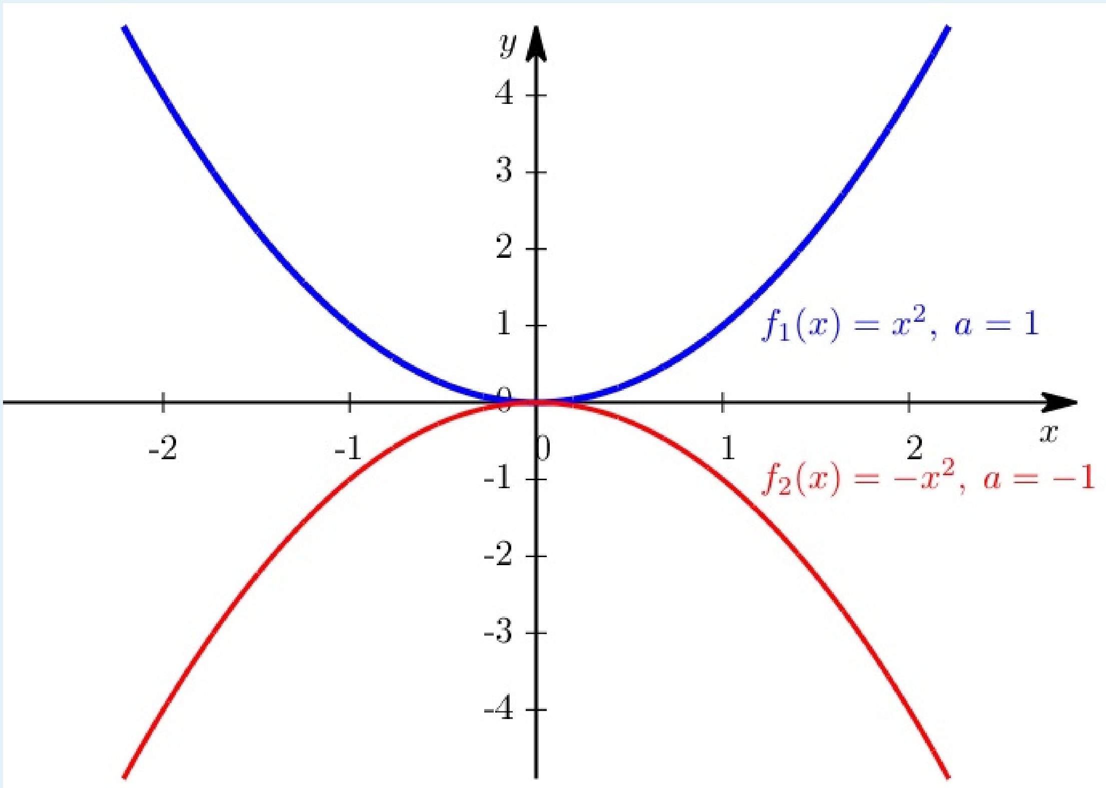
- spiegelt den Funktionsgraphen an der x-Achse, wenn $a = -1$ ist,
- streckt den Funktionsgraphen in senkrechter Richtung, wenn $|a| > 1$ ist,
- staucht den Funktionsgraphen in senkrechter Richtung, wenn $|a| < 1$ ist.

Die Multiplikation mit einem Faktor ist ein Spezialfall der in einem späteren Abschnitt behandelten Transformationen von Funktionen.

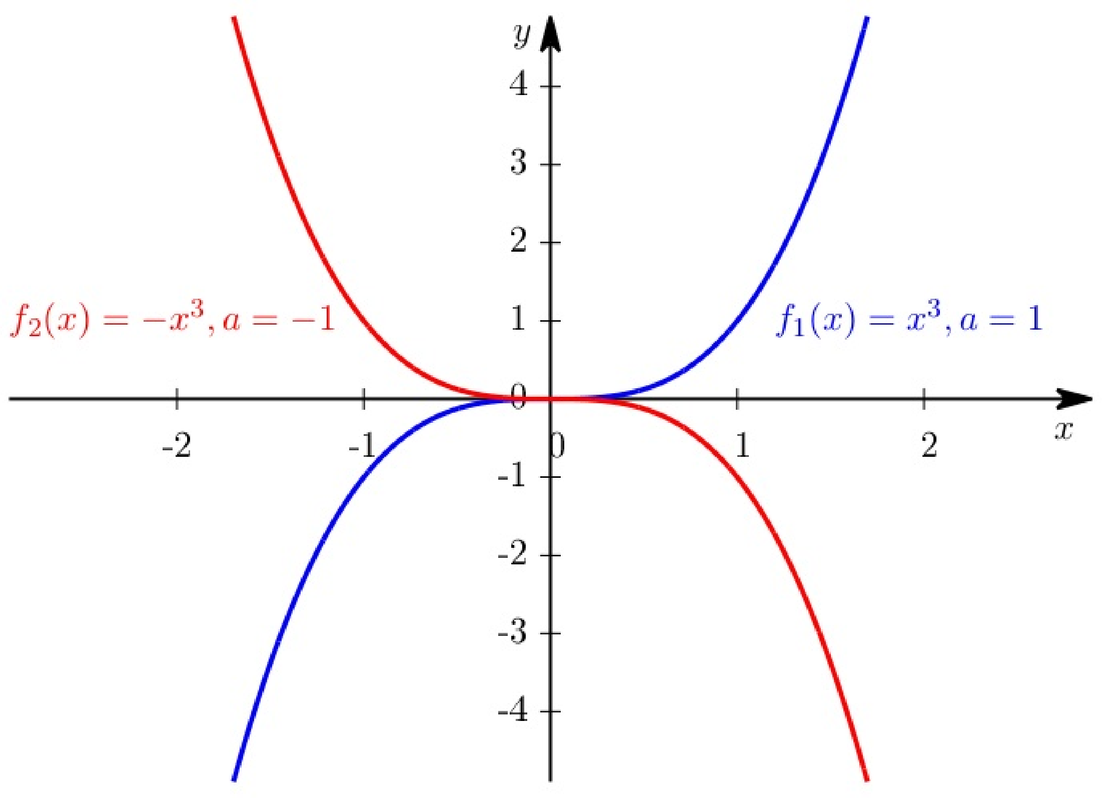
- **Multiplikation mit negativem Faktor**

  Wenn die Funktionen mit einer negativen Zahl multipliziert werden, ändern sich einige Eigenschaften in ihr Gegenteil, andere bleiben erhalten. Definitionsbereich und Symmetrie bleiben dabei erhalten, allerdings ändert sich das Monotonieverhalten sowie Rechts- und Linkskrümmung an jeder Stelle x in das Gegenteil.

f(x)=ax2



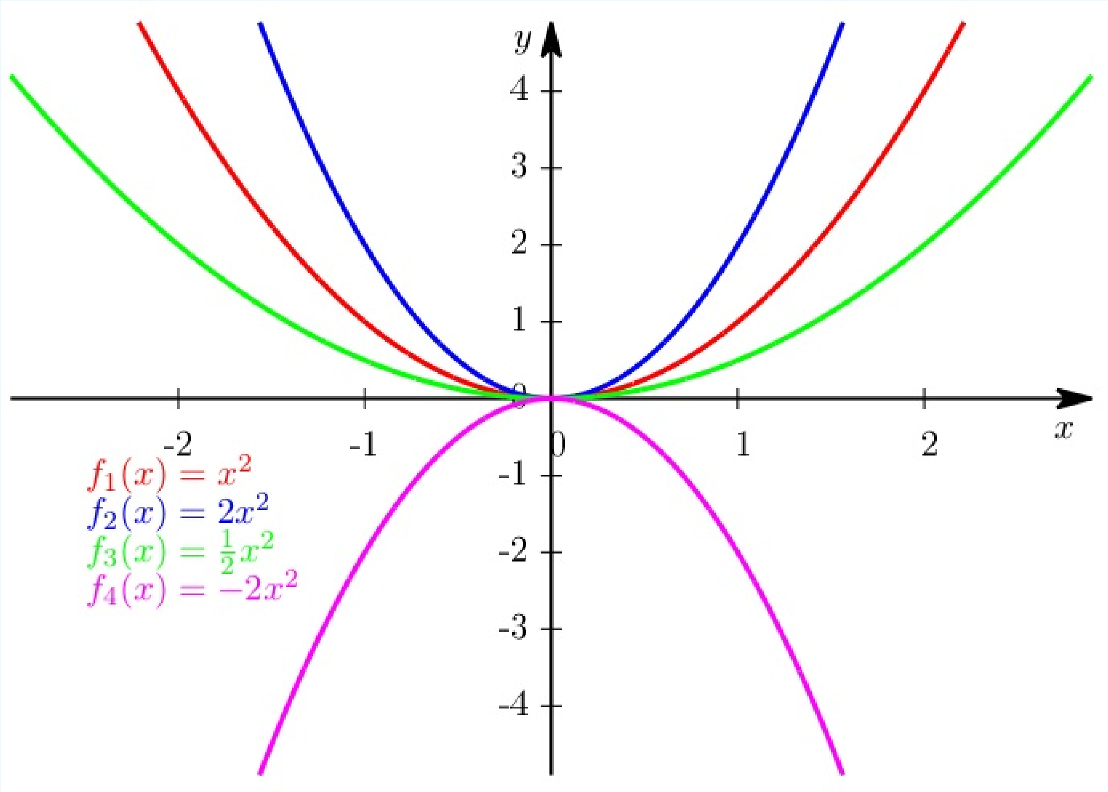
f(x)=ax3



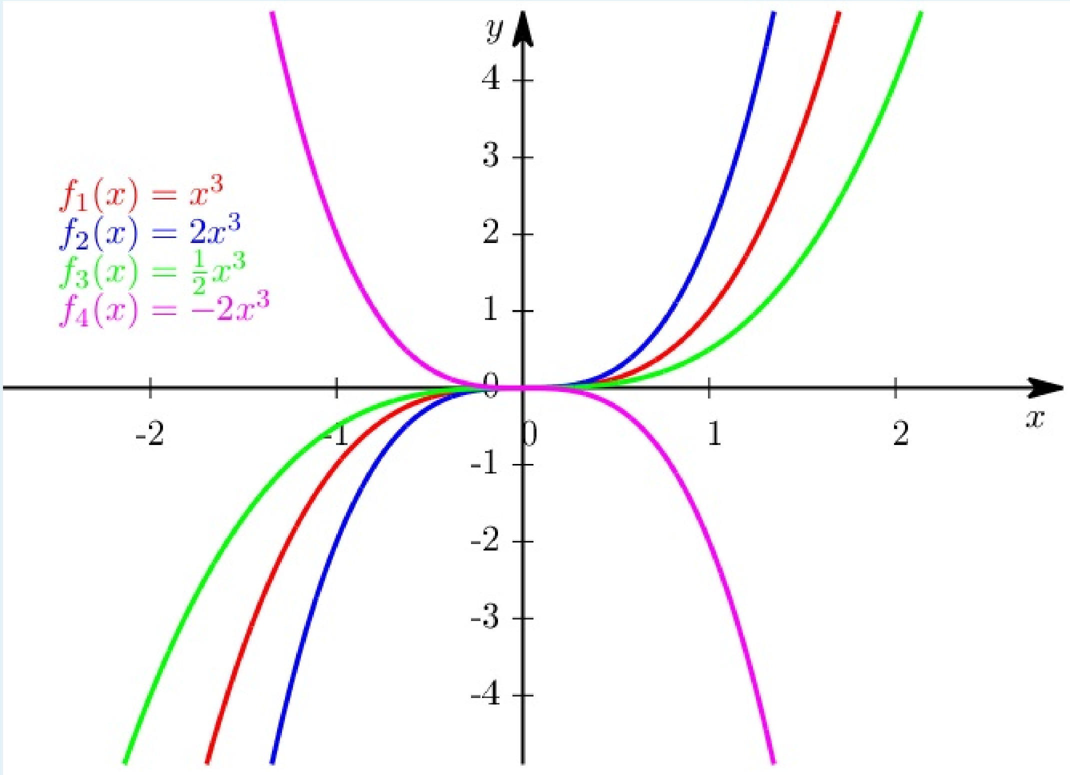
- **Streckung und Stauchung**

  Wenn die Funktion mit einer reellen positiven Zahl multipliziert wird, dann ändern sich die Eigenschaften Nullstellen, Monotonie, Krümmungsverhalten nicht. Der Koeffizient ist in diesem Fall ein Streck- bzw. Stauchfaktor.
  Wenn die Funktionen mit einer negativen Zahl $a \neq -1$ multipliziert werden, dann werden die Funktionen an der x-Achse gespiegelt und dazu mit $|a|$ senkrecht gestaucht, bzw. gestreckt.

f(x)=ax2


$f_1(x) = x^2$
$f_2(x) = 2x^2$
$f_3(x) = \frac{1}{2}x^2$
$f_4(x) = -2x^2$
y
x

f(x)=ax3


$f_1(x) = x^3$
$f_2(x) = 2x^3$
$f_3(x) = \frac{1}{2}x^3$
$f_4(x) = -2x^3$
y
x

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Man bestimme den Funktionswert der Funktion $f(x)$ bei x_0.

a) $f(x) = 2x^3$ bei $x_0 = 2$

b) $f(x) = 5x^{-2}$ bei $x_0 = 2$

c) $f(x) = 2x^{-1} + x^2$ bei $x_0 = 4$

d) $f(x) = \frac{5}{4}x^{\frac{5}{4}} + 2x^{\frac{6}{4}} + x - 3$ bei $x_0 = 16$

Antwort

a) $f(x_0) = f(2) = 16$

b) $f(x_0) = f(2) = \frac{5}{4}$

c) $f(x_0) = f(4) = \frac{33}{2}$

d) $f(x_0) = f(16) = 181$

Lösung a)

$$f(x_0) \quad = f(2) \quad = 2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 8 = 16$$

Lösung b)

Man benutze die Gleichheit $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$:

$$f(x_0) \quad = f(2) \quad = 5 \cdot 2^{-2} = \frac{5}{2^2} = \frac{5}{4}.$$

Lösung c)

Es gilt $x^{-1} = \frac{1}{x}$ und man kann wie folgt rechnen:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(4) \\ &= 2 \cdot 4^{-1} + 4^2 \\ &= \frac{2}{4} + 16 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{32}{2} \\ &= \frac{33}{2}. \end{aligned}$$

Lösung d)

Man benutze die Darstellung von rationalen Potenzen als $x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x}\,)^m$.

Dann berechnet sich $f(x_0)$ zu

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(16) \\ &= \tfrac{5}{4} \cdot 16^{\frac{5}{4}} + 2 \cdot 16^{\frac{6}{4}} + 16 - 3 \\ &= \tfrac{5}{4} \cdot (\sqrt[4]{16}\,)^5 + 2 \cdot 16^{\frac{3}{2}} + 13 \\ &= \tfrac{5}{4} \cdot 2^5 + 2 \cdot (\sqrt[2]{16}\,)^3 + 13 \\ &= \tfrac{5}{4} \cdot 32 + 2 \cdot 4^3 + 13 \\ &= 5 \cdot 8 + 2 \cdot 64 + 13 \\ &= 40 + 128 + 13 \\ &= 181. \end{aligned}$$

ÜBUNG 2

a) Jemand hat sich eine Funktion $f(x)$ wie folgt schrittweise zusammengestellt:

1. Es wurde mit einem Monom begonnen, dessen Graph durch den Punkt $(-3; -27)$ geht.

2. Dann wurde der Graph an der x-Achse gespiegelt und um das 6-fache in senkrechter Richtung gestreckt.

Geben Sie die Funktionsvorschrift für $f(x)$ an.

b) Eine Potenzfunktion $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$, $m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$, hat die Eigenschaft...

b1) ...$f(3) < 1$. Was folgt daraus für die Potenz $\frac{m}{n}$ und für $f(\frac{1}{3})$?

b2) ...$f(\frac{1}{2}) < 1$. Was folgt daraus für die Potenz $\frac{m}{n}$ und für $f(2)$?

b3) ...$f(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}$. Was folgt daraus für die Potenz $\frac{m}{n}$ und für $f(2)$?

Antworten

a) $f(x) = -6x^3$

b1) $\frac{m}{n} < 0$ und $f(\frac{1}{3}) > 1$

b2) $\frac{m}{n} > 0$ und $f(2) > 1$

b3) $\frac{m}{n} > 1$ und $f(2) > 2$

Lösung a)

Ein Monom ist eine Funktion von der Form $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$. Damit der Graph einer solchen Funktion durch den Punkt $(-3; -27)$ verläuft, muss gelten $(-3)^n = -27$.

Die einzige natürliche Zahl n, die das erfüllt, ist $n = 3$.

Also erhält man im 1. Schritt die Funktion $f_1(x) = x^3$.

Die Spiegelung an der x-Achse entspricht der Multiplikation mit -1 und die Streckung in senkrechter Richtung um das 6-fache der Multiplikation mit 6.

Im 2. Schritt bekommt man somit die Funktion $f_2(x) = (-1) \cdot 6 \cdot x^3 = -6x^3$, und diese ist die gesuchte Funktion $f(x)$.

Lösung b1)

Da immer $f(1) = 1$ gilt, ist der „rechte" Funktionswert kleiner: $f(3) < 1 = f(1)$.

Eine Potenzfunktion ist für $x > 0$ überall streng monoton steigend, falls die Potenz $\frac{m}{n} > 0$ und streng monoton fallend, falls $\frac{m}{n} < 0$.

Da f von $x = 1$ zu $x = 3$ fällt, folgt $\frac{m}{n} < 0$.

Da f für alle $x > 0$ monoton fallend ist, folgt für die links von 1 liegende Stelle $x = \frac{1}{3}$, dass $f(\frac{1}{3}) > 1$.

Ein anderer Weg zu dem Ergebnis $f(\frac{1}{3}) > 1$ ist:
Für jede Potenzfunktion gilt

$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \left(\tfrac{1}{3}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{3^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{f(3)}.$$

$f(\frac{1}{3})$ ist also der Kehrwert von $f(3)$ und aus $f(3) < 1$ folgt $f(\frac{1}{3}) > 1$.

Lösung b2)

Da immer $f(1) = 1$ gilt, ist der „linke" Funktionswert kleiner: $f(\frac{1}{2}) < 1 = f(1)$.

Eine Potenzfunktion ist für $x > 0$ überall streng monoton steigend, falls die Potenz $\frac{m}{n} > 0$ und streng monoton fallend, falls $\frac{m}{n} < 0$.

Da f von $x = \frac{1}{2}$ zu $x = 1$ steigt, folgt $\frac{m}{n} > 0$.

Da f für alle $x > 0$ monoton steigend ist, folgt für die rechts von 1 liegende Stelle $x = 2$, dass $f(2) > 1$.

$f(\frac{1}{2})$ ist der Kehrwert von $f(2)$ und aus $f(\frac{1}{2}) < 1$ folgt $f(2) > 1$.

Lösung b3)

Da immer $f(1) = 1$ gilt, ist der „linke" Funktionswert kleiner: $f(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2} < 1 = f(1)$. Daraus folgt $\frac{m}{n} > 0$.

Wie Sie an den Graphen der Potenzfunktionen sehen können, ist eine Potenzfunktion für $x > 0$ überall linksgekrümmt, falls die Potenz $\frac{m}{n} > 1$ und rechtsgekrümmt, falls $0 < \frac{m}{n} < 1$.

Da $f(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}$, ist der Graph linksgekrümmt, denn der Punkt $(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2})$ auf der Verbindungsgeraden von $(0;\ 0)$ zu $(1;\ 1)$ liegt oberhalb links vom Graphen. Daraus folgt $\frac{m}{n} > 1$.

Aus $f(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}$ folgt $f(2) = \frac{1}{f(\frac{1}{2})} > 2$, denn $f(\frac{1}{2})$ ist der Kehrwert von $f(2)$.

ÜBUNG 3

Stellen Sie die Funktion $f(x)$ mit Hilfe des Wurzelsymbols und ohne negative Potenzen dar.

a) $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$

b) $f(x) = x^{-\frac{7}{3}}$

c) $f(x) = x^{\frac{9}{12}}$

d) $f(x) = x^{\frac{1}{16}}$

Antwort

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^7} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^7}}$

c) $f(x) = (\sqrt[4]{x})^3 = \sqrt[4]{x^3}$

d) $f(x) = \sqrt[16]{x}$

Lösung c)

Man bemerke zuerst, dass der Bruch $\frac{9}{12}$ gekürzt werden kann.

Also ist $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Der Nenner des Exponenten entspricht dem Wurzelziehen und man bekommt

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\frac{9}{12}} \\ &= x^{\frac{3}{4}} \\ &= \sqrt[4]{x^3} = (\sqrt[4]{x})^3 \end{aligned}$$

ÜBUNG 4

Beschreiben Sie das Krümmungsverhalten der Funktion $f(x)$.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = 10 \cdot x^2$

c) $f(x) = -10 \cdot x^2$

d) $f(x) = \frac{5}{x^3}$

Antwort

a) $f(x) = x^2$ ist linksgekrümmt auf der ganzen Definitionsmenge $\mathbb{R}$.

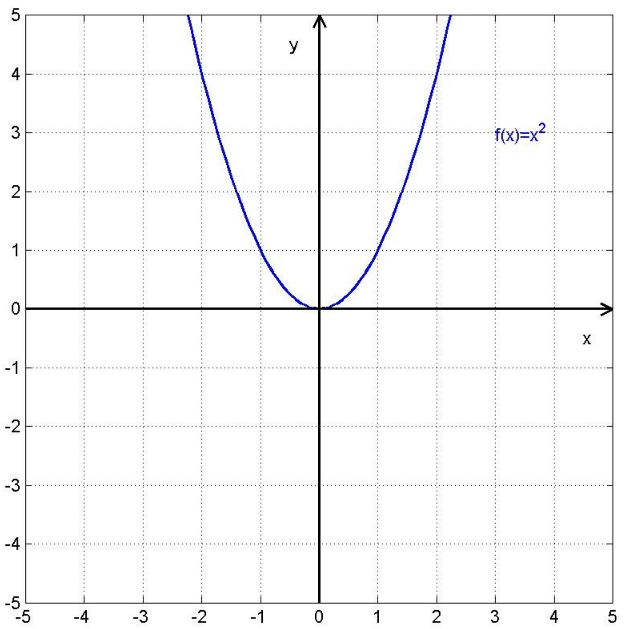
b) $f(x) = 10x^2$ ist linksgekrümmt auf der ganzen Definitionsmenge $\mathbb{R}$.

c) $f(x) = -10x^2$ ist rechtsgekrümmt auf der ganzen Definitionsmenge $\mathbb{R}$.

d) $f(x) = \frac{5}{x^3}$ ist rechtsgekrümmt im Intervall $(-\infty; 0)$,
linksgekrümmt im Intervall $(0; \infty)$

Lösung a)

Man betrachte den Verlauf des Graphen der Funktion $f(x) = x^2$.



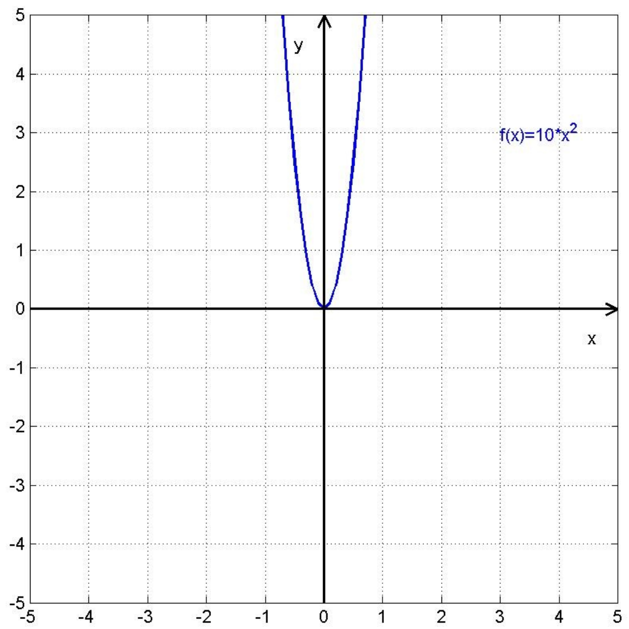
Man stellt fest, dass die Steigung der Tangente immer größer wird, wenn man sich von Links nach Rechts entlang der x-Achse bewegt. Im Intervall $(-\infty; 0)$ ist die Steigung negativ und wird größer bis sie im Punkt $x = 0$ gleich Null wird. Im Intervall $(0; \infty)$ wächst die Steigung stets und wird beliebig groß.

Oder gleichwertig: Der Graph der Funktion liegt überall oberhalb der Tangente an den Graphen.

Die Funktion ist also linksgekrümmt auf der ganzen reellen Zahlengerade.

Lösung b)

Man betrachte den Verlauf des Graphen der Funktion $f(x) = 10x^2$.

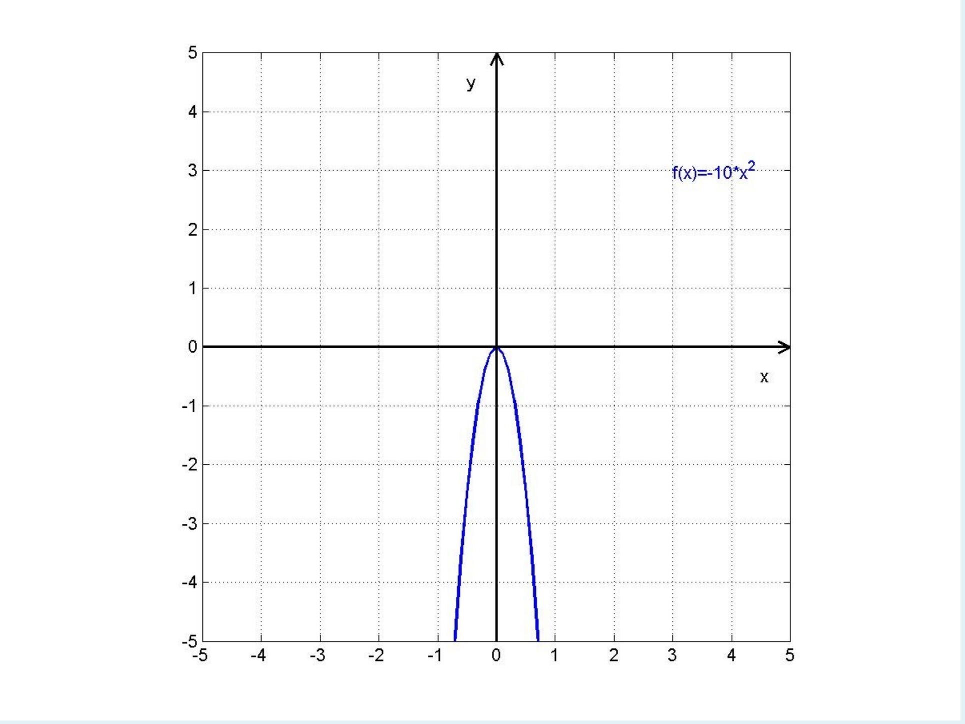


Genauso wie bei a) sieht man, dass die Steigung der Funktion stets wächst und dass der Graph oberhalb der Tangenten verläuft.

Die Funktion ist also linksgekrümmt auf der ganzen reellen Zahlengerade.

Lösung c)

Der Graph der Funktion $f(x) = -10x^2$ sieht aus wie der Graph von $f(x) = 10x^2$ gespiegelt an der x-Achse.

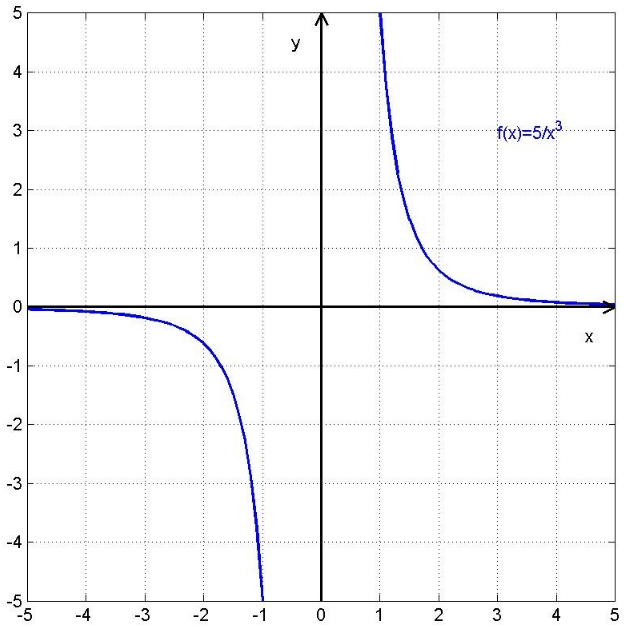


Bei Spiegelung an der x-Achse ändert sich die Linkskrümmung zur Rechtskrümmung.

Die Funktion ist also rechtsgekrümmt auf der ganzen reellen Zahlengerade.

Lösung d)

Man schaue sich den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{5}{x^3}$ an.



Die Steigung fällt stets im Intervall $(-\infty; 0)$, der Graph liegt dort unterhalb der Tangente, und die Steigung wächst stets im Intervall $(0; \infty)$, der Graph liegt dort oberhalb der Tangente.

Also ist $f(x)$ rechtsgekrümmt im Intervall $(-\infty; 0)$, linksgekrümmt im Intervall $(0; \infty)$.

3. POLYNOME

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele:

- Sie kennen die Definition von Polynomen und die Rolle der Koeffizienten.
- Sie können einfache Polynome grafisch darstellen und umgekehrt in einfachen Fällen den Graphen Polynome zuordnen.
- Sie können die Nullstellen einfacher Polynome berechnen und graphisch interpretieren.

3.1 Einführung in Polynomfunktionen

Im Abschnitt Potenzfunktionen haben Sie Monome kennengelernt. Polynome erhält man, wenn man Vielfache von Monomen addiert.

Funktionen der Form

$$p(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + a_{n-2}\, x^{n-2} + \ldots + a_1\, x + a_0$$

mit Koeffizienten $a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_{n-1},\, a_n \in \mathbb{R}$, wobei $a_n \neq 0$ ist, heißen *Polynome n. Grades*. Die Zahl a_n bezeichnet man als Leitkoeffizienten. Der Definitionsbereich der Polynome ist $D_p = \mathbb{R}$.

Das Polynom, das für alle Argumente $x \in \mathbb{R}$ den Wert Null annimmt, $p(x) = 0$, heißt das *Nullpolynom*. Es hat keinen Grad.

Polynome vom Grad Null sind konstante Funktionen $p(x) = a_0\, x^0 = a_0 \neq 0$. Für alle Polynome gilt $p(0) = a_0$, d.h. a_0 ist der y-Achsenabschnitt.

Polynome unterschiedlichen Grades:

$$\begin{array}{lll}
p_0(x) = -2 & a_0 = -2, & \text{Grad} = 0, \\
p_1(x) = 3x - 2 & a_0 = -2, a_1 = 3, & \text{Grad} = 1, \\
p_2(x) = 2x^2 + 3x - 2 & a_0 = -2, a_1 = 3, a_2 = 2, & \text{Grad} = 2, \\
p_3(x) = -3x^3 + 2x^2 + 3x - 2 & a_0 = -2, a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = -3, & \text{Grad} = 3, \\
p_4(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 2 & a_0 = -2, a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = -3, a_4 = 1, & \text{Grad} = 4.
\end{array}$$

3.2 Grafische Darstellung von Polynomen

Genauso wie in der Funktionsgleichung der Polynome die Vielfachen der Monome addiert werden, wird auch der Funktionsgraph aus den einzelnen Funktionsgraphen durch Addition der Funktionswerte bei gleichem x zusammengesetzt.

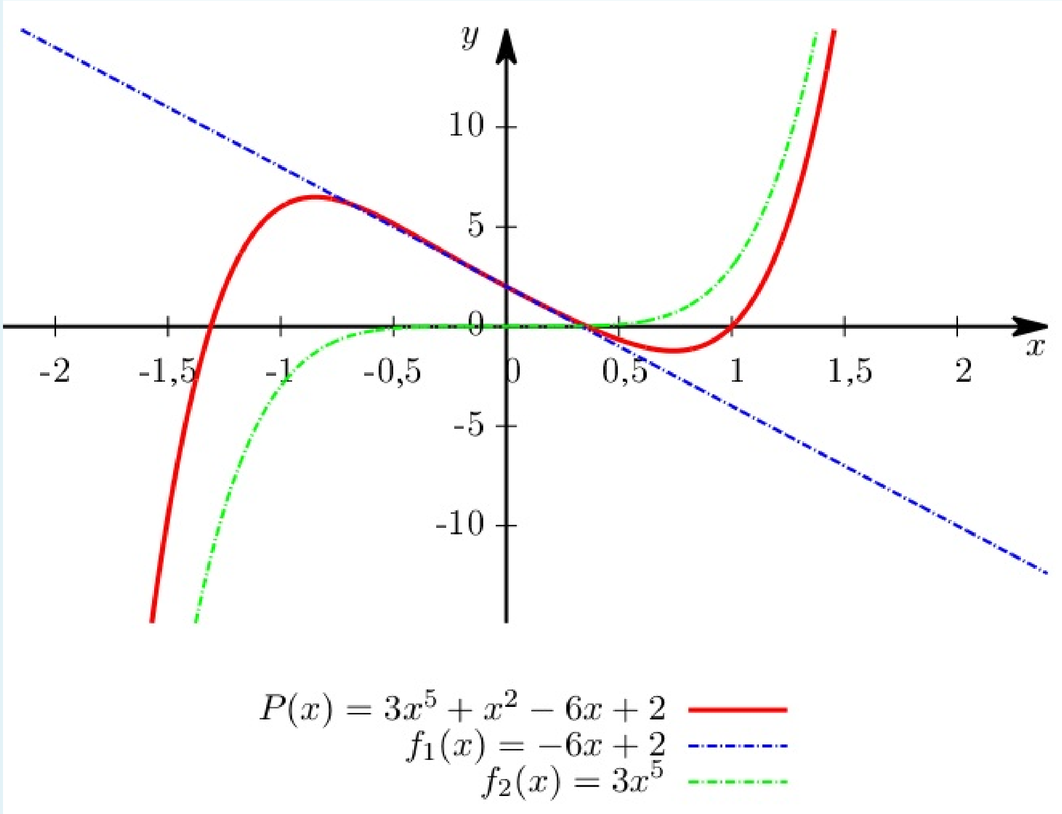
[online-only]

Die Graphen der Monome x^n, $n \geq 1$, zeigen, dass die Funktionswerte für $x \to \infty$ unbegrenzt wachsen. Man sagt, die Funktion x^n „strebt gegen ∞ für $x \to \infty$". Dasselbe gilt für $x \to -\infty$, wenn die Potenz n gerade ist. Bei ungerader Potenz n fallen die Funktionswerte unbegrenzt für $x \to -\infty$. Man sagt z.B., die Funktion x^3 „strebt gegen $-\infty$ für $x \to -\infty$". Dasselbe Verhalten haben die Funktionen $a_n x^n$, wenn der Leitkoeffizient a_n positiv ist. Bei $a_n < 0$ sind die Graphen an der x-Achse gespiegelt. Beispielsweise strebt $-2x^5$ gegen $-\infty$ für $x \to \infty$ und gegen ∞ für $x \to -\infty$". Veranschaulichen Sie sich dieses Verhalten für $x \to \pm\infty$ mit der Visualisierung.

Verhalten von Polynomfunktionen und ihrer Graphen bei Null und bei Unendlich:

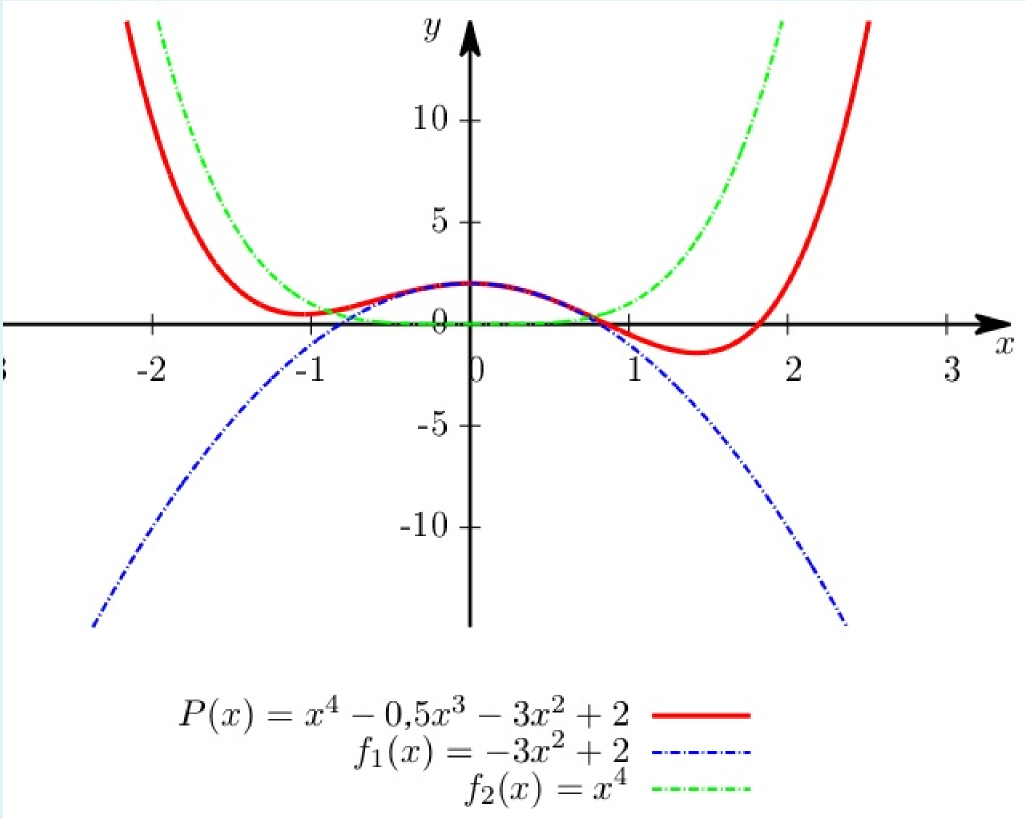
- Für $x \to \pm\infty$ hängt das Verhalten der Polynomfunktion $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ vom Summanden mit der größten Potenz ab: Der Graph verläuft wie der des Terms $a_n x^n$ der höchsten Potenz, wobei n der Grad des Polynoms ist, also $a_n \neq 0$ ist.
- Für $x \to 0$ hängt das Verhalten der Polynomfunktion $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ von den Summanden mit den niedrigen Potenzen ab: Ist $a_1 \neq 0$, so verläuft der Graph wie der des Terms $a_1 x + a_0$; ist $a_1 = 0$, aber $a_2 \neq 0$, so verläuft der Graph wie der des Terms $a_2 x^2 + a_0$; sind $a_1 = a_2 = 0$, aber $a_3 \neq 0$, so verläuft der Graph wie der des Terms $a_3 x^3 + a_0$; und so weiter.

$p(x) = 3x^5 + x^2 - 6x + 2$



Der Polynomgraph nähert sich für x nahe Null dem Graphen von $f_1(x) = -6x + 2$ und hat für $x \to \pm\infty$ das gleiche Verhalten wie der Graph von $f_2(x) = 3x^5$.

$p(x) = x^4 - 0,5x^3 - 3x^2 + 2$



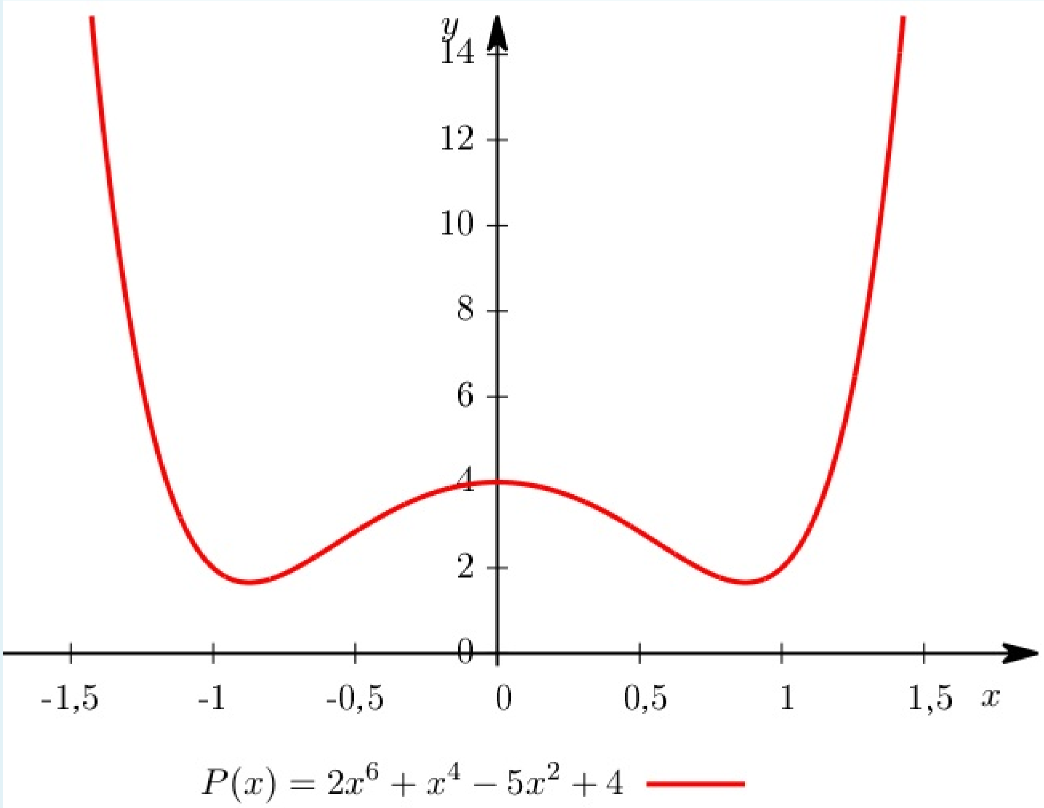
Der Polynomgraph nähert sich für x nahe Null dem Graphen von $f_1(x) = -3x^2 + 2$ und hat für $x \to \pm\infty$ das gleiche Verhalten wie der Graph von $f_2(x) = x^4$.

3.3 Nullstellen von Polynomen

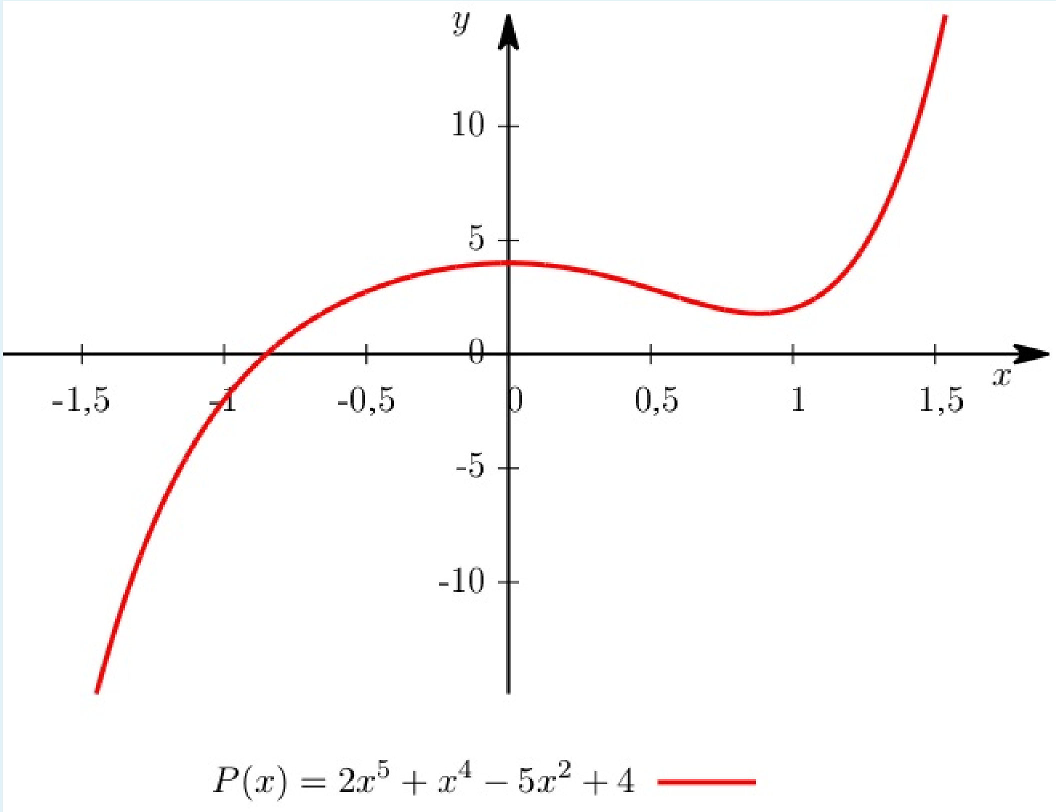
Nullstellen von Polynomen sind die Lösungen von Gleichungen, die ganzzahlige Potenzen der Variablen enthalten. Um Graphen von Polynomen zu zeichnen, ist es sinnvoll, zunächst die Nullstellen der Polynomfunktionen zu bestimmen. Der folgende Satz fasst einige wichtige Eigenschaften von Nullstellen von Polynomen zusammen:

- Polynome n. Grades besitzen höchstens n Nullstellen.
- Polynome $p(x) = a_{2k-1}\, x^{2k-1} + \ldots + a_1\, x + a_0$ ungeraden Grades, $a_{2k-1} \neq 0$, besitzen mindestens eine Nullstelle.
- Polynome $p(x) = a_{2k}\, x^{2k} + \ldots + a_4\, x^4 + a_2\, x^2 + a_0$, die nur aus Summanden mit geraden Potenzen bestehen mit Koeffizienten $a_0 > 0$ und $a_2,\, a_4,\, \ldots,\, a_{2k} \geq 0$ besitzen keine Nullstellen.

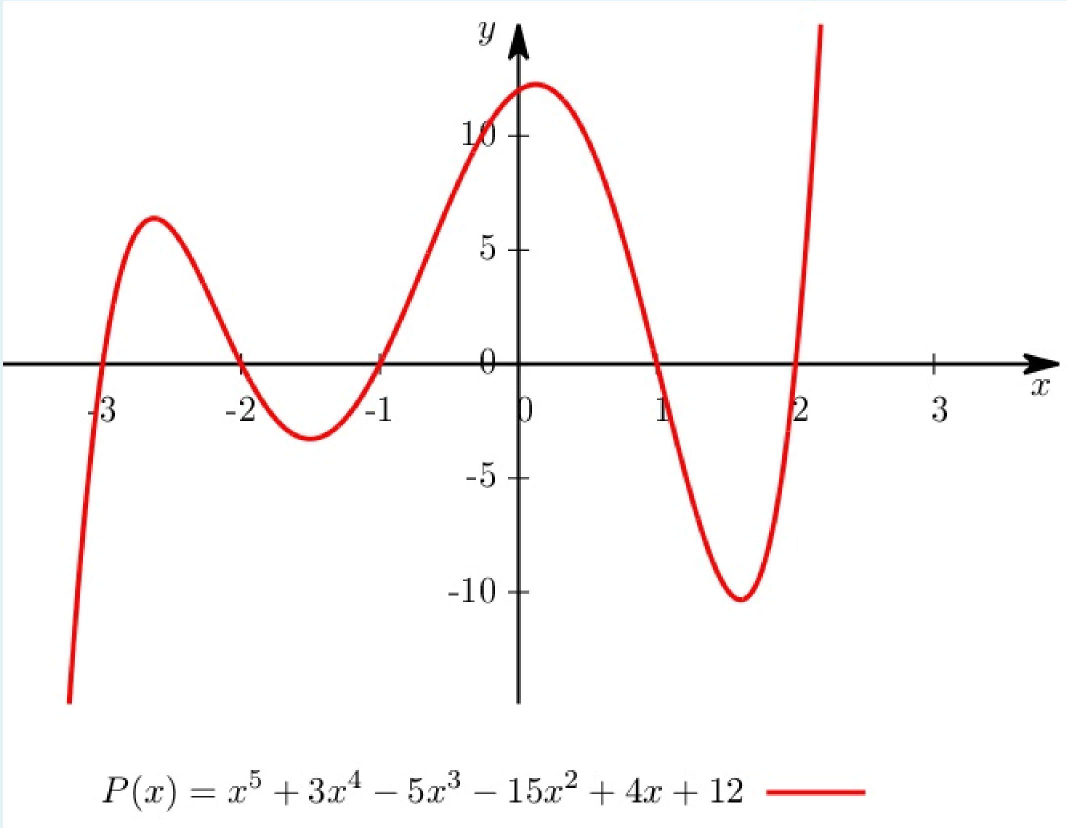
keine Nullstellen



1 Nullstelle



n Nullstellen



Wie wir im Abschnitt VI.1. gesehen haben, können die Nullstellen einer Funktion $f(x)$, bzw. eines Polynoms $p(x)$ gefunden werden, indem man die Gleichung $f(x) = 0$ bzw. $p(x) = 0$ löst. Die Lösungen der Gleichung sind dann die Nullstellen des Polynoms.

Im Abschnitt II.2 Lösen linearer und quadratischerGleichungen ist beschrieben, wie man durch quadratische Ergänzung oder mit Hilfe der p-q-Formel die Nullstellen von quadratischen Polynomen (das sind Polynome vom Grad 2) bestimmt. Für allgemeine Polynome höheren Grades, Grad ≥ 3, gibt es keine nützlichen Formeln mehr. In einigen Sonderfällen können die Nullstellen dennoch berechnet werden. Wir erklären dies an typischen Beispielen.

Substitution

Wenn ein Polynom vierten Grades außer dem konstanten Term nur die Potenzen x^2 und x^4 enthält, führt die Substitution $x^2 = u$ auf eine quadratische Gleichung für u, wie das Beispiel zeigt.
(Entsprechend mit $u = x^3$ bei $p(x) = a_6\, x^6 + a_3\, x^3 + a_0$ etc.)

$$p(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

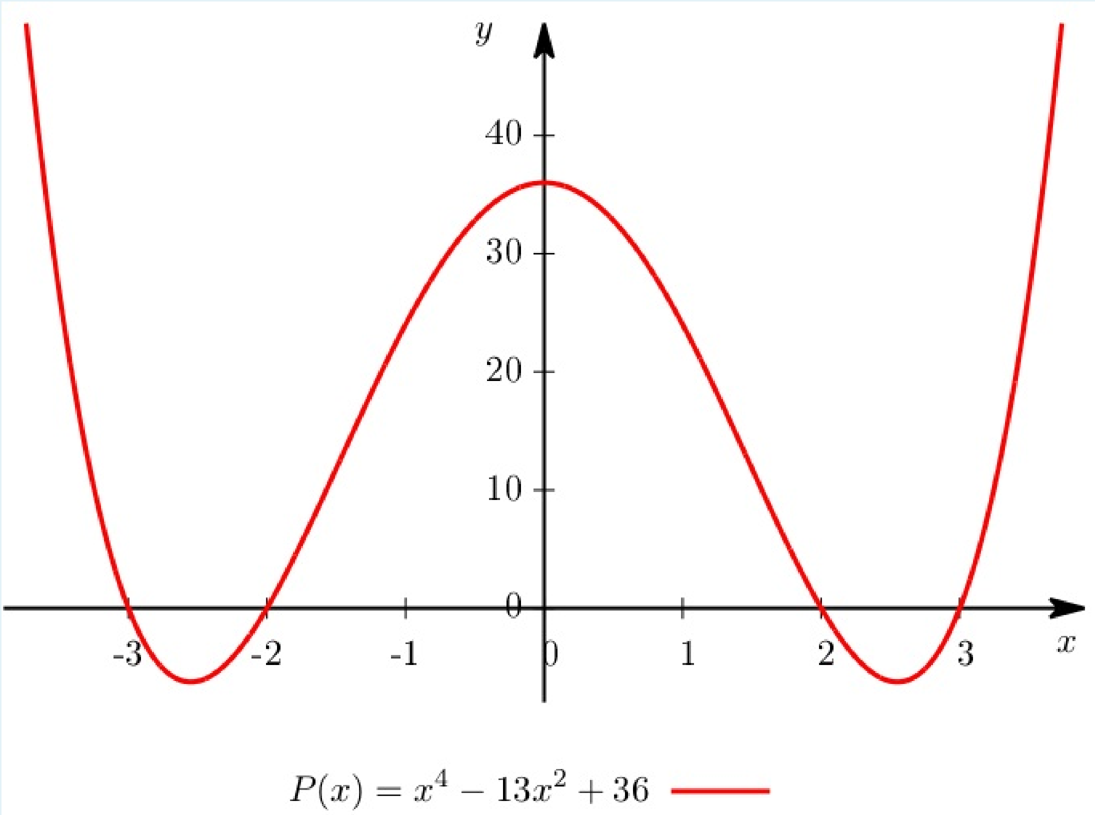
$$\begin{aligned}
0 &= x^4 - 13x^2 + 36 && \mid x^2 = u \\
&= u^2 - 13u + 36 && \mid p\text{-}q\text{-Formel} \\
u_{1,2} &= \tfrac{13}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{13}{2}\right)^2 - 36}
\end{aligned}$$

$$u_1 = 9 \qquad u_2 = 4$$

$$\begin{aligned}
x^2 = u_1 &\qquad x^2 = u_2 \\
x^2 = 9 &\qquad x^2 = 4 \\
x_{1,2} = \pm 3 &\qquad x_{3,4} = \pm 2
\end{aligned}$$

$$\text{Menge der Nullstellen} \qquad \{-2;\ -3;\ 2;\ 3\}$$

$$p(x) = (x-3)(x-2)(x+2)(x+3) \qquad \text{das faktorisierte Polynom}$$



Substitution

Bei einer Substitution $x^2 = u$ (oder $x^4 = u$ etc.) führen negative Lösungen u nicht zu Nullstellen des Polynoms, da $x^2 \geq 0$.

$$
\begin{aligned}
p(x) &= x^4 - 8x^2 - 9 \\
\\
0 &= x^4 - 8x^2 - 9 && \big| \, x^2 = u \\
&= u^2 - 8u - 9 && \big| \, p\text{-}q\text{-Formel} \\
u_{1,2} &= 4 \pm \sqrt{16+9} \\
u_1 = 9 & \qquad u_2 = -1 \\
\\
x^2 = u_1 & \qquad x^2 = u_2 \\
x^2 = 9 & \qquad x^2 = -1 \\
x_{1,2} = \pm 3 & \qquad \text{keine Lösung für } \; x^2 = -1 \\
\\
\text{Menge der Nullstellen} & \qquad \{-3;\, 3\} \\
\\
p(x) &= (x-3)(x+3)(x^2+1) \qquad \text{das faktorisierte Polynom}
\end{aligned}
$$

Ausklammern

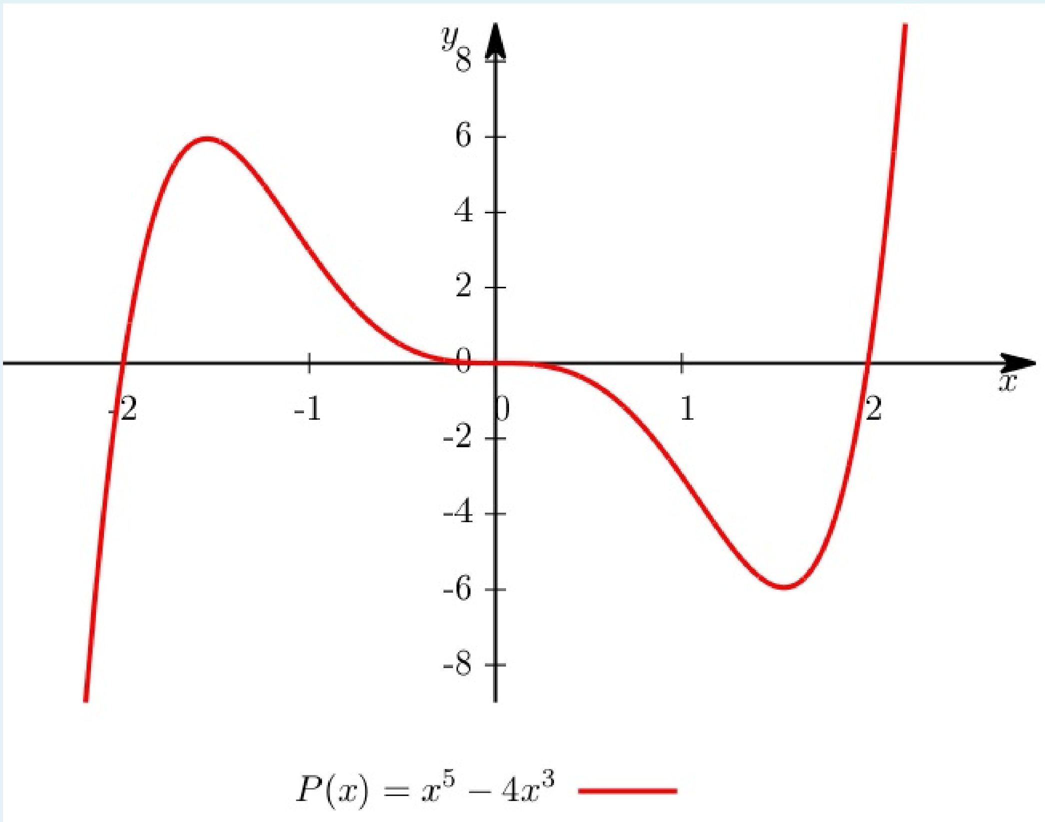
Enthält das Polynom keinen konstanten Term, dann kann die niedrigste auftretende Potenz von x ausgeklammert werden. Der Grad des verbleibenden Polynoms ist dann niedriger.

$$p(x) = x^5 - 4x^3$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^5 - 4x^3 \\ &= x^3(x^2 - 4) \\ &= x^3(x-2)(x+2) \end{aligned}$$

$$\text{Menge der Nullstellen} \quad \{-2;\ 0;\ 2\}$$

$$p(x) = x^3(x-2)(x+2)$$

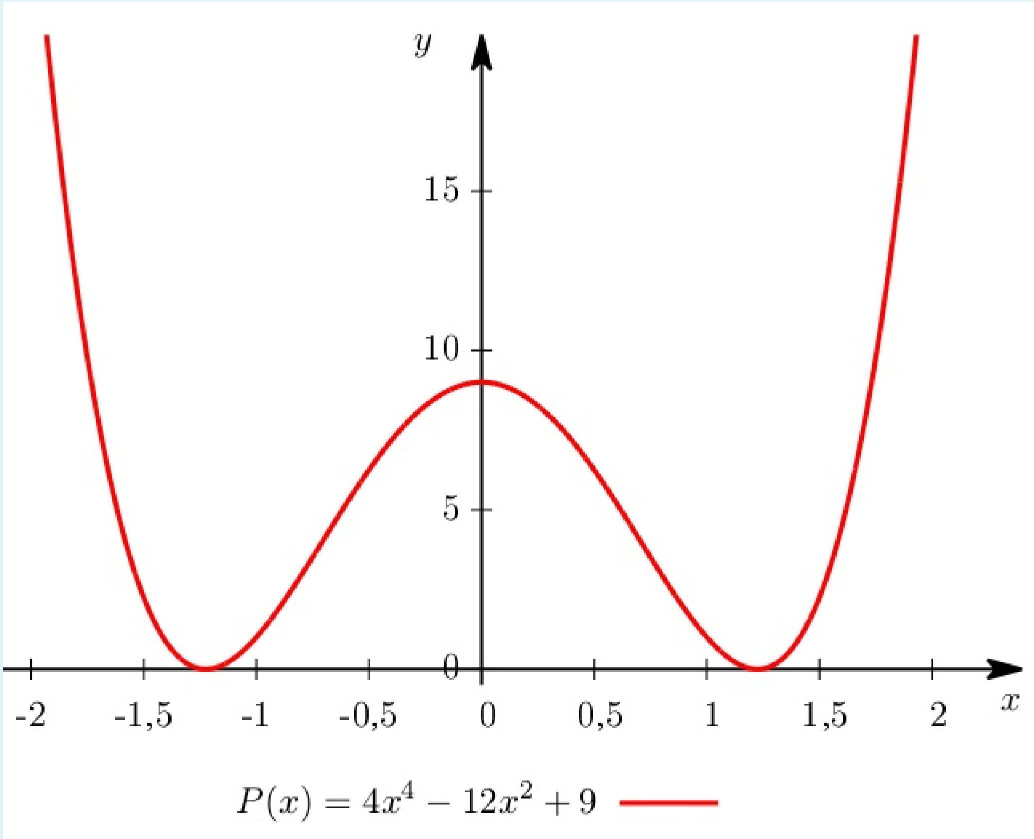


Binomische Formel

Manchmal erkennt man, dass das Polynom mit einer binomischen Formel:
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ oder $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, vereinfacht werden kann.

$$\begin{aligned} p(x) &= 4x^4 - 12x^2 + 9 \\ \\ 0 &= 4x^4 - 12x^2 + 9 \\ &= (2x^2 - 3)^2 \\ 0 &= 2x^2 - 3 \\ x &= \pm\sqrt{\tfrac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{Menge der Nullstellen} \qquad \left\{ -\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,;\ \sqrt{\tfrac{3}{2}} \right\}$$



Die nachfolgende Ergänzung stellt eine Methode vor, wie man in den Fällen, wo die oben beschriebenen Beispiele nicht zum Ziel führen, weiterrechnen kann und dennoch die Nullstellen häufig bestimmen kann. Inhaltlich führt sie aber über den eigentlichen Kurs hinaus.

Anzeigen

Nullstellen beliebiger Polynome können mit numerischen Verfahren näherungsweise berechnet werden. Dies sprengt allerdings den Rahmen dieses Kurses.

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x)$.

a) $f(x) = (4 - x^2)(2 + x^4)$

b) $f(x) = (x^2 + 2)(2x - 5)$

c) $f(x) = 3x^3 + 10x^2 - 8x$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 5x^2 + 12$

Antwort

a) $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$

b) $x_1 = \frac{5}{2}$

c) $x_1 = 0,\ x_2 = -4$ und $x_3 = \frac{2}{3}$

d) $x_1 = -\sqrt{6},\ x_2 = \sqrt{6},\ x_3 = -2$ und $x_4 = 2$

Lösung a)

Man rechne:

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (4 - x^2)(2 + x^4) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 4 - x^2 = 0 \ \text{ oder } \ 2 + x^4 = 0. \end{aligned}$$

Der Term $2 + x^4 \geq 2$ hat keine Nullstelllen.

Für $4 - x^2$ gilt $4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ oder $x = -2$.

Damit hat $f(x)$ zwei Nullstellen, nämlich $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$.

Lösung b)

Ähnlich wie in a) gilt:

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (x^2+2)(2x-5) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2+2 = 0 \ \text{ oder } \ 2x-5 = 0. \end{aligned}$$

Der Term $x^2 + 2 \geq 2$ hat keine Nullstelllen.

Für $2x - 5$ gilt $2x - 5 = 0 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

Damit hat $f(x)$ nur eine Nullstelle $x_1 = \frac{5}{2}$.

Lösung c)

Man bemerke zuerst, dass man x ausklammern kann:

$$
\begin{aligned}
& f(x) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 3x^3 + 10x^2 - 8x = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x(3x^2 + 10x - 8) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x = 0 \text{ oder } 3x^2 + 10x - 8 = 0.
\end{aligned}
$$

$x_1 = 0$ ist also eine Nullstelle von $f(x)$.

Auf den zweiten Term kann man die p-q-Formel anwenden.

$$
\begin{aligned}
& 3x^2 + 10x - 8 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 + \tfrac{10}{3}x - \tfrac{8}{3} = 0 \\
& \left(x^2 + px - q = 0, \text{ also } p = \tfrac{10}{3},\, q = -\tfrac{8}{3}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & x = -\tfrac{p}{2} \pm \sqrt{\tfrac{p^2}{4} - q}
\end{aligned}
$$

Es folgt damit

$$
\begin{aligned}
x &= -\tfrac{5}{3} \pm \sqrt{\tfrac{25}{9} + \tfrac{8}{3}} \\
&= -\tfrac{5}{3} \pm \sqrt{\tfrac{25}{9} + \tfrac{24}{9}} \\
&= -\tfrac{5}{3} \pm \sqrt{\tfrac{49}{9}} \\
&= -\tfrac{5}{3} \pm \tfrac{7}{3} \\
x &= \tfrac{2}{3} \text{ oder } x = -4.
\end{aligned}
$$

Somit hat $f(x)$ drei Nullstellen: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = -4$.

Lösung d)

Man substituiere $z := x^2$.

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \tfrac{1}{2}x^4 - 5x^2 + 12 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \tfrac{1}{2}z^2 - 5z + 12 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & z^2 - 10z + 24 = 0 \end{aligned}$$

Die Anwendung der p-q-Formel mit $p = -10,\ q = 24$ liefert:

$$\begin{aligned} z &= -\tfrac{p}{2} \pm \sqrt{\tfrac{p^2}{4} - q} \\ &= 5 \pm \sqrt{25 - 24} \\ &= 5 \pm 1. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} z_1 &= 6, \\ z_2 &= 4. \end{aligned}$$

Schließlich ist

$$z = 6 \Leftrightarrow \quad x^2 = 6 \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{6} \ \text{ oder } \ x = -\sqrt{6}$$

und

$$z = 4 \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \Leftrightarrow \quad x = 2 \text{ oder } x = -2.$$

Somit hat $f(x)$ vier verschiedene Nullstellen: $x_1 = \sqrt{6},\ x_2 = -\sqrt{6},\ x_3 = 2,\ x_4 = -2.$

ÜBUNG 2

In der Abbildung Abb 1 sind in roter, schwarzer, blauer und grüner Farbe vier Graphen von Polynomen dargestellt.

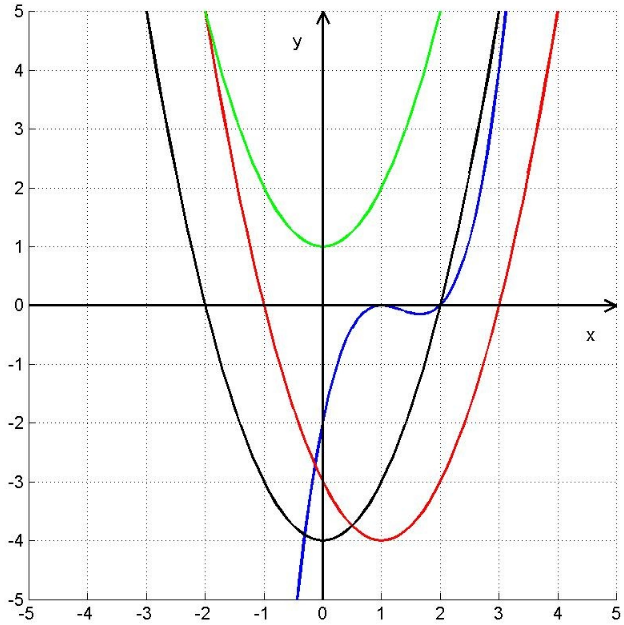


Abb 1: Die Polynomfunktionen

$$g(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

$$h(x) = (x-3)(x+1)$$

$$j(x) = x^2 + 1$$

$$k(x) = x^2 - 4$$

Ordnen Sie den vier Graphen jeweils die zugehörige Funktionsvorschrift zu.

Zuordnung der Graphen

a) $g(x)$ Der blaue Graph gehört zur Funktion $g(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

b) $h(x)$ Der rote Graph gehört zur Funktion $h(x) = (x-3)(x+1)$.

c) $j(x)$ Der grüne Graph gehört zur Funktion $j(x) = x^2 + 1$.

d) $k(x)$ Der schwarze Graph gehört zur Funktion $k(x) = x^2 - 4$.

$h(x)$

Anhand der Vorschrift $h(x) = (x-3)(x+1)$ kann man sofort die Nullstellen von $h(x)$ ablesen: $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$.

In der Abbildung sind die Nullstellen einer Funktion genau die Stellen, in denen der Graph die x-Achse schneidet.

Die einzige Funktion, die $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$ als Nullstellen hat, ist die rot dargestellte Funktion.

Also entspricht der rote Graph der Funktion $h(x)$.

$j(x)$

Die Funktion $j(x) = x^2 + 1$ ist eine um 1 entlang der y-Achse verschobene Parabel.

Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $j(x) = x^2 + 1 \geq 1$, der Funktionsgraph von $j(x)$ liegt also stets oberhalb von $y = 1$.

Außerdem gilt $j(0) = 1$, der Schnittpunkt mit der y-Achse ist also der Punkt $(0;1)$.

Nur der grüne Graph liegt oberhalb von $y = 1$ und verläuft durch den Punkt $(0;1)$.

$j(x)$ hat also den grünen Graphen.

$g(x)$

Die Funktion $g(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ hat x^3 als den führenden Term mit der höchsten Potenz, der das Verhalten im Unendlichen bestimmt.
Die Potenz 3 ist ungerade, deswegen hat x^3 folgendes Verhalten:

Für $x \to \infty$ wird der Wert von x^3 beliebig groß und für $x \to -\infty$ strebt x^3 gegen $-\infty$.

Außerdem gilt $g(0) = -2$ und man prüft leicht nach, dass $g(1) = 0$ ist.

Der einzige Graph, der dieses Verhalten aufweist ist der blaue Graph. Also ist der blaue Graph der Graph von $g(x)$.

$k(x)$

Nach der dritten binomischen Formel gilt $k(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.

Die Nullstellen von $k(x)$ sind also $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$, was die Funktion $k(x)$ eindeutig dem schwarzen Graphen zuordnet.

ÜBUNG 3

Bestimmen Sie das Verhalten von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ und in der Nähe von 0.

a) $f(x) = -3x^4 + 99x^3 - 1$

b) $f(x) = 4x^3 + 2x - 1$

Untersuchen Sie die Funktion auf Symmetrie und entscheiden Sie, ob die Funktion gerade oder ungerade ist:

c) $f(x) = x^3 - x$

d) $f(x) = x^4 - 3$

e) $f(x) = (x-2)^4$

Antwort

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$, in der Nähe von $x = 0$ nähert sich $f(x)$ der Kurve $f_1(x) = 99x^3 - 1$,

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, in der Nähe von $x = 0$ nähert sich $f(x)$ der Geraden $f_1(x) = 2x - 1$.

c) $f(x)$ ist ungerade und punktsymmetrisch zum Ursprung.

d) $f(x)$ ist gerade und achsensymmetrisch zur y-Achse.

e) $f(x)$ ist weder gerade noch ungerade und nicht symmetrisch.

Lösung a)

Der Term mit der höchsten Potenz bestimmt das Verhalten für $x \to \pm\infty$. Hier ist das $f_2(x) = -3x^4$. Die Potenz ist gerade und der Faktor davor negativ. Also gilt

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty.$$

In der Nähe von $x = 0$ bestimmt der Term mit den niedrigsten Potenzen, hier $f_1(x) = 99x^3 - 1$. Also nähert sich $f(x)$ der Kurve $f_1(x) = 99x^3 - 1$ in der Nähe von 0.

Lösung b)

Die Funktion $f(x) = 4x^3 + 2x - 1$ verhält sich im Unendlichen wie $f_2(x) = 4x^3$, also

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

In der Nähe von Null wird der Term $4x^3$ für kleine x vernachlässigbar klein, sodass sich die Funktion der Geraden $f_1(x) = 2x - 1$ annähert.

Lösung c)

$f(x) = x^3 - x$ hat nur ungerade Potenzen der Ordnung 1 und 3 und ist damit punktsymmetrisch zum Ursprung.

Es gilt

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x).$$

Die Funktion ist also ungerade.

Lösung d)

$f(x) = x^4 - 3$ hat nur gerade Potenzen der Ordnung 4 und 0 und ist damit achsensymmetrisch zur y-Achse.

$$f(-x) = (-x)^4 - 3 = x^4 - 3 = f(x)$$

Die Funktion ist also gerade.

Lösung e)

Für die Funktion $f(x)=(x-2)^4$ gilt:

$$\begin{aligned} f(2) &= (2-2)^4=(0)^4=0 \\ f(-2) &= (-2-2)^4=(-4)^4=256. \end{aligned}$$

Es ist $f(-2)\neq f(2)$ und auch $f(-2)\neq -f(2)$.

Die Funktion ist somit weder gerade noch ungerade und ist nicht symmetrisch.

ÜBUNG 4

Faktorisieren Sie die folgenden Funktionen und geben sie ihre Nullstellen an.

a) $f(x) = x^3 - 4x$

b) $f(x) = 2x^2 - 2$

c) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$

d) $f(x) = (2x^2 + 4x + 2)^2$

Antwort

a) $f(x) = x(x-2)(x+2)$; Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

b) $f(x) = 2(x-1)(x+1)$; Nullstellen $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

c) $f(x) = x^2(x-1)^2$; Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

d) $f(x) = 4(x+1)^4$; Nullstellen $x = -1$.

Lösung a)

Man klammere zuerst x aus und wende dann die dritte binomische Formel an.

$$f(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$$

$f(x)$ hat folglich die Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

Lösung b)

Ausklammern von 2 und Anwendung der dritten binomischen Formel ergibt

$$f(x) = 2x^2 - 2 = 2(x^2 - 1) = 2(x-1)(x+1).$$

Die Nullstellen von $f(x)$ sind $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$.

Lösung c)

Man klammere zuerst x^2 aus und wende dann die zweite binomische Formel an:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2\left(x^2 - 2x + 1\right) = x^2(x-1)^2$$

Die Nullstellen von $f(x)$ sind also $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$.

Lösung d)

Man erinnere sich an die erste binomische Formel und die Rechenregeln für Potenzen:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^2 + 4x + 2)^2 \\ &= \left(2\left(x^2 + 2x + 1\right)\right)^2 \\ &= 4(x^2 + 2x + 1)^2 \\ &= 4((x+1)^2)^2 \\ &= 4(x+1)^4. \end{aligned}$$

Damit hat $f(x)$ eine Nullstelle bei $x = -1$.

4. EXPONENTIALFUNKTIONEN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele:

- Sie wissen was Exponentialfunktionen sind.
- Sie verstehen wie Exponentialfunktionen mit unterschiedlichen Basen verlaufen.
- Sie können die Exponentialfunktionen graphisch darstellen.
- Sie wissen was die natürliche Exponentialfunktion zur Basis e ist.
- Es ist Ihnen möglich, die Funktionsgleichung einer Exponentialfunktion aufzustellen und sie ihrem Graphen zuzuordnen.
- Sie kennen Anwendungen der Exponentialfunktionen.

4.1 Einführung in Exponentialfunktionen

Die Funktionen $2^x, 10^x, e^x$ (wobei e die Eulersche Zahl ist) sind Beispiele von „Exponentialfunktionen", denn die Variable steht im Exponenten.

Die Funktionen

$$f(x) = a^x, \quad a > 0$$

heißen *Exponentialfunktionen*. Sie sind für alle reellen Zahlen definiert: $D_f = \mathbb{R}$. Die Zahl a heißt *Basis*.

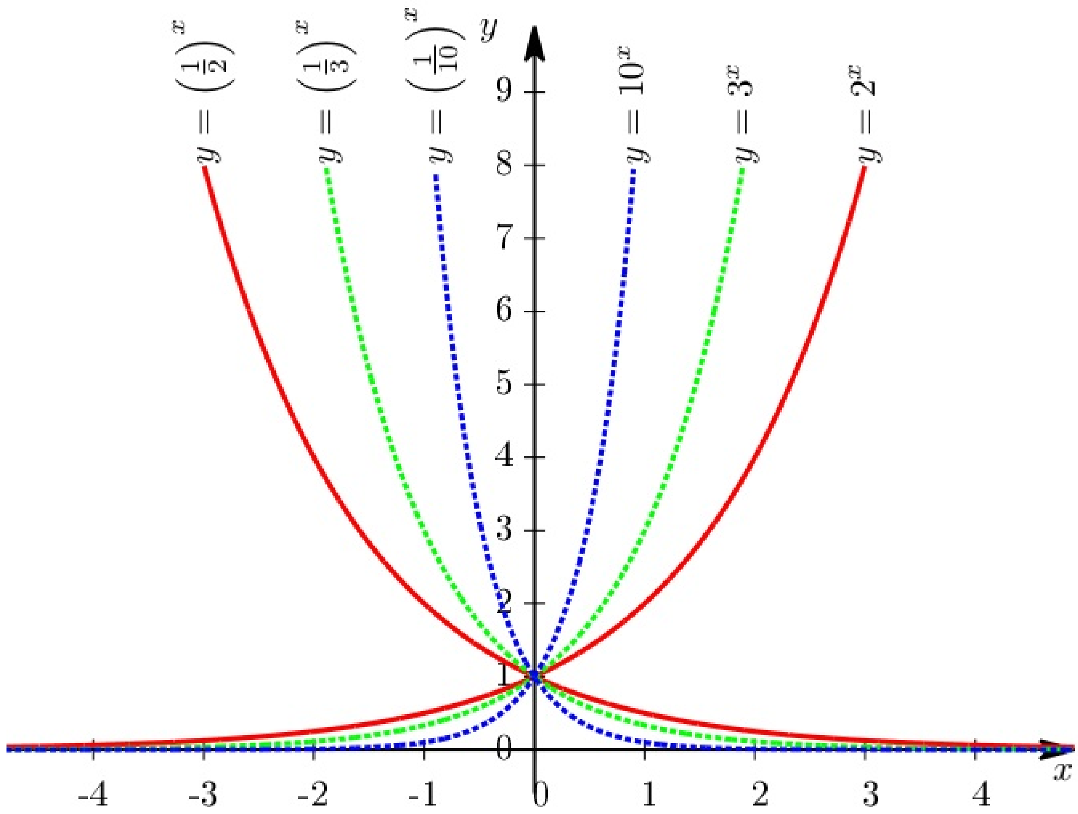
Für *rationalen Exponenten* x ist a^x bereits im Abschnitt I.6.4 Potenzen mit rationalen Exponenten in Kapitel I eingeführt worden. Um a^x für beliebige reelle Zahlen zu definieren, wären Konzepte nötig (z.B. die Stetigkeit), die den Rahmen dieses Kurses sprengen. Wir begnügen uns deshalb mit der folgenden

Beobachtung: Eine reelle Zahl x kann beliebig gut durch eine rationale Zahl $\frac{m}{n}$ angenähert werden, dann ist auch $a^{\frac{m}{n}}$ eine beliebig gute Näherung für a^x. Dies genügt für alle praktischen Zwecke.

Da $a > 0$ ist und entsprechend $f(x) = a^x$ immer positiv ist, sind die Werte jeder Exponentialfunktion positiv. Zusätzlich gilt, dass die Wertemenge jeder Exponentialfunktion (mit Ausnahme von $a = 1$) die gesamte Menge $\mathbb{R}^+$ der positiven reellen Zahlen ist, wie die Grafiken im untenstehenden Beispiel nahelegen. Der uninteressante Fall $a = 1$ mit $f(x) = 1$ für alle x wird oft ausgeschlossen.

Alle Exponentialfunktionen haben die Eigenschaft $f(0) = a^0 = 1$. Der Verlauf der Exponentialfunktionen ist von der Basis a abhängig und kann in zwei Fälle unterteilt werden, $0 < a < 1$ und $a > 1$. Im nächsten Beispiel ist der Zusammenhang von Basiswert und Verlauf der Exponentialfunktionen ersichtlich.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
3^x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$
10^x	$0{,}001$	$0{,}01$	$0{,}1$	1	10	100	1000
$\left(\frac{1}{10}\right)^x = 10^{-x}$	1000	100	10	1	$0{,}1$	$0{,}01$	$0{,}001$



$f(x) = a^x, \; a > 1$

$f(x) = a^x$	$a > 1, \quad a \in \mathbb{R}$
$D_f = \mathbb{R}$	Definitionsbereich ist die Menge aller reellen Zahlen.
$W_f = \mathbb{R}^+$	Wertemenge ist die Menge der positiven reellen Zahlen.
$f(-1) \neq -f(1), f(-1) \neq f(1)$	weder gerade, noch ungerade Funktionen.
$f(x) \neq 0$	Die Funktionen haben keine Nullstellen
$f(x_1) < f(x_2)$ für $x_1 < x_2$	Die Funktionen sind streng monoton wachsend.
Die Steigung von f nimmt ständig zu	Linkskurve

$f(x) = a^x, \; 0 < a < 1$

$f(x) = a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$	$0 < a < 1, \quad a \in \mathbb{R}$
$D_f = \mathbb{R}$	Definitionsbereich ist die Menge aller reellen Zahlen.
$W_f = \mathbb{R}^+$	Wertemenge ist die Menge der positiven reellen Zahlen.
$f(-1) \neq -f(1), f(-1) \neq f(1)$	weder gerade, noch ungerade Funktionen.
$f(x) \neq 0$	Die Funktionen haben keine Nullstellen
$f(x_1) > f(x_2)$ für $x_1 < x_2$	Die Funktionen sind streng monoton fallend.
Die Steigung von f nimmt ständig zu	Linkskurve

Jede Exponentialfunktion hat die Eigenschaft, dass die Addition der Argumente zur Multiplikation der Funktionswerte führt, dass Exponentialfunktionen also Addition und Multiplikation verbinden.

Jede Exponentialfunktion a^x mit $a > 0$ erfüllt für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2},$$

insbesondere gilt

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

Dieser Satz folgt unmittelbar aus den Potenzgesetzen, die nicht nur für rationale Potenzen sondern auch für alle reellen Potenzen gelten.

Wird das Argument einer Exponentialfunktion um einen festen Wert Δx erhöht (oder bei $\Delta x < 0$ verringert), dann wird der Funktionswert mit dem festen Faktor $a^{\Delta x}$ multipliziert:

$$f(x + \Delta x) = f(\Delta x) \cdot f(x) = a^{\Delta x} \cdot f(x).$$

Diese Eigenschaft ist wichtig für Anwendungen der Exponentialfunktionen in der mathematischen Modellbildung. Die Umkehrung, dass die Multiplikation der Argumente zur Addition der Funktionswerte führt, ist eine charakteristische Eigenschaft der Logarithmusfunktionen.

Auch die Multiplikation und Potenzierung werden durch die Exponentialfunktion verbunden. Setzt man in der Regel $x = x_1 = x_2$, so erhält man $f(2x) = f(x + x) = \left(f(x)\right)^2$. Das gilt auch für andere Faktoren als nur $c = 2$:

Jede Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ mit $a > 0$ erfüllt für alle $x, c \in \mathbb{R}$

$$f(c \cdot x) = \left(f(x)\right)^c = \left(a^c\right)^x.$$

Dass die Transformation $f(x) \longrightarrow f(cx)$ den Graphen horizontal streckt oder staucht und evtl. spiegelt, wird im Abschnitt über Transformationen erläutert und visualisiert.

4.2 Die natürliche Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion mit der Basis e heißt *natürliche Exponentialfunktion*

$$f(x) = e^x = \exp(x)$$

wobei die *Eulersche Zahl*

$$e \approx 2,718281828459$$

eine irrationale Zahl ist.

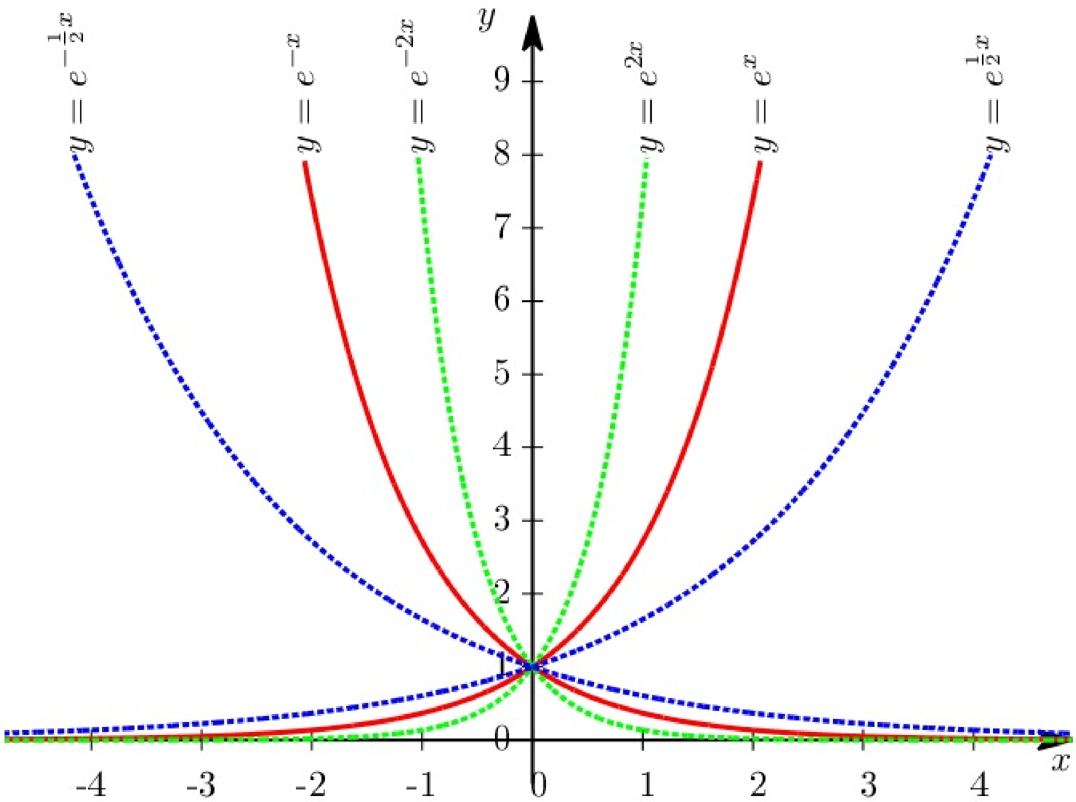
Die natürliche Exponentialfunktion ist eine der wichtigsten Funktionen der Mathematik und Naturwissenschaften. Wachstumsvorgänge und Zerfallsprozesse in der Natur werden durch sie dargestellt. Sie hat die ganz besondere Eigenschaft, dass sie mit ihrer Ableitung (siehe Abschnitt VII.3.) übereinstimmt, das heißt, dass $\left(e^x\right)' = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Das vereinfacht viele Berechnungen und Umformungen zum Beispiel beim Differenzieren und Integrieren (siehe Abschnitt VIII.2.).

Jede Exponentialfunktion kann durch die natürliche Exponentialfunktion dargestellt werden:

$$f(x) = a^x = e^{bx},$$

wobei $a = e^b$. Für $a > 1$ ist $b > 0$ und für $0 < a < 1$ ist $b < 0$.

Dass der Parameter b als $b = \ln(a)$ berechnet werden kann, wird im Abschnitt über Logarithmusfunktionen behandelt.



4.3 Anwendungen der Exponentialfunktionen

Bei der Beschreibung von Prozessen in den Natur-, Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften durch mathematische Modelle („mathematische Modellbildung") treten sehr oft Exponentialfunktionen auf, insbesondere, um den zeitlichen Verlauf wiederzugeben. Die unabhängige Variable wird dann meist mit t für die Zeit (lateinisch tempus) bezeichnet. Die Maßeinheit (z.B. Sekunden (s), Stunden (h), Tage (d) oder Jahre (a) ...) muss jeweils angegeben werden.

In einer typischen Bakterienkultur verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien etwa alle 20 Minuten (solange genug Platz und Nährlösung vorhanden ist). In einer Stunde hat sich die Anzahl dreimal verdoppelt, also verachtfacht. Wenn die Kultur am Anfang N_0 Bakterien hatte, und wenn die Zeit von da an in Stunden gemessen wird, dann hat die Kultur zu einer späteren Zeit $t > 0$

$$N(t) = N_0 \cdot 8^t \text{ Bakterien}, \quad t \text{ in Stunden}.$$

Wenn z.B. am Anfang $N_0 = 7$ Bakterien in der Kultur waren, dann erwartet man nach einer Stunde $N(1) = 7 \cdot 8^1 = 56$ Bakterien, nach 3 Stunden $N(3) = 7 \cdot 8^3 = 3.584$ Bakterien und nach 6 Stunden $N(6) = 7 \cdot 8^6 \approx 1{,}8$ Millionen Bakterien. Sie sehen daran die Grenzen eines einfachen Modells für exponentielles Wachstum. Die Modelle sind Näherungen und sie sind nur für ein begrenztes Zeitintervall eine gute Beschreibung. Wenn die Population zu groß wird, muss auch der begrenzte Platz oder Nahrungsvorrat berücksichtigt werden, der bei kleinen Populationen noch keine Rolle spielt.

In Abschnitt I.9.2 Zinsrechnung haben Sie das Wachstum eines Kapitals mit festem Zinssatz gemäß der Zinseszinsformel kennengelernt; auch dies ist ein Beispiel für exponentielles Wachstum.

Ein aufgeladener elektrischer Kondensator mit Anfangsspannung $U_0 = 20\,\mathrm{V}$ wird durch einen Widerstand entladen. Nach einer Sekunde hat er die Spannung $18\,\mathrm{V} = (\frac{9}{10}) \cdot 20\,\mathrm{V}$. Dann wird der zeitliche Verlauf der Spannung (in Volt) durch

$$U(t) = U_0 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^t, \qquad t \text{ in Sekunden (s)},$$

beschrieben. Nach $2{,}5$ Sekunden ist die Spannung auf $U(2{,}5) = 20\,\mathrm{V} \cdot (\frac{9}{10})^{2{,}5} \approx 15{,}4\,\mathrm{V}$ abgefallen, nach $10\,\mathrm{s}$ auf $U(10) = 20\,\mathrm{V} \cdot (\frac{9}{10})^{10} \approx 7\,\mathrm{V}$ und nach einer Minute auf $U(60) = 20\,\mathrm{V} \cdot (\frac{9}{10})^{60} \approx 0{,}04\,\mathrm{V}$.

Ein anderes Beispiel für exponentielles Abklingen ist der radioktive Zerfall. Die *Halbwertszeit* gibt die Zeitdauer an, nach der die Hälfte der Atomkerne einer radioaktiven Substanz zerfallen sind.

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Bestimmen Sie die Gleichung der Exponentialfunktion vom Typ $f(x) = c \cdot a^x,\ a > 0$, die durch die folgenden Punkte verläuft:

a) $(2;\ 1)$ und $(3;\ 6)$

b) $(1;\ 5)$ und $(4;\ 40)$

c) $(1;\ -\frac{2}{3})$ und $(-1;\ -6)$

Antwort

a) $f(x) = \frac{1}{36} \cdot 6^x$

b) $f(x) = \frac{5}{2} \cdot 2^x$

c) $f(x) = -2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Lösung a)

Nach Voraussetzung müssen die Gleichungen

$$1 = f(2) = c \cdot a^2,$$
$$6 = f(3) = c \cdot a^3$$

erfüllt sein.

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $a \neq 0$ und erhalten

$$a = c \cdot a^3,$$
$$6 = c \cdot a^3,$$

also

$$a = c \cdot a^3 = 6.$$

Um c zu bestimmen, lösen wir die erste Gleichung nach c auf, also $c = a^{-2} = 6^{-2} = \frac{1}{36}$. Insgesamt ist die Lösung damit $f(x) = \frac{1}{36} \cdot 6^x$.

Lösung b)

Nach Voraussetzung müssen die Gleichungen

$$5 = f(1) = c \cdot a^1,$$
$$40 = f(4) = c \cdot a^4$$

erfüllt sein.

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $a^3 \neq 0$ und erhalten

$$5a^3 = c \cdot a^4,$$
$$40 = c \cdot a^4,$$

also

$$5a^3 = c \cdot a^4 = 40.$$

Dies ist äquivalent zu $a^3 = 8$, also $a = 2$.

Um c zu bestimmen, lösen wir die erste Gleichung nach c auf, also $c = 5 \cdot a^{-1}$. Mit dem Ergebnis $a = 2$ folgt $c = 5 \cdot a^{-1} = \frac{5}{2}$.
Es ergibt sich die Lösung $f(x) = \frac{5}{2} \cdot 2^x$.

Lösung c)

Nach Voraussetzung müssen die Gleichungen

$$\begin{aligned} -\tfrac{2}{3} &= f(1) = c \cdot a, \\ -6 &= f(-1) = c \cdot a^{-1} \end{aligned}$$

erfüllt sein.

Wir multiplizieren die zweite Gleichung mit $a^2 \neq 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} -\tfrac{2}{3} &= c \cdot a, \\ -6a^2 &= c \cdot a, \end{aligned}$$

also

$$-\frac{2}{3} = c \cdot a = -6a^2,$$

woraus folgt:

$$a^2 = \frac{\frac{2}{3}}{-6} = \frac{1}{9}, \qquad a = \frac{1}{3} > 0.$$

Um c zu bestimmen, lösen wir die zweite Gleichung nach c auf, also $c = -6a = \frac{-6}{3} = -2$. Insgesamt ist die Lösung damit $f(x) = -2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

ÜBUNG 2

Eine sich schnell zersetzende Substanz ist zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Stoffmenge $N_0 > 0$ vorhanden. Es ist bekannt, dass sich die Stoffmenge der Substanz nach t Stunden mittels der Funktion $N(t) = N_0 a^{-t}$ mit $a \in \mathbb{R}$ beschreiben lässt.

a) Man hat festgestellt, dass sich die Menge der Substanz nach jeder

Viertelstunde halbiert hat. Bestimmen Sie den Parameter a.

b) Geben Sie die Funktionsvorschrift an, welche die Stoffmenge der Substanz

nach t Stunden beschreibt, wenn die Anfangsmenge $N_0 = 256$ ml beträgt.

Berechnen Sie die Menge der Substanz nach 4 Stunden.

Antwort

a) $a = 16$

b) $N(t) = 256 \cdot 16^{-t}$ und $N(4) = \frac{1}{256} \approx 0{,}0039 \text{ ml.}$

Lösung a)

$N(t)$ bezeichnet die Stoffmenge der Substanz, welche nach t Stunden noch vorhanden ist.

Dass die Substanz sich nach je einer Viertelstunde halbiert, bedeutet $N(t+\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}N(t)$ für alle $t > 0$.

Man setzt die Vorschrift für $N(t)$ in diese Gleichung ein:

$$\begin{aligned} & N(t+\tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{2}N(t) \\ \Leftrightarrow \quad & N_0 a^{-(t+\frac{1}{4})} = \tfrac{1}{2}N_0 a^{-t}. \end{aligned}$$

Dividieren durch N_0 und Anwenden der Potenzgesetze liefert

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & a^{-(t+\frac{1}{4})} = \tfrac{1}{2}a^{-t} \\ \Leftrightarrow \quad & a^{-t-\frac{1}{4}} \cdot a^t = \tfrac{1}{2}a^{-t} \cdot a^t \\ \Leftrightarrow \quad & a^{-t-\frac{1}{4}+t} = \tfrac{1}{2}a^{-t+t} \\ \Leftrightarrow \quad & a^{-\frac{1}{4}} = \tfrac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & \left(a^{-\frac{1}{4}}\right)^4 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 \\ \Leftrightarrow \quad & a^{-\frac{1}{4}\cdot 4} = \tfrac{1^4}{2^4} \\ \Leftrightarrow \quad & a^{-1} = \tfrac{1}{16} \\ \Leftrightarrow \quad & a = 16 \end{aligned}$$

Also ist der Parameter $a = 16$.

Lösung b)

Wir setzen in die gegebene Funktionsvorschrift

$$N(t) = N_0 a^{-t} \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

den gegebenen Wert $N_0 = 256$ und den berechneten Parameter $a = 16$ ein.

So ist die Menge der Substanz nach t Stunden gleich

$$N(t) = 256 \cdot 16^{-t}.$$

Damit lässt sich leicht berechnen, wie viel Substanz zum Zeitpunkt t verbleibt. Z.B. ist nach $t = 4$ Stunden

$$N(4) = 256 \cdot 16^{-4} = 2^8 \cdot (2^4)^{-4} = 2^8 \cdot 2^{-16} = 2^{-8} = \frac{1}{256} \approx 0{,}0039 \text{ ml.}$$

ÜBUNG 3

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Exponentialgleichungen *ohne* Verwendung des Logarithmus.

a) $3^x - 4 \cdot 3^{x-2} = 15$

b) $(7^x)^{2x-4} = \left(7^{x+4}\right)^{x-2}$

Antwort

a) $\mathbb{L} = \{3\}$

b) $\mathbb{L} = \{2;\, 4\}$

Lösung a)

Man erinnere sich zunächst an die Rechenregeln für Potenzen.

Mit der Regel $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ schreibt man die Gleichung zunächst um zu

$$3^x - 4 \cdot 3^x \cdot 3^{-2} = 15.$$

Ausklammern des gemeinsamen Faktors 3^x auf der linken Seite ergibt

$$3^x \cdot \left(1 - 4 \cdot \frac{1}{9}\right) = 15,$$

und damit

$$3^x \cdot \frac{5}{9} = 15.$$

Man dividiert dann beide Seiten durch $\frac{5}{9}$ und erhält

$$3^x = 27 = 3^3,$$

also $x = 3$ durch Exponentenvergleich.

Lösung b)

Unter Berücksichtigung der Regel $(a^x)^y = a^{xy}$ schreibt man die Gleichung zunächst um zu

$$7^{x\cdot(2x-4)} = 7^{(x+4)\cdot(x-2)}.$$

Durch Exponentenvergleich ist dies äquivalent zu der quadratischen Gleichung

$$x\cdot(2x-4) = (x+4)\cdot(x-2).$$

Man formt diese Gleichung um:

$$\begin{aligned} & x\cdot(2x-4) = (x+4)\cdot(x-2) \\ \Leftrightarrow\quad & 2x^2-4x = x^2+4x-2x-8 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2-6x+8=0 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der p-q-Formel bestimmt man die Lösungsmenge dieser Gleichung

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\tfrac{p}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}, \\ x_1 &= -\tfrac{-6}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(-6)^2-4\cdot 8} = 3+\tfrac{1}{2}\sqrt{4} = 4, \\ x_2 &= -\tfrac{-6}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(-6)^2-4\cdot 8} = 3-\tfrac{1}{2}\sqrt{4} = 2. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist also

$$\mathbb{L} = \{2;\,4\}.$$

ÜBUNG 4

In der Abbildung Abb 1 sind in roter, schwarzer, blauer und grüner Farbe die Graphen von Exponentialfunktionen dargestellt.

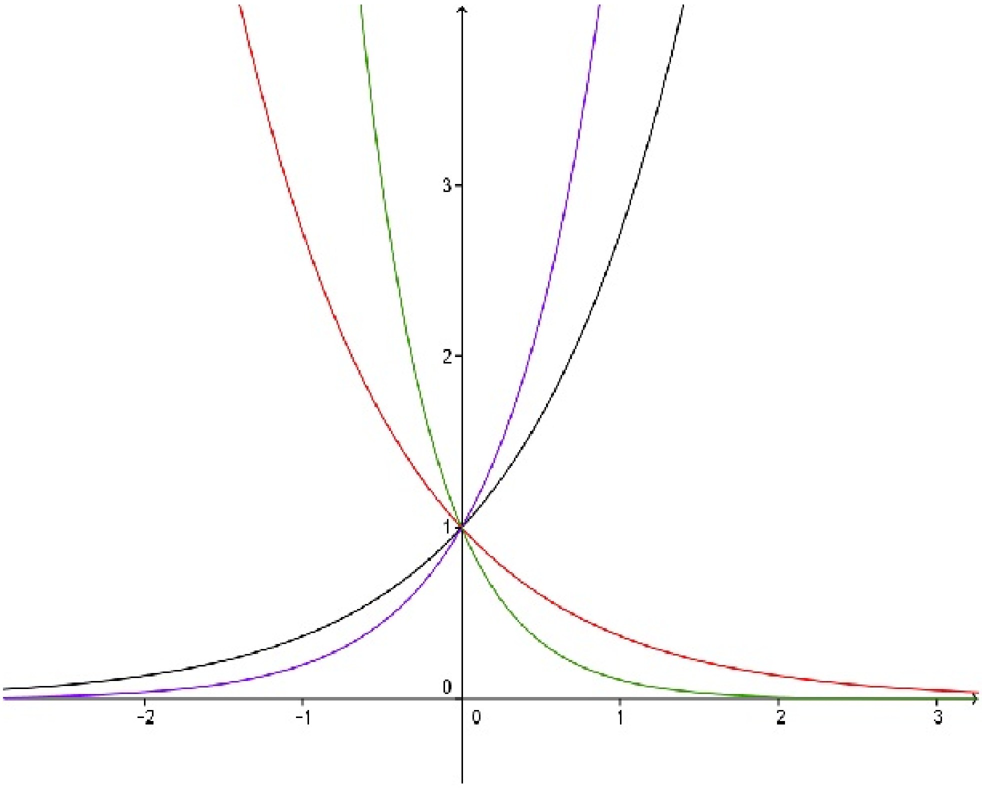


Abb 1: Exponentialfunktionen

$$g(x) = \exp(x)$$

$$h(x) = \exp(-x)$$

$$j(x) = 5^x$$

$$k(x) = 9^{-x}$$

Ordnen Sie die vier Graphen jeweils der zugehörigen Funktionsvorschrift zu.

Zuordnung der Graphen

a) $g(x)$ Der schwarze Graph gehört zur Funktion $g(x) = \exp(x)$.

b) $h(x)$ Der rote Graph gehört zur Funktion $h(x) = \exp(-x)$.

c) $j(x)$ Der blaue Graph gehört zur Funktion $j(x) = 5^x$.

d) $k(x)$ Der grüne Graph gehört zur Funktion $k(x) = 9^{-x}$.

Schwarzer Graph

Die Funktion $g(x) = \exp(x)$ ist die klassische Exponentialfunktion.

Sie verläuft streng monoton steigend.

Es gilt stets für alle Exponentialfunktionen $g(0) = 1$ und hier $g(1) = e \approx 2{,}7181$.

Grüner Graph

Die Funktion $k(x) = 9^{-x}$ entspricht dem grünen Graphen.

Sie verläuft streng monoton fallend.

Es gilt stets für alle Exponentialfunktionen $k(0) = 1$ und hier $k(-1) = 9$.

Blauer Graph

Die Funktion $j(x) = 5^x$ entspricht dem blauen Graphen.

Sie verläuft streng monoton steigend.

Es gilt stets für alle Exponentialfunktionen $j(0) = 1$ und hier $j(1) = 5$.

Roter Graph

Die Funktion $h(x) = \exp(-x)$ ist die gespiegelte Exponentialfunktion.

Sie verläuft streng monoton fallend.

Es gilt stets für alle Exponentialfunktionen $h(0) = 1$ und hier $h(-1) = e \approx 2{,}7181$.

5. LOGARITHMUSFUNKTIONEN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele:

- Sie verstehen den Begriff und die grundlegenden Eigenschafen des Logarithmus.
- Sie kennen die Bedeutung der Basis von Logarithmen.
- Sie können erklären, wie die Graphen der Logarithmusfunktionen mit unterschiedlichen Basen verlaufen.
- Sie können Logarithmen mit unterschiedlichen Basen ineinander umrechen.
- Sie kennen die Rechenregeln für Logarithmen und können damit Exponential- und Logarithmusgleichungen umformen und lösen.

5.1 Einführung der Logarithmen

Die Frage, wie zu einer positiven Zahl a und einer reellen Zahl s die Potenz $u = a^s$ zu definieren ist, hat uns zu den Exponentialfunktionen geführt. Die umgekehrte Frage, wie zu einer Zahl a und einer Zahl u ein Exponent s berechnet wird, so dass wiederum die Gleichung $u = a^s$ erfüllt ist, führt zu neuen Funktionen, den Logarithmen. Beachten Sie, dass hier und im Folgenden der Fall $a = 1$ ausgeschlossen werden muss, weil für $a = 1$ die Exponentialfunktion nur den einzigen Wert 1 annimmt. Deshalb gibt es für diesen Fall keine Logarithmusfunktion.

Logarithmusfunktionen können definiert werden, weil es für $u > 0$ genau einen Exponenten s gibt so, dass die Gleichung $u = a^s$ gilt. Für dieses s schreiben wir dann $s = \log_a(u)$. Dass es genau einen Exponenten s gibt mit diesen Eigenschaften, folgt wiederum aus zwei fundamentalen Eigenschaften aller Exponentialfunktionen mit positiver Basis a und $a \neq 1$: Sie sind streng monoton und ihre Wertemengen sind gleich der Menge der positiven Zahlen.

Für $u \leq 0$ gibt es keinen Exponenten s, so dass die Gleichung $u = a^s$ erfüllt ist, denn alle Potenzen einer positiven Zahl sind positiv, d.h. der Logarithmus ist nur für positive u definiert.

Zu vorgegebenen Zahlen $a > 0,\ a \neq 1$, und $u > 0$ ist der *Logarithmus* $\log_a(u)$ *von* u *zur Basis* a die eindeutig bestimmte Zahl s, so dass die Gleichung $a^s = u$ gilt:

$$\log_a(u) = s \quad \Leftrightarrow \quad a^s = u.$$

a heißt *Basis*.

$$\begin{aligned}
2^3 &= 8 &\Leftrightarrow\quad& \log_2(8) = 3 \\
4^{\frac{1}{2}} &= 2 &\Leftrightarrow\quad& \log_4(2) = \tfrac{1}{2} \\
\left(\tfrac{1}{3}\right)^{-2} &= 9 &\Leftrightarrow\quad& \log_{\frac{1}{3}}(9) = -2 \\
10^4 &= 10\,000 &\Leftrightarrow\quad& \log_{10}(10\,000) = 4 \\
10^{-3} &= \tfrac{1}{1\,000} &\Leftrightarrow\quad& \log_{10}\left(\tfrac{1}{1\,000}\right) = -3 \\
2^{-\frac{1}{2}} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} &\Leftrightarrow\quad& \log_2\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

Unmittelbar aus der Definition des Logarithmus folgen für alle Basen $a > 0,\ a \neq 1$, die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\log_a(a^s) &= s\,, \quad s \in \mathbb{R}, \\
a^{\log_a(u)} &= u\,, \quad u > 0.
\end{aligned}$$

Für häufig vorkommende Basen gibt es gesonderte Bezeichnungen.

$$\begin{aligned}
\log_{10}(u) &= \lg(u) \qquad && \text{Zehnerlogarithmus, dekadischer Logarithmus} \\
\log_e(u) &= \ln(u) \qquad && \text{natürlicher Logarithmus}
\end{aligned}$$

$\log(u)$ (ohne Basisangabe) wird gebraucht, wenn die Basis aus dem Zusammenhang bekannt ist oder in dem Anwendungsgebiet üblich. Auf Taschenrechnern und in den Ingenieurwissenschaften ist mit $\log(u)$ meist der Zehnerlogarithmus gemeint.

5.2 Rechenregel für Logarithmen

Es gibt eine Reihe einfacher Rechenregeln für die Logarithmen, die unmittelbar aus den Potenzgesetzen für Exponentialfunktionen folgen. Von der Diskussion der Exponetialfunktionen wissen Sie, dass sich bei der Multiplikation zweier Potenzen mit der gleichen Basis $a > 0$ die Exponenten addieren. Daraus ergeben sich die folgenden beiden Anwendungen, die wir am Beispiel des Logarithmus zur Basis 2 erläutern, die aber analog für jeden Logarithmus gelten:

$$\begin{aligned}
\log_2(2^3) &= 3 \\
\log_2(2^5) &= 5 \\
\log_2(2^3 \cdot 2^5) = \log_2(2^{3+5}) &= 3+5 = \log_2(2^3) + \log_2(2^5) \\
\log_2\left(\frac{2^3}{2^5}\right) = \log_2\left(2^{3-5}\right) &= 3-5 = \log_2(2^3) - \log_2(2^5)
\end{aligned}$$

Der Logarithmus verbindet die Multiplikation mit der Addition, indem er das Produkt der Argumente in die Summe der Funktionswerte überführt. Dies ist gerade die Umkehrung des Verhaltens von Exponentialfunktionen, bei denen die Summe der Argumente zum Produkt der Funktionswerte führt. Genauso ergibt sich für den Quotienten zweier Potenzen, dass sich der neue Exponent als Differenz ergibt. Wir fassen diese Gesetze zusammen:

Für $u, v > 0$:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{a)} & \log_a(u \cdot v) & = & \log_a(u) + \log_a(v), \\
\text{b)} & \log_a\left(\frac{u}{v}\right) & = & \log_a(u) - \log_a(v), \quad \text{insbesondere gilt} \\
& \log_a\left(\frac{1}{v}\right) & = & -\log_a(v).
\end{array}
$$

Beweis a)

$$
\begin{array}{lrcl}
& \log_a(u) & = & s \Leftrightarrow a^s = u \\
\text{und} & & & \\
& \log_a(v) & = & t \Leftrightarrow a^t = v \\
& & & \\
& \log_a(u \cdot v) & = & \log_a(a^s \cdot a^t) \\
& & = & \log_a(a^{s+t}) = s + t \\
& & & \\
& & = & \log_a(u) + \log_a(v)
\end{array}
$$

Beweis b)

$$
\begin{array}{lrcl}
& \log_a(u) & = & s \Leftrightarrow a^s = u \\
\text{und} & & & \\
& \log_a(v) & = & t \Leftrightarrow a^t = v \\
& & & \\
& \log_a\left(\frac{u}{v}\right) & = & \log_a\left(\frac{a^s}{a^t}\right) \\
& & = & \log_a(a^{s-t}) = s - t \\
& & & \\
& & = & \log_a(u) - \log_a(v)
\end{array}
$$

Multiplikationstheorem:

Beispiel 1

$$\begin{aligned}\log_3(2) + \log_3(4,5) &= \log_3(2 \cdot 4,5)\\ &= \log_3(9)\\ &= 2\end{aligned}$$

Beispiel 2

$$\begin{aligned}\log_e(2e^5) &= \ln(2e^5)\\ &= \ln 2 + \ln e^5\\ &= \ln(2) + 5\end{aligned}$$

Beispiel 3

Für $-5 < x < 5$ gilt

$$\begin{aligned}\log_{10}(5-x) + \log_{10}(5+x) &= \lg(5-x) + \lg(5+x)\\ &= \lg\left((5-x)\cdot(5+x)\right)\\ &= \lg(25-x^2).\end{aligned}$$

Beispiel 4

Für $x > 3$

$$\begin{aligned}\log_e(x^2-6x+9) - \log_e(x-3) &= \ln\left(\tfrac{x^2-6x+9}{x-3}\right)\\ &= \ln\left(\tfrac{(x-3)^2}{x-3}\right)\\ &= \ln(x-3).\end{aligned}$$

Die Regel zur Potenzierung der Exponentialfunktion überträgt sich auch in eine Regel für Logarithmen, diese verbindet Potenzierung und Multiplikation.

Für alle reellen Zahlen t und alle natürlichen Zahlen n gelten die Regeln:

$$\begin{aligned} a) \quad \log_a(u^t) &= t \log_a(u) \\ b) \quad \log_a(\sqrt[n]{u}) &= \frac{1}{n} \cdot \log_a(u) \end{aligned}$$

Beweis a)

$$\begin{aligned} \log_a(u) &= s \Leftrightarrow u = a^s \\ u^t &= (a^s)^t = a^{s \cdot t} \\ \log_a(u^t) &= s \cdot t = t \cdot \log_a(u) \end{aligned}$$

Beweis b)

$$\log_a(\sqrt[n]{u}) = \log_a(u^{\frac{1}{n}}),$$

aus $a)$ folgt:

$$\Leftrightarrow \log_a(\sqrt[n]{u}) = \frac{1}{n} \log_a(u).$$

Potenzregel:

Beispiel 1

$$\begin{aligned}\log_5\left(\frac{1}{125^3}\right) &= \log_5(125^{-3}) \\ &= -3\log_5(125) \\ &= -3\log_5(5^3) \\ &= -3\cdot 3\log_5(5) \\ &= -9\end{aligned}$$

Beispiel 2

$$\begin{aligned}\log_2\left(\sqrt{2}^{\,5}\right) &= \log_2\left(2^{\frac{5}{2}}\right) \\ &= \frac{5}{2}\log_2(2) \\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

5.3 Das Transformationsgesetz

Logarithmen zu zwei verschiedenen Basen können in einander umgerechnet werden. Wir erklären dies zuerst an einem einfachen Beispiel und berechnen dazu den Logarithmus der Zahl 64 zu den Basen 2 und 4.

$$64 = 2^6 = 4^3$$

Daraus können Sie sogleich ablesen, dass $\log_2(64) = 6$ und $\log_4(64) = 3$ ist. Ferner ist $\log_2(4) = \log_2(2^2) = 2$. Sie stellen fest: $\log_4(64) = \frac{\log_2(64)}{\log_2(4)}$.

Dieses Verfahren kann verallgemeinert werden und führt auf das folgende Transformationsgesetz bei Änderung der Basis:

Für $a, b, u > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1$ gilt

$$\log_b(u) \quad = \quad \frac{\log_a(u)}{\log_a(b)}.$$

Beweis

Multiplikation mit $\log_a(b)$ ergibt die äquivalente Gleichung:

$$\log_b(u)\log_a(b) \quad = \quad \log_a(u),$$

die wir jetzt folgendermassen beweisen:

$$\begin{aligned}
1)\quad \log_a(u) = s \;&\Leftrightarrow\; a^s = u \\
2)\quad \log_a(b) = t \;&\Leftrightarrow\; a^t = b \\
3)\quad \log_b(u) = k \;&\Leftrightarrow\; b^k = u
\end{aligned}$$

$$k \cdot t = s \qquad \text{ist zu zeigen,}$$

$$\text{aus 1) und 3) folgt} \qquad a^s = b^k$$

$$\begin{aligned}
\text{und mit 2) folgt} \qquad a^s &= (a^t)^k = a^{t\cdot k} \\
&\Longrightarrow k \cdot t = s\,.
\end{aligned}$$

Transformationsgesetz:

Beispiel 1

$$\begin{aligned}\log_3(\mathrm{e}^x) &= \frac{\ln e^x}{\ln(3)}\\ &= \frac{x}{\ln(3)}\end{aligned}$$

Beispiel 2

Für $x > -2$

$$\begin{aligned}\log_3(x+2)+\log_5(x+2) &= \log_3(x+2)+\frac{\log_3(x+2)}{\log_3(5)}\\ &= \log_3(x+2)\left(1+\frac{1}{\log_3(5)}\right).\end{aligned}$$

5.4 Logarithmusfunktionen

Wie in Definition 1 festgelegt, ist der Logarithmus $\log_a(x)$ bei vorgegebener Basis $a > 0$, $a \neq 1$, und $x > 0$ die Zahl s, sodass $a^s = x$. Weil es genau eine solche Zahl s gibt, kann man $s = \log_a(x)$ als Funktion der Variablen x auffassen, dies führt auf folgende Definition.

Die Funktion mit der Funktionsgleichung

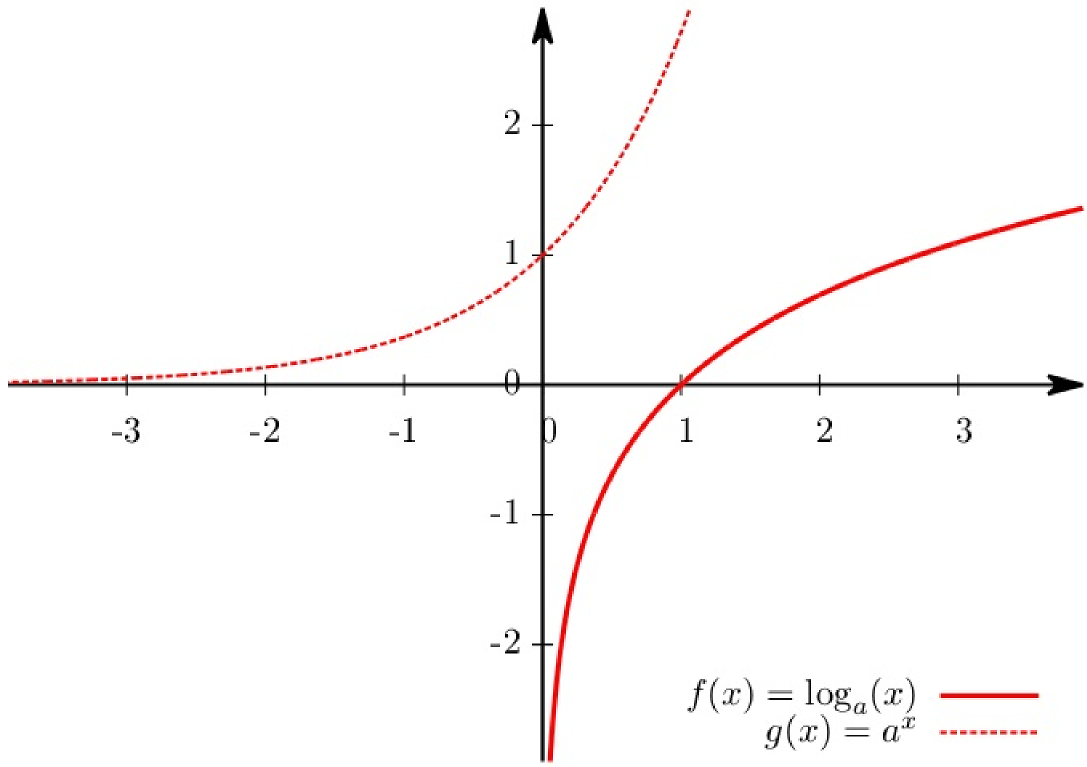
$$f(x) = \log_a(x), \quad x > 0,$$

wobei $a > 0,\ a \neq 1$ ist, heißt *Logarithmusfunktion* zur Basis a.

Ihr Definitionsbereich ist die Menge der positiven reellen Zahlen, $D_{\log_a} = \mathbb{R}^+$, und die Wertemenge umfasst alle reellen Zahlen, $W_{\log_a} = \mathbb{R}$.

Die Logarithmusfunktion zur Basis $a > 0,\ a \neq 1$ ist die *Umkehrfunktion* der Exponentialfunktion mit derselben Basis.

Der Graph der Logarithmusfunktion und der entsprechenden Exponentialfunktion zu derselben Basis $a > 1$:



Alle Logarithmusfunktionen haben dieselbe Nullstelle $x = 1$, denn $a^0 = 1$.

Den qualitativen Verlauf der Logarithmusfunktionen können Sie aus der Definition, den allgemeinen Eigenschaften des Logarithmus und der folgenden Wertetabelle ersehen.

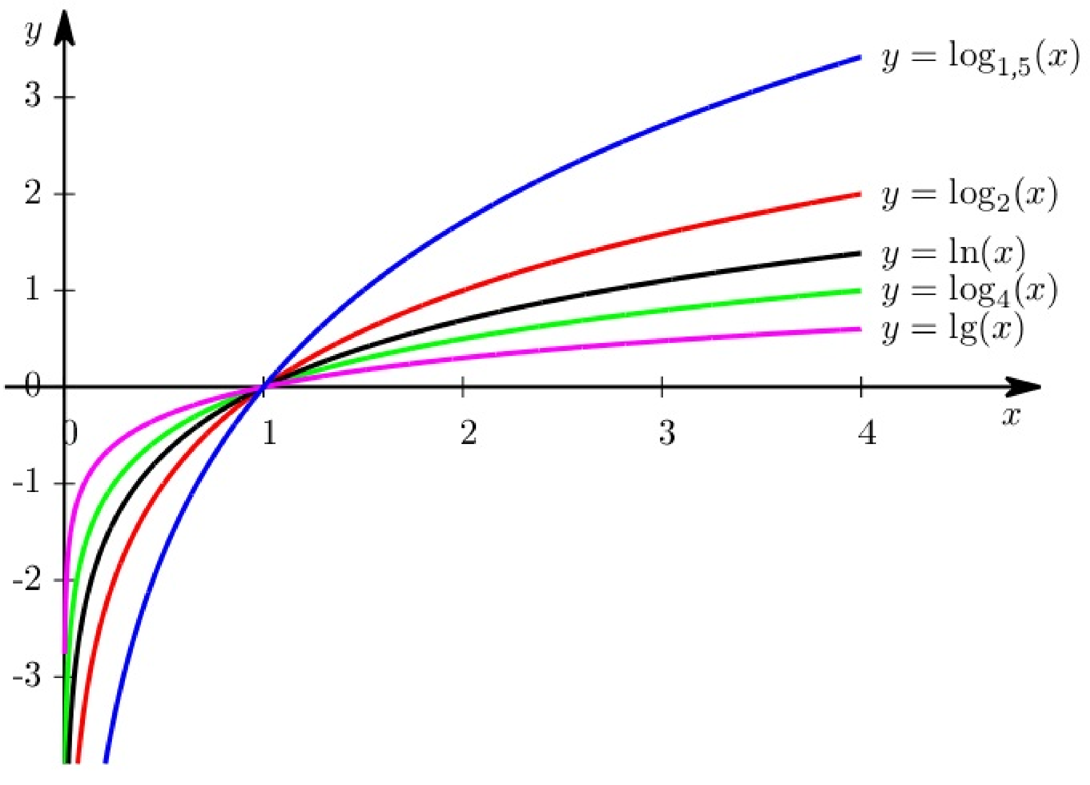
Logarithmusfunktionen:

$$f(x) = \log_a(x) \quad \Leftrightarrow \quad a^{f(x)} = x$$

a>1

Wertetabelle (mit zum Teil gerundeten Werten):

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$\log_{1,5}(x)$	$-5{,}1$	$-3{,}4$	$-1{,}7$	0	$1{,}7$	$2{,}7$	$3{,}4$
$\log_2(x)$	-3	-2	-1	0	1	$1{,}6$	2
$\ln(x)$	$-2{,}1$	$-1{,}4$	$-0{,}7$	0	$0{,}7$	$1{,}1$	$1{,}4$
$\log_4(x)$	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	$0{,}8$	1
$\lg(x)$	$-0{,}9$	$-0{,}6$	$-0{,}3$	0	$0{,}3$	$0{,}48$	$0{,}6$

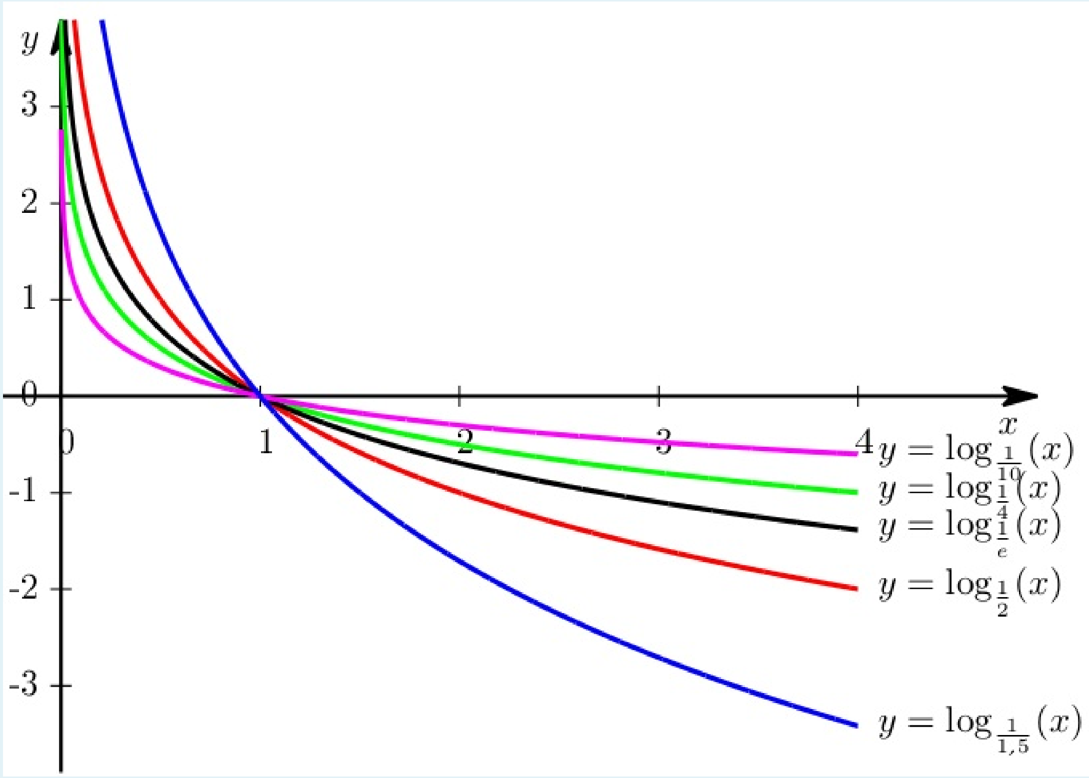


$f(x) = \log_a(x)$	$a > 1, \quad a \in \mathbb{R}$
$D_f = \mathbb{R}^+$	Definitionsbereich ist die Menge der positiven Zahlen.
$W_f = \mathbb{R}$	Wertemenge ist die Menge der reellen Zahlen.
$f(1) = 0$	$x = 1$ ist die einzige Nullstelle
$f(x_1) < f(x_2)$ für $x_1 < x_2$	Die Funktionen sind streng monoton wachsend.
Die Steigung von f nimmt ständig ab	Rechtskurve
für $x \to 0$ geht $\log_a(x) \to -\infty$	y-Achse ist Asymptote

0<a<1

Wertetabelle (mit zum Teil gerundeten Werten):

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$\log_{\frac{1}{1,5}}(x)$	$5{,}1$	$3{,}4$	$1{,}7$	0	$-1{,}7$	$-2{,}7$	$-3{,}4$
$\log_{\frac{1}{2}}(x)$	3	2	1	0	-1	$-1{,}6$	-2
$\log_{\frac{1}{e}}(x)$	$2{,}1$	$1{,}4$	$0{,}7$	0	$-0{,}7$	$-1{,}1$	$-1{,}4$
$\log_{\frac{1}{4}}(x)$	$1{,}5$	1	$0{,}5$	0	$-0{,}5$	$-0{,}8$	-1
$\log_{\frac{1}{10}}(x)$	$0{,}9$	$0{,}6$	$0{,}3$	0	$-0{,}3$	$-0{,}48$	$-0{,}6$



$f(x) = \log_a(x)$	$0 < a < 1, \qquad a \in \mathbb{R}$
$D_f = \mathbb{R}^+$	Definitionsbereich ist die Menge der positiven Zahlen.
$W_f = \mathbb{R}$	Wertemenge ist die Menge der reellen Zahlen.
$f(1) = 0$	$x = 1$ ist die einzige Nullstelle
$f(x_1) > f(x_2)$ für $x_1 < x_2$	Die Funktionen sind streng monoton fallend.
Die Steigung von f nimmt ständig zu	Linkskurve
für $x \to 0$ geht $\log_a(x) \to \infty$	y-Achse ist Asymptote

5.5 Exponential- und Logarithmusgleichungen

Die Definition der Potenzen und Logarithmen bzw. der zugehörigen Funktionen liefern direkt einen Weg, um Gleichungen mit Potenzen bzw. Logarithmen zu lösen. Sowohl die Exponentialfunktionen als auch die Logarithmusfunktionen sind streng monoton wachsend oder fallend. Daher gelten für alle $a > 0,\ a \neq 1$ die wichtigen Äquivalenzen

$$\begin{array}{rcl} a^{x_1} &=& a^{x_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \quad \text{für } x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \\ \log_a(x_1) &=& \log_a(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \quad \text{für } x_1, x_2 > 0. \end{array}$$

Lösung von Potenzgleichungen für $a, u > 0$:

$$\begin{array}{rlcl} & a^x = u & | & \log_a \\ \Leftrightarrow & \log_a(a^x) = \log_a(u) & & \\ \Leftrightarrow & x = \log_a(u)\,. & & \end{array}$$

Lösung von Logarithmusgleichungen für $a, x > 0$:

$$\begin{array}{rlcl} & \log_a(x) = u & | & a^{(\cdot)} \\ \Leftrightarrow & a^{\log_a(x)} = a^u & & \\ \Leftrightarrow & x = a^u\,. & & \end{array}$$

Die Rechenregeln für Logarithmen und für Potenzen helfen, Potenz- und Logarithmusgleichungen umzuformen, um die Gleichungen zu vereinfachen und zu lösen.

Exponentialgleichungen:

Beispiel 1

$$\begin{aligned} e^{2x+3} = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln e^{2x+3} = \ln 4 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x+3 = \ln 4 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}(\ln(4)-3) \end{aligned}$$

Beispiel 2

Für $b > 0,\ b \neq 1$:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{b^{x-a}} = \sqrt[5]{b^{x+a}} \quad &\Leftrightarrow \quad b^{\frac{x-a}{4}} = b^{\frac{x+a}{5}} \\ &\Leftrightarrow \quad \log_b(b^{\frac{x-a}{4}}) = \log_b(b^{\frac{x+a}{5}}) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x-a}{4} = \frac{x+a}{5} \\ &\Leftrightarrow \quad 5(x-a) = 4(x+a) \\ &\Leftrightarrow \quad 5x-5a = 4x+4a \\ &\Leftrightarrow \quad x = 9a\,. \end{aligned}$$

Beispiel 3

$$\begin{aligned} \left(2^{3-x}\right)^{2-x} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2^{(3-x)(2-x)} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \log_2\left(2^{(3-x)(2-x)}\right) = \log_2(1) \\ &\Leftrightarrow \quad (3-x)(2-x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 3 \quad \text{oder} \quad x = 2 \end{aligned}$$

Logarithmusgleichungen:

Beispiel 1

Für $x > -2$

$$\begin{aligned} \ln \tfrac{1}{2+x} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{\ln \frac{1}{2+x}} = \mathrm{e}^0 \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2+x} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2 + x = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -1. \end{aligned}$$

Beispiel 2

Für $x > 0$

$$\begin{aligned} \lg(x^3) + 2\lg(x^2) = 21 \quad &\Leftrightarrow \quad \lg(x^3) + \lg\left((x^2)^2\right) = 21 \\ &\Leftrightarrow \quad \lg(x^3 \cdot x^4) = 21 \\ &\Leftrightarrow \quad \lg(x^7) = 21 \\ &\Leftrightarrow \quad 10^{\lg(x^7)} = 10^{21} \\ &\Leftrightarrow \quad x^7 = 10^{21} \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt[7]{x^7} = \sqrt[7]{10^{21}} \\ &\Leftrightarrow \quad x = 10^{\frac{21}{7}} \\ &\Leftrightarrow \quad x = 10^3. \end{aligned}$$

Beispiel 3

Für $x > 0$

$$\begin{aligned} 5^{\lg x} = 2\cdot 3^{\lg x} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{5^{\lg x}}{3^{\lg x}} = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{5}{3}\right)^{\lg x} = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \ln\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{\lg x}\right) = \ln 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \lg x \cdot \ln\left(\frac{5}{3}\right) = \ln 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \lg x = \frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{5}{3}\right)} \\ &\Leftrightarrow \quad \lg x = \frac{\ln 2}{(\ln 5 - \ln 3)} \\ &\Leftrightarrow \quad 10^{\lg x} = 10^{\frac{\ln 2}{\ln 5 - \ln 3}} \\ &\Leftrightarrow \quad x = 10^{\frac{\ln 2}{\ln 5 - \ln 3}}\,. \end{aligned}$$

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf.

a) $2^x = 8$

b) $e^x = 5$

c) $2^{x^2} = 4^x - 2^{x^2}$

Antwort

a) $x = 3$

b) $x = \ln 5$

c) $x = 1$

Lösung a)

Laut Definition ist

$$x = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3\,.$$

Lösung b)

Der natürliche Logarithmus von $u > 0$ ist definiert durch $\ln u = \log_e u$.

Wendet man dies auf die Gleichung $e^x = 5$ an, so erhält man

$$\ln e^x = \ln 5 \Leftrightarrow x = \ln 5.$$

Lösung c)

Man forme zuerst die Gleichung etwas um:

$$\begin{aligned} & 2^{x^2} = 4^x - 2^{x^2} \\ \Leftrightarrow \quad & 2^{x^2} + 2^{x^2} = 4^x \\ \Leftrightarrow \quad & 2 \cdot 2^{x^2} = (2^2)^x \\ \Leftrightarrow \quad & 2 \cdot 2^{x^2} = 2^{2x} \\ \Leftrightarrow \quad & 2 \cdot 2^{x^2} : 2^{2x} = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 2^1 \cdot 2^{x^2} \cdot 2^{-2x} = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 2^{x^2-2x+1} = 1. \end{aligned}$$

Mit den Rechengesetzen für die Exponentialfunktion erhält man somit

$$2^{x^2-2x+1} = 2^0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

wobei hier die zweite binomische Formel verwendet wurde.

Somit lautet die Lösung der Gleichung $x = 1$.

ÜBUNG 2

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen.

a) $e^{2x} - 6e^x = -9$

b) $e^{2x} + e^x = 20$

c) $e^{2x} - 3e^x = -2$

d) $(e^{2x} - 2e^x)(e^x - 3) = 0$

Antwort

a) $\mathbb{L} = \{\ln 3\}$

b) $\mathbb{L} = \{\ln 4\}$

c) $\mathbb{L} = \{0;\ \ln 2\}$

d) $\mathbb{L} = \{\ln 2;\ \ln 3\}$

Lösung a)

Man versuche den Ansatz $u = e^x$. Wendet man diese Substitution auf die Gleichung an, so erhalten wir

$$u^2 - 6u = -9\,.$$

Man bestimmt alle positiven Lösungen dieser quadratischen Gleichung. Gemäß der zweiten binomischen Formel ergibt sich die Umformungskette

$$u^2 - 6u = -9 \Leftrightarrow u^2 - 6u + 9 = 0 \Leftrightarrow (u-3)^2 = 0 \Leftrightarrow u = 3\,.$$

Daraus erhalten wir die Gleichung $3 = e^x$ und damit ist $x = \ln 3$ die einzige Lösung der ursprünglichen Gleichung.

Lösung b)

Man macht den Ansatz $u = e^x$.

Substituiert man dies in obige Gleichung, so erhält man die quadratische Gleichung $u^2 + u - 20 = 0$.

Mit dem Satz von Vieta oder der p-q-Formel sieht man, dass $u^2 + u - 20 = (u-4)(u+5)$ gilt.

Da man $u = e^x > 0$ gesetzt hat, betrachtet man nur positive Lösungen u der Gleichung.

Die einzige positive Lösung der Gleichung ist $u = 4$. Daraus erhalten wir $x = \ln u = \ln 4$ als eindeutige Lösung der ursprünglichen Gleichung.

Lösung c)

Man macht den Ansatz $u = e^x$.

Wendet man diese Substitution auf die Gleichung an, so erhalten wir

$$u^2 - 3u = -2 \Leftrightarrow u^2 - 3u + 2 = 0\,.$$

Man bestimmt alle positiven Lösungen dieser quadratischen Gleichung mittels der p-q-Formel.

$$\begin{aligned} u_{1,2} &= -\tfrac{p}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}, \\ u_1 &= -\tfrac{-3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} = 2, \\ u_2 &= -\tfrac{-3}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2} = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Da beide Lösungen positiv sind, erhält man zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} & e^x = 2 \text{ oder } e^x = 1 \\ \Leftrightarrow\quad & x = \ln 2 \text{ oder } x = \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der ursprünglichen Gleichung ist also $\mathbb{L} = \{0; \ln 2\}$.

Lösung d)

Man macht den Ansatz $u = e^x$.

Wendet man diese Substitution auf die Gleichung an, so erhalten wir

$$(u^2 - 2u)(u-3) = 0 \Leftrightarrow u(u-2)(u-3) = 0\,.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ und $u_3 = 3$.

Nach dem Ansatz $u = e^x > 0$ ist u strikt positiv und die Lösung $u_1 = 0$ entfällt also aus der Betrachtung.

Für die beiden anderen Lösungen bekommt man

$$\begin{aligned} e^x &= 2 \Leftrightarrow x = \ln 2, \\ e^x &= 3 \Leftrightarrow x = \ln 3. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der ursprünglichen Gleichung ist also $\mathbb{L} = \{\ln 2;\, \ln 3\}$.

Ein anderer Lösungsweg: Ausklammern von e^x aus der linken Klammer ergibt

$$e^x(e^x - 2)(e^x - 3) = 0.$$

Da $e^x > 0$ kann das nur gelten, wenn $(e^x - 2) = 0$ oder $(e^x - 3) = 0$. Also erhält man die Lösungen

$$\begin{aligned} e^x &= 2 \Leftrightarrow x_1 = \ln 2, \\ e^x &= 3 \Leftrightarrow x_2 = \ln 3. \end{aligned}$$

ÜBUNG 3

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden beiden Gleichungen.

a) $\ln(x^2 - 7x + 11) = 0$

b) $\ln(e^x - 5e) = 1$

c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $\log_5(4 - x^2)$ definiert?

Antwort

a) $x_1 = 2$ und $x_2 = 5$

b) $x = \ln 6 + 1$

c) $x \in \mathbb{R}$ mit $-2 < x$ und $x < 2$, d.h. $x \in (-2; 2)$

Lösung a)

Es gilt $\ln y = 0$ genau dann, wenn $y = 1$. Also ist die Gleichung äquivalent zu $x^2 - 7x + 11 = 1$.

Man löst nun diese quadratische Gleichung. Wegen $(-2) \cdot (-5) = 10$ und $-2 - 5 = -7$ erhalten wir aus dem Satz von Vieta (oder mit der p-q-Formel)

$$x^2 - 7x + 11 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ oder } x = 5\,.$$

Daher sind die Lösungen der Gleichung $x_1 = 2$ und $x_2 = 5$.

Lösung b)

Nach Definition der Logarithmusfunktion gilt

$$1 = \ln(e^x - 5e) \Leftrightarrow e^1 = e^x - 5e$$

Man forme nun die zweite Gleichung mittels der Rechenregel für Potenzen um.

$$\begin{aligned} & e = e^x - 5e \\ \Leftrightarrow \quad & 6e = e^x \\ \Leftrightarrow \quad & 6 = e^{x-1}. \end{aligned}$$

Man wende jetzt den natürlichen Logarithmus auf beide Seiten an.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & 6 = e^{x-1} \\ \Leftrightarrow \quad & \ln 6 = \ln(e^{x-1}) \\ \Leftrightarrow \quad & \ln 6 = x - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \ln(6) + 1 = x \end{aligned}$$

Daher ist $x = \ln(6) + 1$ die einzige Lösung der Gleichung.

Lösung c)

Für jede Basis a ist der Logarithmus $\log_a(y)$ nur für $y > 0$ definiert.

Das gesuchte x muss also $4 - x^2 > 0$ erfüllen.

Man löst diese quadratische Ungleichung, indem man den quadratischen Term in Normalform bringt und die Nullstellen bestimmt.

$$\begin{aligned} & 4 - x^2 > 0 \qquad | \cdot (-1) \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 4 < 0\,. \end{aligned}$$

Die Nullstellen von $x^2 - 4 = 0$ sind $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$. Der Term ist zwischen den Nullstellen negativ, also für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-2 < x$ und $x < 2$.

$\log_5(4 - x^2)$ ist also für alle $x \in (-2; 2)$ definiert.

ÜBUNG 4

a) Für jede Basis $a > 0,\ a \neq 1$ erfüllt die Logarithmusfunktion $\log_a(x)$ das *Multiplikationstheorem*: $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y),\ x,\ y > 0.$

Sei $f\ :\ (0;\infty) \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion, die die Gleichung

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$$

für alle $x, y > 0$ erfüllt. Können Sie daraus bereits $f(1)$ berechnen?

b) Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$\log_2\left(\frac{2^x \cdot 8^z}{4^y}\right).$$

c) Vereinfachen Sie

$$\log_3\left(\frac{\sqrt{3} \cdot 9^{3x}}{\left(3 \cdot \sqrt{3}\right)^z}\right).$$

Antwort

a) $f(1) = 0$

b) $x + 3z - 2y$

c) $\frac{1}{2} + 6x - \frac{3}{2}z$

Lösung a)

Die Gleichung

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$$

ist erfüllt für alle $x, y > 0$.

Also ist insbesondere für $y = 1$

$$f(x) = f(x) + f(1)\,,$$

und Abziehen von $f(x)$ auf beiden Seiten liefert

$$0 = f(1)\,.$$

Lösung b)

Man benutzt das Multiplikationstheorem mehrmals und drückt 8^z und 4^y als Potenz von 2 aus:

$$\begin{aligned}
& \log_2\left(\tfrac{2^x \cdot 8^z}{4^y}\right) \\
= \; & \log_2\left(2^x \cdot 8^z\right) - \log_2\left(4^y\right) \\
= \; & \log_2\left(2^x\right) + \log_2\left(8^z\right) - \log_2\left(4^y\right) \\
= \; & x + \log_2\left(\left(2^3\right)^z\right) - \log_2\left(\left(2^2\right)^y\right) \\
= \; & x + \log_2\left(2^{3z}\right) - \log_2\left(2^{2y}\right) \\
= \; & x + 3z - 2y\,.
\end{aligned}$$

Lösung c)

Für nicht-negative y gilt $\sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$.

Man benutzt die Rechenregeln für Potenzen und drückt das Argument von $\log_3$ durch Potenzen von 3 aus:

$$\begin{aligned} & \log_3\left(\frac{\sqrt{3}\cdot 9^{3x}}{\left(3\cdot\sqrt{3}\right)^z}\right) \\ = & \log_3\left(\frac{3^{\frac{1}{2}}\cdot\left(3^2\right)^{3x}}{\left(3\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^z}\right) \\ = & \log_3\left(\frac{3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{6x}}{\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^z}\right) \\ = & \log_3\left(\frac{3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{6x}}{3^{\frac{3}{2}z}}\right). \end{aligned}$$

Dann wendet man das Multiplikationstheorem an:

$$\begin{aligned} = & \log_3\left(3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{6x}\right) - \log_3\left(3^{\frac{3}{2}z}\right) \\ = & \log_3\left(3^{\frac{1}{2}}\right) + \log_3\left(3^{6x}\right) - \frac{3}{2}z \\ = & \frac{1}{2} + 6x - \frac{3}{2}z\,. \end{aligned}$$

6. TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele:

- Sie verstehen den Verlauf von Sinus und Kosinus.
- Sie kennen Nullstellen, Extremstellen und wichtige Beziehungen von Sinus und Kosinus.
- Sie verstehen den Verlauf von Tangens und Kotangens und kennen ihre Eigenschaften.

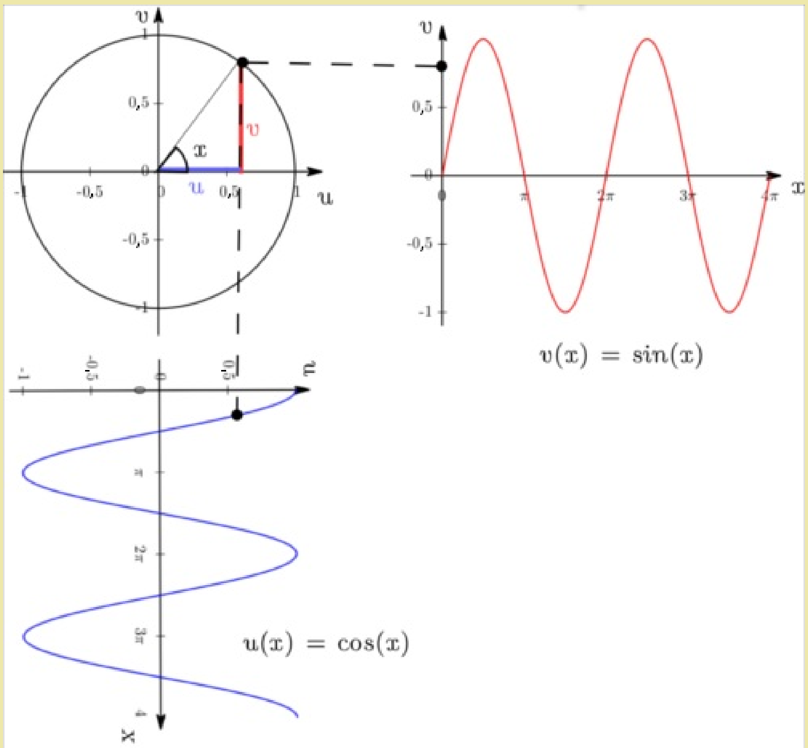
6.1 Einführung in die Sinus- und Kosinusfunktion

Im Abschnitt "Rechtwinkliges Dreieck" des Kapitels 5 haben Sie schon die geometrische Definition von Sinus und Kosinus im rechtwinkligem Dreieck und im Einheitskreis kennengelernt. Als Argumente von Sinus und Kosinus wurden dort die Winkel im Gradmaß verwendet. Dies ist in der Geometrie so üblich. Im Unterschied dazu werden wir in diesem Abschnitt Sinus und Kosinus als Funktionen von einer Variablen x einführen, die die Bogenlänge des Winkels auf dem Einheitskreis darstellt (Bogenmaß). Obwohl die so definierten Funktionen Sinus und Kosinus im eigentlichen Sinne verschiedene Funktionen sind, werden sie gleich bezeichnet, d.h. aus der Notation $\sin(x)$ geht noch nicht hervor, ob es sich um die Funktion mit dem Argument im Bogenmaß oder im Gradmaß handelt. Das muss dazu gesagt bzw. in Ihrem Taschenrechner eingestellt werden. Natürlich können Sie diesen Schritt auch vermeiden, indem Sie einen Winkel im Winkelmaß in das zugehörige Bogenmass umrechnen oder umgekehrt. Wie dies gemacht wird, wird in Abschnitt V.1 Winkel erklärt.

Seien $x \in \mathbb{R}$ und $(u; v)$ der Punkt auf dem Einheitskreis ($u^2 + v^2 = 1$), der mit der positiven u-Achse den Winkel x einschließt (entgegen dem Uhrzeigersinn gerechnet).

Die *Kosinusfunktion* ist die Projektion des Punktes $(u; v)$ auf die u-Achse (Abzisse) in Abhängigkeit vom Bogenmaß x,
$\cos(x) = u.$

Die Projektion des Punktes $(u; v)$ auf die v-Achse (Ordinate) in Abhängigkeit vom Bogenmaß x bezeichnet man als *Sinusfunktion*,
$\sin(x) = v.$



Mit der nachfolgenden Visualisierung können Sie die Graphen von Sinus und Kosinus durch die Bewegung des Punktes auf dem Einheitskreis nachvollziehen.

[online-only]

Sinus und Kosinus haben gleichartigen Verlauf. Die beiden Graphen sind zueinander um das Bogenmaß $x = \frac{\pi}{2}$ verschoben.

Der Definitionsbereich von Sinus und Kosinus ist $D_{\sin} = D_{\cos} = \mathbb{R}$ und die Wertemenge ist das Intervall $W_{\sin} = W_{\cos} = [-1; 1]$.

Im Abschnitt "Rechtwinkliges Dreieck" haben Sie gelernt, wie man die Werte von Sinus- und Kosinus für bestimmte Winkel des rechteckigen Dreiecks ausrechnen kann. Auf dem Einheitskreis können Sie nun die Sinus- und Kosinuswerte für beliebige Winkel ablesen. Für Winkel größer als 2π (360°) wiederholen sich die Sinus- und Kosinuswerte, es gilt also folgende Regel:

$$\begin{aligned}\sin(x+2\pi) &= \sin(x)\,,\\ \cos(x+2\pi) &= \cos(x)\end{aligned}$$

gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, das heißt, dass die Sinus- und Kosinusfunktion beide periodisch mit Periode 2π sind.

Folgende Wertetabelle enthält die Werte der Sinus- und der Kosinusfunktion für spezielle Winkel:

Winkel in Grad	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Winkel in Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Aus dieser Tabelle sind die Eigenschaften der Sinus- und der Kosinusfunktion ersichtlich, die auch im Abschnitt V.4 Rechtwinkliges Dreieck diskutiert werden.

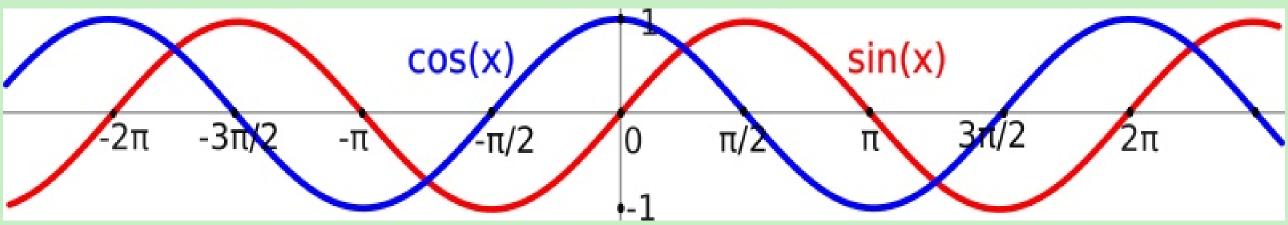
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\sin\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) &= \cos(x),\\ \cos\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) &= \sin(x).\end{aligned}$$

Darüber hinaus können Sie anhand der obigen Visualisierung direkt die Nullstellen der Sinus- und der Kosinusfunktion bestimmen.
Alle ganzzahligen Vielfachen von π sind Nullstellen des Sinus: $(0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots)$. Alle ungeradzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ sind Nullstellen des Kosinus: $(\pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \ldots)$.

Allgemein gilt für $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\sin(k\pi) &= 0\,,\\ \cos\left(\tfrac{\pi}{2}+k\pi\right) &= 0.\end{aligned}$$



Die Nullstellen des Sinus sind die Extremstellen des Kosinus und umgekehrt.

Wie Sie aus den Graphen sehen können, ist die Sinusfunktion punktsymmetrisch zum Ursprung $x = 0$, das heißt, sie ist eine ungerade Funktion . Die Kosinusfunktion ist achsensymmetrisch zur y- Achse, das heißt, sie ist eine gerade Funktion . In Formeln ausgedrückt, heißt das:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin(x), \\ \cos(-x) &= \cos(x). \end{aligned}$$

6.2 Tangens- und Kotangensfunktion

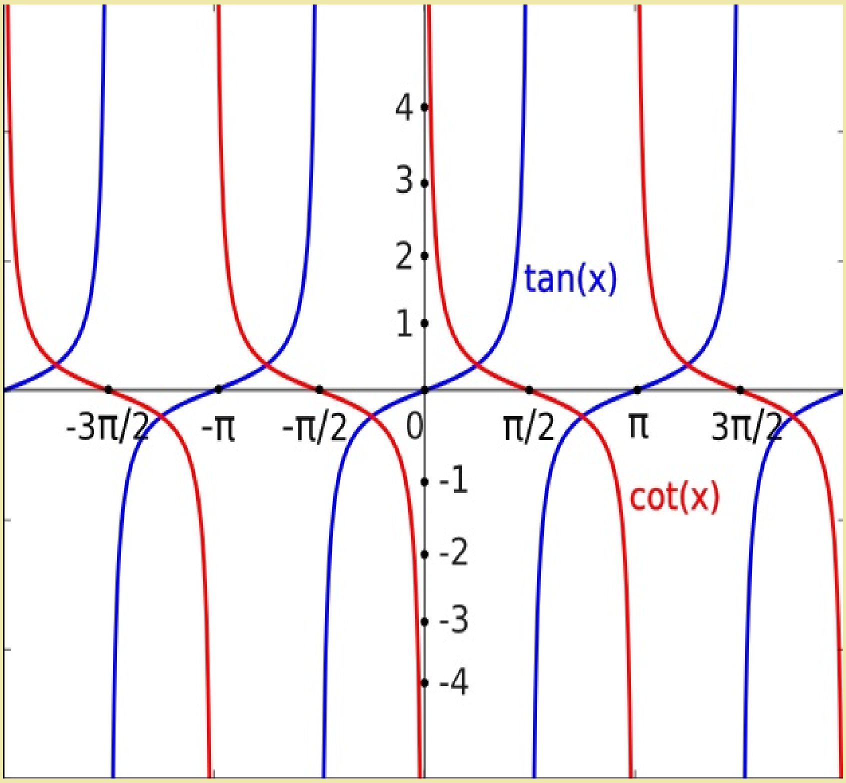
Die *Tangensfunktion* $\tan(x)$ ist definiert durch

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)},$$

wobei $x \in \mathbb{R}$ nicht die Werte $\ldots, \frac{-5\pi}{2}, \frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$ annehmen darf, das heißt, ihr Definitionsbereich ist gegeben durch $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus U$ mit $U = \left\{k\pi + \frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Die *Kotangensfunktion* $\cot(x)$ ist definiert durch

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)},$$

wobei $x \in \mathbb{R}$ nicht die Werte $\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$ annehmen darf, das heißt, ihr Definitionsbereich ist gegeben durch $D_{\cot} = \mathbb{R} \setminus G$ mit $G = \left\{k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Beide Funktionen haben die Menge der reellen Zahlen als Wertemenge: $W_{\tan} = W_{\cot} = \mathbb{R}$.



Durch die Lücken in den Definitionsbereichen der Tangens- und Kotangensfunktion besteht der Graph beider Funktionen aus mehreren „Ästen". Den Ast des Tangens um $x = 0$ und den des Kotangens um $x = \frac{\pi}{2}$ bezeichnet man als den Hauptast der jeweiligen Funktion.

Für Tangens und Kotangens existieren ähnliche Beziehungen wie für Sinus und Kosinus.

Die Graphen von Tangens und Kotangens sind an der x-Achse gespiegelt und um $\frac{\pi}{2}$ zueinander verschoben.

Für alle x im Definitionsbereich der jeweiligen Funktionen gilt

$$\begin{aligned}\tan\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) &= -\cot(x),\\ \cot\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) &= -\tan(x),\end{aligned}$$

Tangens und Kotangens sind π-periodisch

$$\begin{aligned}\tan(x+k\,\pi) &= \tan(x),\\ \cot(x+k\,\pi) &= \cot(x),\quad k\in\mathbb{Z},\end{aligned}$$

und beide sind ungerade Funktionen

$$\begin{aligned}\tan(-x) &= -\tan(x),\\ \cot(-x) &= -\cot(x).\end{aligned}$$

Die Nullstellen der Sinusfunktion bestimmen die Nullstellen der Tangensfunktion und entsprechend bestimmen die Nullstellen der Kosinusfunktion die Nullstellen der Kotangensfunktion:

Allgemein gilt für $k\in\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\tan(k\pi) &= 0,\\ \cot\left(\tfrac{\pi}{2}+k\pi\right) &= 0.\end{aligned}$$

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Beantworten Sie die folgenden Fragen schriftlich und vergleichen Sie anschließend Ihre Ergebnisse mit den Lösungen.

a) Welche Symmetrie weist die Funktion $f(x) = \sin(x)$ auf?

Wie lautet die Gleichung, die diese Symmetrie für die Sinusfunktion ausdrückt?

Welche Nullstellen hat die Funktion?

b) Welche Symmetrie weist die Funktion $f(x) = \cos(x)$ auf?

Wie lautet die Gleichung, die diese Symmetrie für die Kosinusfunktion ausdrückt?

Welche Nullstellen hat die Funktion?

c) Geben Sie die Minimalstellen und Maximalstellen des Sinus sowie des Kosinus an.

d) Was hat der Satz des Pythagoras mit den Winkelfunktionen zu tun?

Wie kann man Sinus und Kosinus ineinander umrechnen?

Lösung a)

Die Sinusfunktion ist eine ungerade Funktion und damit ist ihr Graph punktsymmetrisch zum Ursprung.

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

Die Nullstellen x_k des Sinus lauten: $x_k = k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ (alle ganzzahligen Vielfachen von π, benachbarte Nullstellen haben Abstand π).

Lösung b)

Die Kosinusfunktion ist eine gerade Funktion und damit ist ihr Graph achsensymmetrisch zur y-Achse.

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

Die Nullstellen x_k des Kosinus lauten: $x_k = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ (alle ungeradzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$, benachbarte Nullstellen haben Abstand π).

Lösung c)

Die Nullstellen des Sinus sind die Extremstellen des Kosinus.

Bei $x = 0$ liegt ein Maximum des Kosinus, bei $x = \pi$ ein Minumum.

Anschließend wechseln sich Maximal- und Minimalstellen 2π-periodisch nach links und rechts ab. Bei $x = m \cdot 2\pi,\ m \in \mathbb{Z}$, liegen die Maxima des Kosinus, bei $x = \pi + m \cdot 2\pi,\ m \in \mathbb{Z}$, liegen die Minima des Kosinus.

Analog sind alle Nullstellen des Kosinus die Extremstellen des Sinus.

Bei $x = \frac{\pi}{2}$ liegt ein Maximum und bei $x = \frac{3\pi}{2}$ ein Minimum des Sinus.

Anschließend wechseln sich Maximal- und Minimalstellen 2π-periodisch nach links und rechts ab. Bei $x = \frac{\pi}{2} + m \cdot 2\pi,\ m \in \mathbb{Z}$, liegen die Maxima des Sinus, bei $x = \frac{3\pi}{2} + m \cdot 2\pi,\ m \in \mathbb{Z}$, liegen die Minima des Sinus.

Lösung d)

Sie kennen den Satz des Pythagoras über den Zusammenhang zwischen Katheten und Hypothenuse im rechtwinkligen Dreieck.

Im rechtwinkligen Dreieck im Einheitskreis haben die Katheten die Längen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ und die Hypothenuse die Länge 1.

Damit ergibt sich:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) \quad = \quad 1.$$

Sinus und Kosinus sind um den Wert $\frac{\pi}{2}$ zueinander horizontal verschoben.

Also gilt:

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos(x), \\ \cos\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right) &= \sin(x). \end{aligned}$$

(Es gibt viele weitere ähnliche Gleichungen.)

ÜBUNG 2

In der Abbildung Abb 1 sind in roter, schwarzer, blauer und grüner Farbe die Graphen der Winkelfunktionen dargestellt.

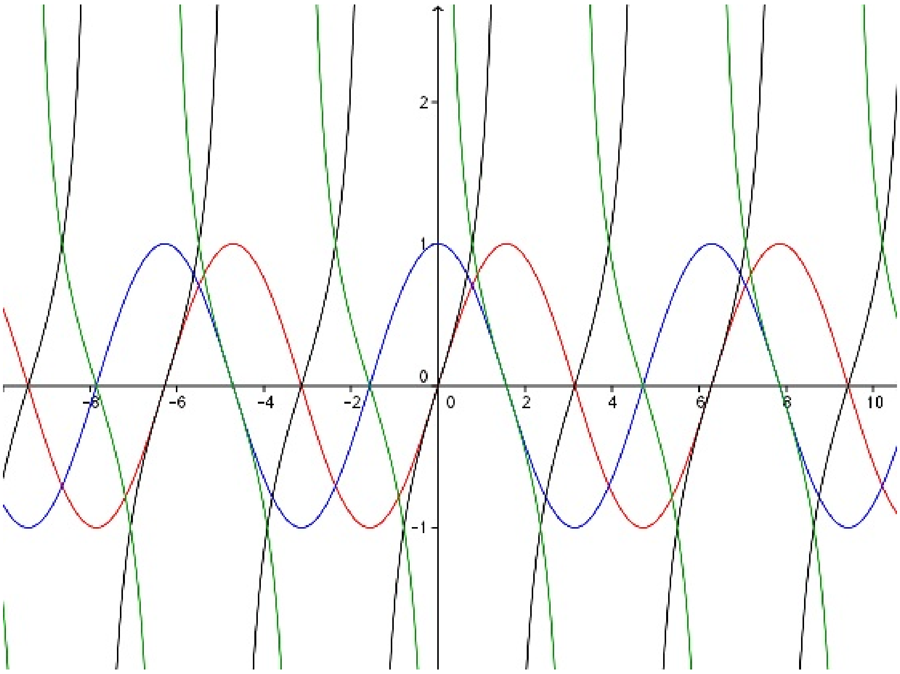


Abb 1: Die Winkelfunktionen

$g(x) = \sin(x)$ $h(x) = \cos(x)$ $j(x) = \tan(x)$ $k(x) = \cot(x)$

Ordnen Sie den vier Graphen jeweils die zugehörige Funktionsvorschrift zu.

Zuordnung der Graphen

a) $g(x)$ Der rote Graph gehört zur Funktion $g(x) = \sin(x)$.

b) $h(x)$ Der blaue Graph gehört zur Funktion $h(x) = \cos(x)$.

c) $j(x)$ Der schwarze Graph gehört zur Funktion $j(x) = \tan(x)$.

d) $k(x)$ Der grüne Graph gehört zur Funktion $k(x) = \cot(x)$.

Roter Graph

Die Funktion $g(x) = \sin(x)$ ist 2π-periodisch.

Die Nullstellen liegen bei den Vielfachen der Kreiszahl π.

Alle Funktionswerte liegen zwischen -1 und $+1$.

Die Extremstellen sind die Nullstellen der $\cos$-Funktion, nämlich $x_k = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$ für $k \in Z$.

Blauer Graph

Die Funktion $h(x) = \cos(x)$ ist 2π-periodisch.

Die Nullstellen liegen bei $x_k = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ für $k \in Z$.

Alle Funktionswerte liegen zwischen -1 und $+1$.

Die Extremstellen sind die ganzzahligen Vielfachen der Kreiszahl π.

Schwarzer Graph

Die Funktion $j(x) = \tan(x)$ ist der Quotient $\sin(x)$ durch $\cos(x)$.

Daher ist der Tangens an den Nullstellen des Kosinus nicht definiert und hat dort senkrechte Asymptoten.

Die Asymptoten liegen folglich bei: $x_k = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Der Tangens hat die Nullstellen des Zählers $\sin(x)$ als Nullstellen.

Er verläuft monoton steigend zwischen den senkrechten Asymptoten, er ist π-periodisch.

Grüner Graph

Die Funktion $k(x) = \cot(x)$ ist der Quotient $\cos(x)$ durch $\sin(x)$.

Daher ist die Kotangensfunktion an den Nullstellen des Sinus nicht definiert und hat dort senkrechte Asymptoten.

Die Asymptoten liegen folglich bei: $x_k = k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Sie hat die Nullstellen des Zählers $\cos(x)$ als Nullstellen.

Sie verläuft monoton fallend zwischen den senkrechten Asymptoten, da sie der "Kehrwert" des Tangens ist. Sie ist π-periodisch.

ÜBUNG 3

Beantworten Sie die folgenden Fragen schriftlich und vergleichen Sie anschließend Ihre Ergebnisse mit den Lösungen.

a) Welche Symmetrie weist die Funktion $f(x) = \tan(x)$ auf?

Wie lautet die Gleichung, die diese Symmetrie für die Tangensfunktion ausdrückt?

Welche Nullstellen hat der Tangens?

b) Welche Beziehung besteht zwischen Tangens und Kotangens?

c) Was kann man über Extremwerte der beiden Funktionen sagen?

Lösung a)

Die Tangensfunktion ist in ihrem Hauptzweig für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ eine ungerade Funktion und ihr Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

$\tan(-x) = -\tan(x)$ für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
Diese Gleichung gilt für alle x im Definitionsbereich.

Die Nullstellen x_k des Tangens lauten wie beim Sinus: $x_k = k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ (alle ganzzahligen Vielfachen von π).

Lösung b)

Die Funktionswerte der Kotangensfunktion und der Tangensfunktion sind Kehrwerte voneinander:

$\tan(x) = \frac{1}{\cot(x)}$.

Hierbei muss man natürlich die Lücken in den Definitionsbereichen von Tangens und Kotangens außer Betracht lassen. Das sind ja gerade die Nullstellen der beiden Winkelfunktionen Sinus und Kosinus.

Lösung c)

Beide Funktionen sind monotone Funktionen und sie besitzen keine lokalen Extrema.

Bei den Nullstellen des jeweiligen Nenners haben sie senkrechte Asymptoten und beide Funktionen werden unendlich groß. Also haben sie auch keine globalen Extrema.

ÜBUNG 4

In der Abbildung Abb 1 sind in roter, blauer und schwarzer Farbe die Graphen von drei Winkelfunktionen dargestellt.

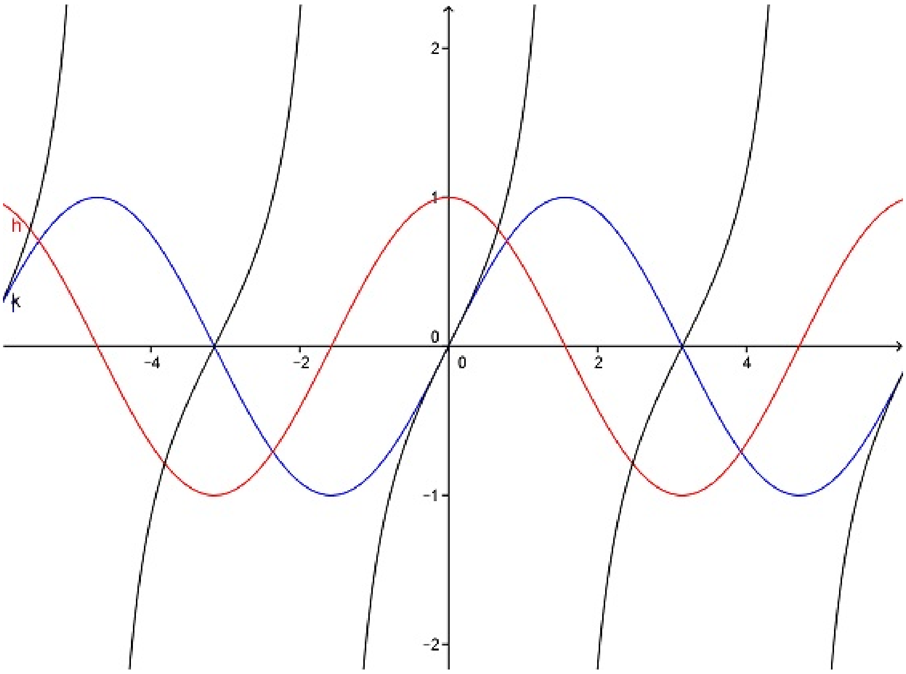


Abb 1: Drei Winkelfunktionen

$g(x) = \cos\left(\frac{5}{2}\pi - x\right)$

$h(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$k(x) = \frac{1}{\cot(x)}$

Ordnen Sie den drei Graphen jeweils die zugehörige Funktionsvorschrift zu und begründen Sie das mit bekannten Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen.

Zuordnung der Graphen

$k(x)$ Der schwarze Graph gehört zur Funktion $k(x) = \frac{1}{\cot(x)}$.

$h(x)$ Der rote Graph gehört zur Funktion $h(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

$g(x)$ Der blaue Graph gehört zur Funktion $g(x) = \cos\left(\frac{5}{2}\pi - x\right)$.

Schwarzer Graph

Da Tangens und Kotangens Kehrwerte voneinander sind, gilt für die Funktion $k(x) = \frac{1}{\cot(x)} = \tan(x)$.

Der schwarze Graph ist der Graph des Tangens und damit der Graph von $k(x)$.

Blauer Graph

Da Kosinus eine gerade Funktion ist, gilt $g(x) = \cos\left(\frac{5}{2}\pi - x\right) = \cos\left(x - \frac{5}{2}\pi\right)$, also ist der Kosinus um $\frac{5}{2}\pi = 2\pi + \frac{\pi}{2}$ nach rechts verschoben.

Da die Kosinusfunktion 2π-periodisch ist, ist das dasselbe, als verschiebe man nur um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts, $\cos\left(x - \frac{5}{2}\pi\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Es gilt: $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$.

Der blaue Graph der Sinusfunktion ist deshalb der Graph von $g(x)$.

Roter Graph

Die Funktion $h(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ist der um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschobene Sinus.

Es gilt: $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$.

Der rote Graph des Kosinus ist also der Graph von $h(x)$.

7. TRANSFORMATION VON FUNKTIONEN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele:

- Sie verstehen die folgenden Transformationen von Funktionen und ihrer Graphen: Verschieben, Spiegeln an Koordinatenachsen, Strecken und Stauchen in x- und y-Richtung.
- Sie können den Graphen einer durch eine Gleichung gegebenen transformierten Funktion zeichnen.
- Für einfache Funktionen können sie aus einem Graphen ablesen, um welche Funktion und um welche Transformation es sich handelt.

Wenn die Werte einer Funktion Längen beschreiben, dann hängt der Zahlenwert von der benutzten Maßeinheit (Skala) ab. Beschreibt $f_{\mathrm{m}}(x)$ die Funktionswerte in Meter (m), dann müssen alle Funktionswerte mit 100 multipliziert werden, um dieselbe Länge in Centimeter (cm) auszudrücken: $f_{\mathrm{cm}}(x) = 100\, f_{\mathrm{m}}(x)$. Entsprechendes gilt für den Fall, dass die Funktion von einer Größe mit Maßeinheit abhängt. Dann wird die unabhängige Variable mit einem Faktor multipliziert, wenn die Maßeinheit geändert wird. Wenn $f_{\mathrm{J}}(x)$ eine Größe in Abhängigkeit vom Alter x in Jahren beschreibt, dann beschreibt $f_{\mathrm{M}}(x/12)$ dieselbe Funktion, wenn x das Alter in Monaten angibt. Da solche Transformationen bei Skalenwechsel (Maßstabswechsel) auftreten, werden die Transformationen $f(x)$ zu $a\,f(x)$ und $f(x)$ zu $f(bx)$ als *Skalierung* oder *Skalentransformation* bezeichnet. Geometrisch bedeutet das eine Streckung oder Stauchung des Funktionsgraphen. Wie diese senkrecht (vertikal) wirkt, behandeln wir im nächsten Abschnitt, den waagerechten (horizontalen) Fall im darauf folgenden Abschnitt. Außerdem werden in diesem Abschnitt *Spiegelungen* und *Verschiebungen* (Translationen) behandelt.

7.1 Skalierung der Funktionswerte (Skalierung in vertikaler Richtung), Streckung und Stauchung

Die Transformation der Funktion f mit der reellen Zahl $a > 0$

$$f \longrightarrow af, \qquad f(x) \longrightarrow a \cdot f(x),$$

heißt *Skalierung der Funktionswerte* oder *Skalierung in vertikaler Richtung*.

Die nachfolgende Regel beschreibt die Auswirkung auf den Graphen einer Funktion, falls die Funktion mit einem Faktor $a > 0$ multipliziert wird.

Die Skalierung der Funktionswerte $f \longrightarrow af$ mit $a > 0$ beschreibt

im Fall $a > 1$ eine *vertikale Streckung* des Graphen von f mit dem Faktor a und

im Fall $0 < a < 1$ eine *vertikale Stauchung* des Graphen von f mit dem Faktor a.

Bei dieser Transformation bleibt der Definitionsbereich der Funktion unverändert. Die Graphen von nicht konstanten Funktionen werden „steiler" bei $a > 1$ und „flacher" bei $0 < a < 1$.

Die Auswirkung der Skalierung in vertikaler Richtung (und der Spiegelung, die hier behandelt wird) können Sie in der nachfolgenden Visualisierung sehen.

Vertikale Streckung und Stauchung

Ziehen Sie den schwarzen Punkt nach oben oder unten, um den Funktionsgraphen zu strecken oder zu stauchen. Der zugehörige Faktor a wird in der Funktionsvorschrift eingeblendet. Sie können die betrachtete Ausgangsfunktion im blauen Eingabefeld selbst verändern.

Für das vorgeschlagene Beispiel einer Sinusfunktion $af(x) = a \cdot \sin(x)$ sieht man, dass durch Veränderung des Paramaters a die Höhe der Schwingungen verändert wird. Der Faktor a hat die Bedeutung der *Amplitude* der Schwingung.

[online-only]

7.2 Skalierung des Arguments (Skalierung in horizontaler Richtung), Streckung und Stauchung

Ganz anders verhält sich der Graph einer Funktion $f(x)$, wenn man ihr Argument x mit einem Faktor $b > 0$ multipliziert. Hierdurch wird der Graph waagerecht auseinandergezogen (gestreckt) oder zusammengeschoben (gestaucht).

Die Transformation der Funktion f mit der reellen Zahl $b > 0$

$$f \quad\longrightarrow\quad f_b, \qquad f(x) \quad\longrightarrow\quad f_b(x) = f(b \cdot x),$$

heißt *Skalierung des Arguments der Funktion* oder *Skalierung in horizontaler Richtung*.

Beim Übergang von $f(x)$ zu $f_2(x) = f(2x)$ werden alle Extremstellen, Nullstellen etc. von f bei f_2 schon für halb so große Werte von x erreicht, die Höhen der Extrema etc. bleiben aber unverändert. Somit wird der Graph von f auf die „halbe Breite gestaucht". Die nachfolgende Regel beschreibt die Auswirkung auf den Graphen einer Funktion, falls das Argument der Funktion mit einem Faktor $b > 0$ multipliziert wird. (Die interaktiven Visualisierungen zeigen auch die zusätzliche horizontale Spiegelung bei $b < 0$, die unten erläutert wird.)

Die (horizontal wirkende) Skalierung des Arguments $f \quad\longrightarrow\quad f_b$ mit $b > 0$ beschreibt

im Fall $0 < b < 1$ eine *horizontale Streckung* des Graphen von f mit dem Faktor $1/b > 1$,

im Fall $b > 1$ eine *horizontale Stauchung* des Graphen von f mit dem Faktor $1/b < 1$.

Beachten Sie die „vertauschten Rollen": $a > 1$ führt auf vertikale Streckung und $b > 1$ auf horizontale Stauchung. Für Parameterwerte $a, b \in (0;\, 1)$ ist es gerade umgekehrt.

Die Definitionsbereiche von f und f_b sind oft verschieden, wie die folgenden Beispiele zeigen.

> 1. Die Funktion $f(x) = \sqrt{x+3}$ hat den Definitionsbereich $D = [-3; \infty)$. Wenn Sie diese Funktion mit der positiven Zahl $b = 4$ in der x-Richtung skalieren, erhalten Sie die skalierte Funktion $f_4(x) = \sqrt{4x+3}$ mit dem gestauchten Definitionsbereich $D_4 = [-3/4; \infty)$. Die Funktion $f_b(x) = \sqrt{bx+3}$ mit $b > 0$ hat den Definitionsbereich $D_b = [-3/b; \infty)$.
>
> 2. $f(x) = \tan(x)$ hat den Definitionsbereich $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Dann hat $f_b(x) = \tan(bx)$ mit Streckung durch $b = 1/2$ den Definitionsbereich $D_{1/2} = \big\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\big\}$. Die Positionen der Lücken im Definitionsbereich werden mit dem Faktor 2 gestreckt.

Wenn der Definitionsbereich z.B. $D = \mathbb{R}$ oder $D = \mathbb{R}^+$ ist, so bleibt er unverändert, $D = D_b$. Allgemein gilt: $D_b = \{x \mid bx \in D\} = \{x/b \mid x \in D\}$.

Horizontale Streckung und Stauchung trigonometrischer Funktionen
An den Beispielen von $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$ und $f(x) = \tan(x)$ soll die horizontale Streckung und Stauchung der Graphen trigonometrischer Funktionen veranschaulicht werden.
Bei Vergrößerung des Faktors b schwingen die Funktionen Sinus und Kosinus immer schneller auf und ab, die Wellenlänge (der Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Wellenbergen) wird kürzer.

Die Bezeichnung $\sin(bx)$ etc. passt gut zur Beschreibung von Wellen, wo x eine räumliche Variable ist. In physikalischen Anwendungen, die zeitliche Schwingungen beschreiben, ist es üblich, $\sin(\omega t)$ anstelle von

$\sin(bx)$ zu schreiben, wobei die Variable „Zeit" mit t bezeichnet wird und der Skalierungsfaktor ω die „Kreisfrequenz" ist.

$f(x) = \sin(bx)$

[online-only]

$f(x) = \cos(bx)$

[online-only]

$f(x) = \tan(bx)$

[online-only]

Skalierung von Potenzfunktionen

Ersetzt man die Potenzfunktion $f(x) = x^r$ durch die horizontal skalierte Funktion, so erhält man

$$f_b(x) = f(b \cdot x) = (b \cdot x)^r = b^r \cdot x^r = b^r \cdot f(x).$$

d.h., die (horizontal wirkende) Skalierung des Arguments einer Potenzfunktion mit dem Faktor $b > 0$ ist gleichbedeutend mit der (vertikal wirkenden) Skalierung des Funktionswerts der Potenzfunktion mit dem Faktor $a = b^r > 0$. Die Potenz r kann eine positive oder negative ganze oder rationale Zahl sein. (Und auch umgekehrt ist die vertikal wirkende Skalierung von $f(x) = x^r$ mit dem Faktor $a > 0$ gleichbedeutend mit der horizontal wirkenden Skalierung mit dem Faktor $b = a^{1/r} > 0$.) Zur Veranschaulichung geben Sie Potenzfunktionen in die Visualisierung für die vertikale Streckung und Stauchung ein.

Horizontal wirkende Skalierung von Exponentialfunktionen

Eine Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$ ist durch $f(x) = a^x$ gegeben. Eine horizontal wirkende Skalentransformation ergibt

$$f_b(x) = a^{b \cdot x} = \left(a^b\right)^x.$$

Das heißt, bei horizontal wirkender Skalierung von Exponentialfunktionen wird die Basis $a > 0$ der Exponentialfunktion zur Basis $\tilde{a} = a^b > 0$ geändert. Die horizontale Streckung oder Stauchung des Graphen entspricht also einem Basiswechsel. Im Beispiel können Sie den Faktor b und die Basis $a > 0$ verändern.

Horizontal wirkende Skalierung der Logarithmusfunktion
Der natürliche Logarithmus $f(x) = \ln(x)$ ist nur für $x > 0$ definiert. Eine horizontal wirkende Skalentransformation mit dem Faktor $b > 0$ hat denselben Definitionsbereich $\mathbb{R}^+$.

$$f(b \cdot x) = \ln(b \cdot x) = \ln(b) + \ln(x)$$

Die horizontal wirkende Skalierung der Logarithmusfunktion bewirkt, dass die Zahl $\ln(b)$ zum Funktionswert addiert wird, ein Spezialfall der vertikalen Verschiebung.

f(x)=abx

[online-only]

f(x)=ln(b·x)

[online-only]

7.3 Spiegelung

Multiplikation der Funktionswerte einer Funktion f mit -1 bewirkt, dass der Punkt $(x;\ f(x))$ auf dem Graphen von f in den an der x-Achse gespiegelten Punkt $(x;\ -f(x))$ abgebildet wird.

Vertikale Spiegelung an der x-Achse

Die Transformation der Funktion

$$f \longrightarrow -f, \qquad f(x) \longrightarrow -f(x),$$

heißt *(vertikale) Spiegelung an der x-Achse*.

Der Definitionsbereich von $-f$ ist derselbe wie von f (ebenso wie bei der Skalierung in vertikaler Richtung). Der *Graph von* $-f$ ist der an der x-Achse gespiegelte Graph von f, das vertikale Spiegelbild.

Zur Visualisierung geben Sie oben bei dem Beispiel zur vertikalen Streckung und Stauchung den Faktor $a = -1$ ein.

Wenn die Variable x mit -1 multipliziert wird, dann wird nicht „oben und unten" sondern „rechts und links" vertauscht:

Horizontale Spiegelung an der y-Achse

Die Transformation der Funktion

$$f \longrightarrow f_{-1}, \qquad f(x) \longrightarrow f_{-1}(x) = f(-x),$$

heißt *(horizontale) Spiegelung an der y-Achse*.

Der Definitionsbereich D_{-1} von f_{-1} ist das horizontale Spiegelbild des Definitionsbereiches D von f: $D_{-1} = \{-x \in \mathbb{R} \mid x \in D\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in D\}$. Z.B. ist $f(x) = \ln(x)$ für $x > 0$ definiert und $f_{-1}(x) = \ln(-x)$ für $x < 0$.

Der *Graph von* f_{-1} ist der an der y-Achse gespiegelte Graph von f, das horizontale Spiegelbild. Zur Visualisierung geben Sie z.B. oben bei den Beispielen zur horizontalen Streckung und Stauchung den Faktor $b = -1$ ein.

Die vertikal wirkende Skalierung kann mit der Spiegelung an der x-Achse kombiniert werden zu der Transformation $f \longrightarrow a \cdot f$, wobei $a < 0$. Dies beschreibt eine vertikale Streckung oder Stauchung mit $|a|$ und Spiegelung des Graphen, siehe die Visualisierung. Entsprechend beschreibt die Transformation $f \longrightarrow f_b$ mit $b < 0$ eine horizontale Streckung oder Stauchung mit $|b|$ und horizontale Spiegelung des Graphen an der y-Achse. Dies ist für die Beispiele mit trigonometrischen Funktionen und Exponential- und Logarithmusfunktion veranschaulicht.

7.4 Verschiebung von Funktionen

Wenn zum Funktionswert oder zur Variablen eine Konstante addiert oder subtrahiert wird, dann wird der Graph der Funktion vertikal oder horizontal verschoben ohne die Form zu ändern.

Vertikale und horizontale Verschiebung:

Für $b \in \mathbb{R}$ ist die Transformation

$$f(x) \quad\longrightarrow\quad f(x)+b$$

eine *vertikale Verschiebung (Translation) um* b

und für $a \in \mathbb{R}$ ist die Transformation

$$f(x) \quad\longrightarrow\quad f(x-a)$$

eine *horizontale Verschiebung (Translation) um* a.

Die Wirkung auf den Graphen der Funktion beschreibt die folgende Regel.

Der Graph von $g(x) = f(x) + b$ ist gegenüber dem Graphen von f um b nach oben verschoben, falls $b > 0$, und um $|b| = -b$ nach unten verschoben, falls $b < 0$. Die Definitionsbereiche von f und g sind gleich.

Der Graph von $h(x) = f(x-a)$ ist gegenüber dem Graphen von f um a nach rechts verschoben, falls $a > 0$, und um $|a| = -a$ nach links verschoben, falls $a < 0$. Der Definitionsbereich ist entsprechend nach rechts oder links verschoben.

Die verschiedenen Fälle können einfacher zusammengefasst werden, wenn man verabredet, dass eine Verschiebung um eine negative Zahl wie -2 nach rechts eine Verschiebung um ihren Betrag 2 nach links bedeutet und entsprechend eine Verschiebung nach oben um -2 eine Verschiebung nach unten um 2 bedeutet. Dann kann man kürzer für $a, b \in \mathbb{R}$ sagen, dass $f(x-a)$ die um a nach rechts verschobene Funktion ist und $f(x) + b$ die um b nach oben verschobene Funktion ist.

Verschiebung trigonometrischer Funktionen
Horizontale und vertikale Verschiebungen der Graphen von trigonometrischen Funktionen sind hier veranschaulicht. Anstelle der Bezeichnung a in $\sin(x-a)$ etc. für die horizontale Verschiebung ist bei $\sin(x-\varphi)$ und $\cos(x-\varphi)$ die Bezeichnung als Winkel φ üblich. In vielen physikalischen und technischen Anwendungen ist der Winkel φ die *Phasenverschiebung* einer Schwingung. Die Phasenverschiebung verschiebt den gesamten Verlauf der Schwingung um φ. Da die Winkelfunktionen 2π-periodisch sind, haben Phasenverschiebungen um φ und z.B. um $\varphi \pm 2\pi$ dieselbe Wirkung.

$f(x)=\sin(x-\varphi)+b$

[online-only]

$f(x)=\cos(x-\varphi)+b$

[online-only]

Verschiebung von Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen

In diesem Abschnitt sehen sie die Kombination der beiden Transformationen am Beispiel von Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen.

f(x)=(x-a)s+b

[online-only]

f(x)=exp(x-a)+b

[online-only]

f(x)=ln(x-a)+b

[online-only]

Polynome zweiten Grades der Form $f(x) = x^2 + cx + d,\ \ c, d \in \mathbb{R}$, können in die *Scheitelpunktform*

$$f(x) \quad = \quad (x - x_s)^2 + y_s$$

umgeschrieben werden. Der Scheitelpunkt der Parabel ist der Punkt $S = (x_s;\, y_s)$.
Das heißt, die Parabel ist ausgehend von der Normalparabel $f_0(x) = x^2$ um x_s nach rechts und um y_s nach oben verschoben.

Im folgenden Beispiel sehen Sie den Zusammenhang:

Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung kann man Polynome zweiten Grades der Form $f(x) = x^2 + cx + d,\ c, d \in \mathbb{R}$, in die Scheitelpunktform bringen:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 1 \\ &= x^2 - 4x + 4 - 3 \\ &= (x-2)^2 - 3. \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt ist $S = (2; -3)$.
Dies entspricht der Verschiebung der Parabel um $a = x_s = 2$ und $b = y_s = -3$.

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

In Abbildung 1 sind in roter, gelber, blauer und grüner Farbe die Graphen von vier transformierten Funktionen der schwarz gezeichneten Funktion $f(x) = \sin(x)$ dargestellt.

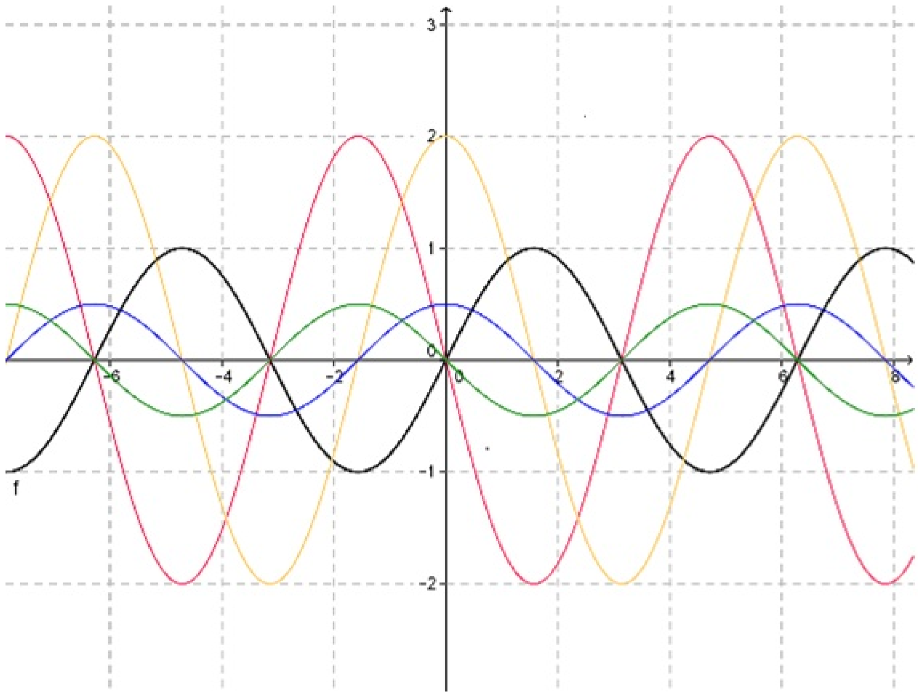


Abb 1: $f(x) = \sin(x)$ und die vier transformierten Funktionen $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ und $l(x)$.

$$g(x) = 2\sin(x - \pi) \qquad h(x) = 2\sin(x + \tfrac{\pi}{2})$$

$$k(x) = 0{,}5\sin(x + \tfrac{\pi}{2}) \qquad l(x) = 0{,}5\sin(x + \pi)$$

Ordnen Sie den vier Graphen jeweils die zugehörige Funktionsvorschrift zu.

Zuordnung der Graphen

h Der gelbe Graph gehört zur Funktion $h(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{2})$.

g Der rote Graph gehört zur Funktion $g(x) = 2\sin(x - \pi)$.

k Der blaue Graph gehört zur Funktion $k(x) = 0{,}5\sin(x + \frac{\pi}{2})$.

l Der grüne Graph gehört zur Funktion $l(x) = 0{,}5\sin(x + \pi)$.

Gelber Graph

Die Funktion $h(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{2})$ ist um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschoben, da statt x der Term $x + \frac{\pi}{2}$ als Argument verwendet wird.

Weiterhin ist der Graph des Sinus mit dem Faktor 2 vertikal gestreckt, da der $\sin$-Term mit diesem Faktor multipliziert wird.

Der um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschobene und um den Faktor 2 gestreckte gelbe Graph entspricht der Funktion $h(x)$.

Grüner Graph

Die Funktion $l(x) = 0{,}5\sin(x + \pi)$ ist um π nach links verschoben, da statt x der Term $x + \pi$ als Argument verwendet wird.

Weiterhin ist der Graph des Sinus mit dem Faktor $0{,}5$ vertikal gestaucht (Halbierung der y-Werte).

Der um π nach links verschobene und um den Faktor $0{,}5$ gestauchte grüne Graph entspricht der Funktion $l(x)$.

Blauer Graph

Die Funktion $k(x) = 0{,}5\sin(x + \frac{\pi}{2})$ ist um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschoben, da statt x der Term $x + \frac{\pi}{2}$ als Argument verwendet wird.

Weiterhin ist der Graph des Sinus mit dem Faktor $0{,}5$ vertikal gestaucht (Halbierung der y-Werte).

Der um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschobene und um den Faktor $0{,}5$ gestauchte blaue Graph entspricht der Funktion $k(x)$.

Roter Graph

Die Funktion $g(x) = 2\sin(x - \pi)$ ist um π nach rechts verschoben, da statt x der Term $x - \pi$ als Argument verwendet wird.

Weiterhin ist der Graph des Sinus mit dem Faktor 2 vertikal gestreckt, da der $\sin$-Term mit diesem Faktor multipliziert wird.

Der um π nach rechts verschobene und um den Faktor 2 gestreckte rote Graph entspricht der Funktion $g(x)$.

ÜBUNG 2

Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift $g(x)$ zur nachfolgend beschriebenen Transformation der Funktion $f(x)$.

a) $g(x)$ ist gegeben durch die Verschiebung von $f(x) = \sqrt{x}$ um 2 nach links und um 5 nach oben.

b) $g(x)$ ist gegeben durch die Verschiebung von $f(x) = \sin(x)$ um 4 nach rechts und um 6 nach unten.

c) $g(x)$ ist gegeben durch die Verschiebung von $f(x) = \ln(x)$ um 3 nach links und die Stauchung des Graphen auf die halbe Höhe.

d) $g(x)$ ist gegeben durch die Verschiebung von $f(x) = \exp(x)$ um 1 nach rechts und eine Streckung des Graphen auf die vierfachen Funktionswerte.

Antworten

a) Es ist $g(x) = 5 + \sqrt{x+2}$.

b) Es ist $g(x) = \sin(x-4) - 6$.

c) Es ist $g(x) = 0{,}5 \cdot \ln(x+3)$.

d) Es ist $g(x) = 4 \cdot \exp(x-1)$.

Lösung a)

Eine Verschiebung um 2 nach links erreicht man, indem man statt x den Term $x+2$ als Argument der Funktion f verwendet.

Die Verschiebung um 5 nach oben erhält man durch die Addition des Terms 5.

Das ergibt $g(x) = 5 + f(x+2) = 5 + \sqrt{x+2}$.

Lösung b)

Eine Verschiebung um 4 nach rechts erreicht man, indem man statt x den Term $x-4$ als Argument der Funktion f verwendet.

Die Verschiebung um 6 nach unten erhält man durch die Subtraktion von 6.

Daher ergibt sich $g(x) = f(x-4) - 6 = \sin(x-4) - 6$.

Lösung c)

Eine Verschiebung um 3 nach links erreicht man, indem man statt x den Term $x+3$ als Argument der Funktion f verwendet.

Die Stauchung des Graphen auf die halbe Höhe ist durch Multiplikation der Funktion mit dem Faktor $0{,}5$ zu erzielen.

Daher ergibt sich $g(x) = 0{,}5\, f(x+3) = 0{,}5 \ln(x+3)$.

Lösung d)

Eine Verschiebung um Eins nach rechts erreicht man, indem man statt x den Term $x-1$ als Argument der Funktion f verwendet.

Die Streckung des Graphen auf die vierfachen Funktionswerte erhält man durch die Multiplikation mit dem Faktor 4.

Daher ergibt sich $g(x) = 4\, f(x-1) = 4 \exp(x-1)$.

ÜBUNG 3

In Abbildung 1 sind in roter, gelber, blauer und grüner Farbe die Graphen von vier transformierten Funktionen der schwarz gezeichneten Funktion $f(x) = x^3$ dargestellt.

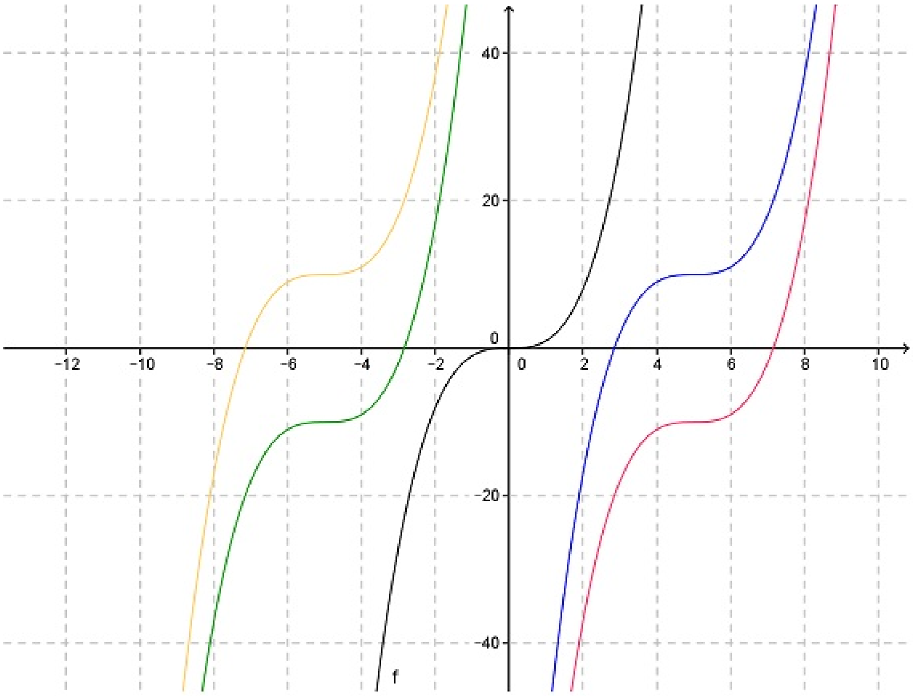


Abb 1: $f(x) = x^3$ und die vier transformierten Funktionen $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ und $l(x)$

$g(x) = (x-5)^3 - 10$

$h(x) = (x+5)^3 + 10$

$k(x) = (x-5)^3 + 10$

$l(x) = (x+5)^3 - 10$

Ordnen Sie die vier Graphen jeweils der zugehörigen Funktionsvorschrift zu.

Zuordnung der Graphen

a) h Der gelbe Graph gehört zur Funktion $h(x) = (x+5)^3 + 10$.

b) g Der rote Graph gehört zur Funktion $g(x) = (x-5)^3 - 10$.

c) k Der blaue Graph gehört zur Funktion $k(x) = (x-5)^3 + 10$.

d) l Der grüne Graph gehört zur Funktion $l(x) = (x+5)^3 - 10$.

Gelber Graph

Die Funktion $h(x) = (x+5)^3 + 10$ ist um 5 nach links verschoben, da statt x der Term $x+5$ als Argument von f verwendet wird.

Weiterhin ist der Wert 10 addiert. Hierdurch ist der Graph um 10 nach oben verschoben.

Der um 5 nach links und um 10 nach oben verschobene gelbe Graph entspricht der Funktion $h(x)$.

Grüner Graph

Die Funktion $l(x) = (x+5)^3 - 10$ ist um 5 nach links verschoben, da statt x der Term $x+5$ als Argument von f verwendet wird.

Weiterhin ist der Wert 10 subtrahiert. Hierdurch ist der Graph um 10 nach unten verschoben.

Der um 5 nach links und um 10 nach unten verschobene grüne Graph entspricht der Funktion $l(x)$.

Blauer Graph

Die Funktion $k(x) = (x-5)^3 + 10$ ist um 5 nach rechts verschoben, da statt x der Term $x-5$ als Argument von f verwendet wird.

Weiterhin ist der Wert 10 addiert. Hierdurch ist der Graph um 10 nach oben verschoben.

Der um 5 nach rechts und um 10 nach oben verschobene blaue Graph entspricht der Funktion $k(x)$.

Roter Graph

Die Funktion $g(x) = (x-5)^3 - 10$ ist um 5 nach rechts verschoben, da statt x der Term $x-5$ als Argument von f verwendet wird.

Weiterhin ist der Wert 10 subtrahiert. Hierdurch ist der Graph um 10 nach unten verschoben.

Der um 5 nach rechts und um 10 nach unten verschobene rote Graph entspricht der Funktion $g(x)$.

ÜBUNG 4

In Abbildung 1 sind zwei Graphen der Funktionen $f(x) = x^2 + 2x + 1$ und $g(x) = \cos(x - 1)$ gegeben.

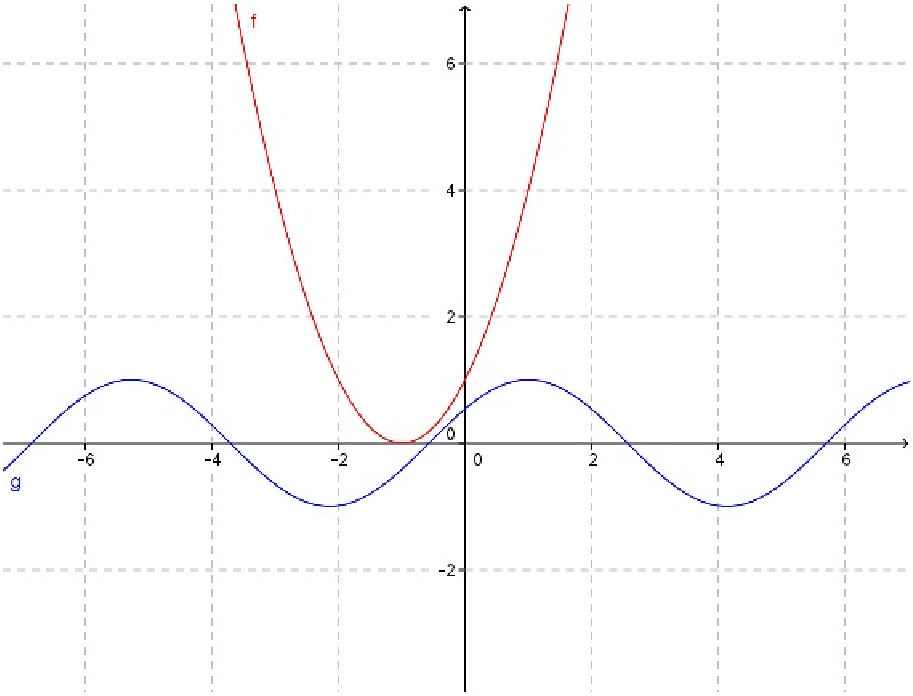


Abb 1: $f(x) = x^2 + 2x + 1$ und $g(x) = \cos(x - 1)$

Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen und notieren Sie die Funktionsvorschrift:

a) $h(x)$ entsteht aus $f(x)$ durch Verschiebung um 2 nach rechts und 4 nach oben.

b) $k(x)$ entsteht durch vertikale Streckung des Graphen von $g(x)$ um den Faktor 2 und durch Verschiebung um 2 nach links.

c) $i(x)$ entsteht durch vertikale Spiegelung des Graphen von $f(x)$ an der x-Achse.

d) $l(x)$ entsteht durch horizontale Spiegelung des Graphen von $f(x)$ an der y-Achse.

Funktionsvorschriften

a) Es ist $h(x) = (x - 1)^2 + 4 = x^2 - 2x + 5$.

b) Es ist $k(x) = 2\cos(x + 1)$.

c) Es ist $i(x) = -(x + 1)^2$.

d) Es ist $l(x) = (x - 1)^2$.

Lösung a)

Für die Funktion $f(x)$ gilt nach der 1. binomischen Formel $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$.

Ersetzt man zur Verschiebung um 2 nach rechts im Argument der Funktion x durch den Term $x - 2$, so ergibt sich der Term $f(x-2) = (x-1)^2$.

Verschiebt man den Term $(x-1)^2$ zusätzlich um 4 nach oben, so erhält man $h(x) = (x-1)^2 + 4 = x^2 - 2x + 5$.

Als Graph erhält man:

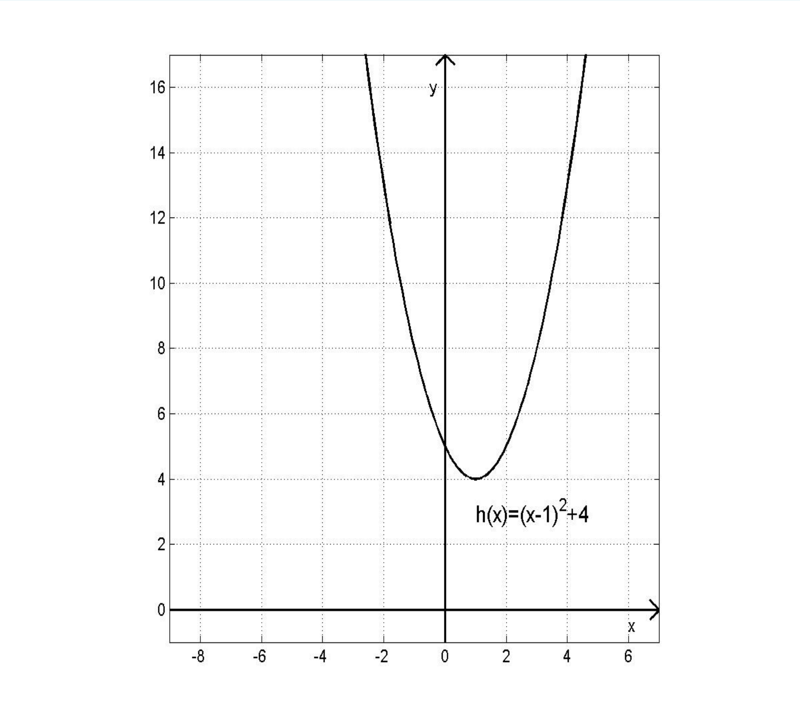


Abb 2: $h(x) = (x-1)^2 + 4$

Lösung b)

Für die vertikale Streckung des Graphen der Funktion $g(x)$ muß man den Term mit dem Faktor 2 multiplizieren.

Ersetzt man zur Verschiebung um 2 nach links im Argument der Funktion x durch den Term $x+2$, so erhält man den Term $k(x) = 2\,g(x+2) = 2\cos(x+1)$.

Als Graph erhält man:

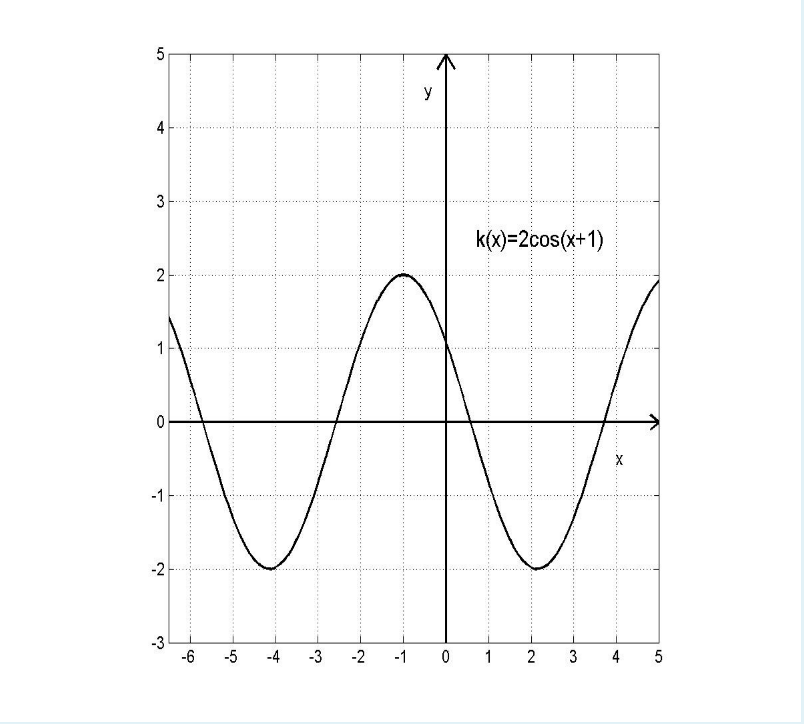


Abb 3: $k(x) = 2\cos(x+1)$

Lösung c)

Die vertikale Spiegelung des Graphen von $f(x)$ an der x-Achse erhält man durch die Transformation $f(x) \longrightarrow -f(x)$, also $i(x) = -f(x) = -(x^2 + 2x + 1) = -(x+1)^2$.

Als Graph erhält man:

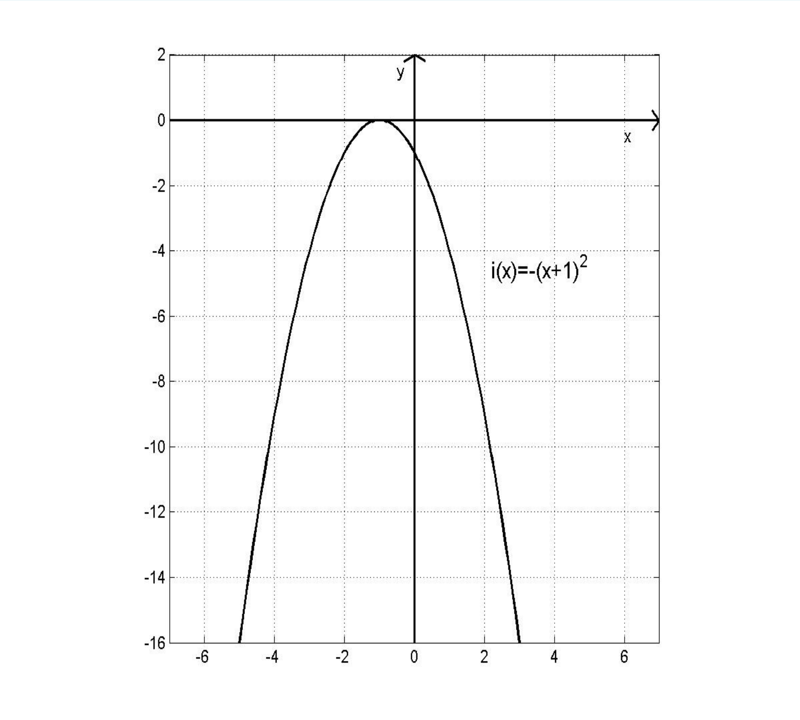


Abb 4: $i(x) = -(x+1)^2$

Lösung d)

Die horizontale Spiegelung des Graphen von $f(x)$ an der y-Achse erhält man durch die Transformation $f(x) \longrightarrow f(-x)$, also $l(x) = f(-x) = (-x+1)^2 = (x-1)^2$.

Als Graph erhält man:

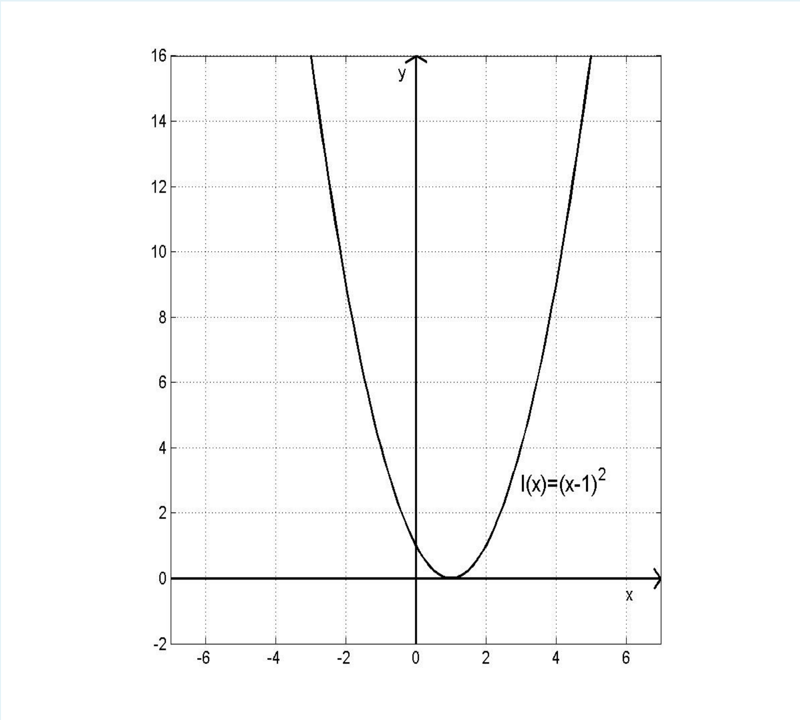


Abb 5: $l(x) = (x-1)^2$