1. DIE ABLEITUNG

Inhalt

Lernziele

In diesem Abschnitt lernen Sie den Begriff der Ableitung kennen und den Zusammenhang zwischen der Ableitung einer Funktion und der Steigung der Tangente an ihren Graphen. Sie begreifen die Ableitung als momentane Änderungsrate einer Funktion.

1.1 Die Ableitung als Tangentensteigung

In der Analysis interessiert man sich häufig für Eigenschaften von Kurven wie Extremstellen, Steigungs- oder Krümmungsverhalten. Oder man möchte einen Funktionswert an einer Stelle näherungsweise bestimmen, weil eine exakte Berechnung unnötig, aufwändig oder gar unmöglich ist. Bei all diesen Problemen ist die Ableitung einer Funktion nützlich.

Das Konzept der Ableitung einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 soll zuerst von seiner Bedeutung her beschrieben werden. Danach wird der Begriff strenger gefasst. Mathematisch präzise wird dies in diesem Kurs jedoch nicht möglich sein, weil uns der exakte Begriff des Grenzwertes nicht zur Verfügung steht. Er gehört nicht zur Schulmathematik. Denoch kann der Begriff der Ableitung so weit beschrieben werden, dass damit sehr wohl interessante und nützliche Anwendungen möglich sind. Über etliche Jahrhunderte wurde auf diese Weise gerechnet, um zum Beispiel Planetenbahnen zu bestimmen.

Zur Veranschaulichung der Funktion $f(x)$ betrachten wir ihren Graphen. Damit kann die Ableitung so beschrieben werden: Die Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 ist die *Steigung der Tangente* an den Graphen im Punkt $P=(x_0;f(x_0))$.

Achtung: Eine solche Tangente (eine sich an den Graphen anschmiegende Gerade) gibt es nicht immer. Um dies zu verstehen, müssen wir den Begriff Tangente an den Graphen im Punkt $P=(x_0;f(x_0))$ genauer erklären. Wir betrachten dazu auf dem Graphen von $f(x)$ neben dem Punkt P einen zweiten - von P verschiedenen - Punkt $Q=(x;f(x))=(x_0+h;f(x_0+h))$ und die Gerade durch P und Q, die sogenannte Sekante. Den Punkt Q stellen wir uns beweglich vor. Nun lassen wir Q in beliebiger Weise gegen P laufen (h gegen Null streben), und betrachten dabei das Verhalten der so entstehenden Sekante. In sehr vielen Fällen nähert sich die Lage der Sekante einer Endlage an, die unabhängig von der Art und Weise ist, wie wir Q gegen P laufen lassen. Wenn dies der Fall ist, bezeichnet man die durch diesen Grenzprozess entstandene Gerade als *Tangente* an den Graphen von $f(x)$ im Punkt P.

In der folgenden Visualisierung ist $f(x)=x^2-|x|+1$ und $P=(x_0;f(x_0))=(1;1)$. Verändern Sie die x-Koordinate des Punktes Q und lassen Sie so Q gegen P laufen. Überzeugen Sie sich, dass es eine Tangente an den Graphen von f im Punkt P gibt und dass die Ableitung, d.h. die Steigung der Tangente, den Wert 1 hat.

[online-only]

In der zweiten Visualisierung geht es um den Ausnahmefall, dass es keine Tangente und keine Ableitung gibt. Dazu betrachten wir die Funktion $f(x) = x^2 - |x| + 1$ diesmal im Punkt $P = (x_0; f(x_0)) = (0; 1)$. Überzeugen Sie sich, dass die Endlage der Sekante durch P und Q unterschiedlich ist, je nachdem ob wir die x $-$Koordinate des Punktes Q von der Seite der positiven Zahlen gegen $x_0 = 0$ gehen lassen oder von der Seite der negativen Zahlen.

[online-only]

Wenn sich wie in der ersten Visualisierung die Sekante einer Tangente und damit die Steigung der Sekante der Steigung der Tangente annähert, soll f in x_0 differenzierbar heißen.

f ist *in x_0 differenzierbar* (oder auch ableitbar), falls ein eindeutiges $c \in \mathbb{R}$ existiert, so dass die Steigung der Sekante

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad (h \neq 0)$$

gegen c geht für h gegen Null. Dieses c bezeichnet man dann als die *Ableitung von f in x_0* und schreibt

$$c =: f'(x_0). \tag{1.1}$$

Wichtig: Beachten Sie, dass $c = +\infty$ und $c = -\infty$ ausgeschlossen sind!

Sei f an der Stelle x_0 differenzierbar. Dann ist $c = f'(x_0)$ aus Gleichung (1.1) die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0; f(x_0))$.
Die Tangente $T(x)$ an den Graphen von f im Punkt $(x_0; f(x_0))$ hat also die Form

$$T(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Wir haben die Differenzierbarkeit in einem Punkt x_0 über die Sekantensteigung verstanden. Für die Berechnung von $f'(x_0)$ ist aber diese Veranschaulichung nicht erforderlich. Wir lernen nun einen analogen und abstrakteren Weg kennen, die Differenzierbarkeit zu definieren.

Alternative Definition der Ableitung über den Differenzialquotienten:
Für $h \neq 0$ heißt der Ausdruck $Q(h) := \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *Differenzenquotient* (er gibt - wie in _ hergeleitet - die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x_0; f(x_0))$ und $(x_0+h; f(x_0+h))$ an).
Lässt man in $Q(h)$ das h gegen Null gehen und nähert sich $Q(h)$ dabei eindeutig einem Grenzwert (auch *Limes* genannt) an, so schreibt man für diesen Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

und nennt ihn *Differenzialquotient*. Es gilt dann nach Gleichung (1.1):

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Auch hier sind natürlich $+\infty$ und $-\infty$ für $f'(x_0)$ ausgeschlossen.

Auf den Grenzwertbegriff wird im Studium genau eingegangen. Im Abschnitt Grenzwerte können Sie sich jedoch schon ein erstes Verständnis des Grenzwertes bzw. Limes verschaffen, und auch hier finden Sie eine kurze

Erklärung.

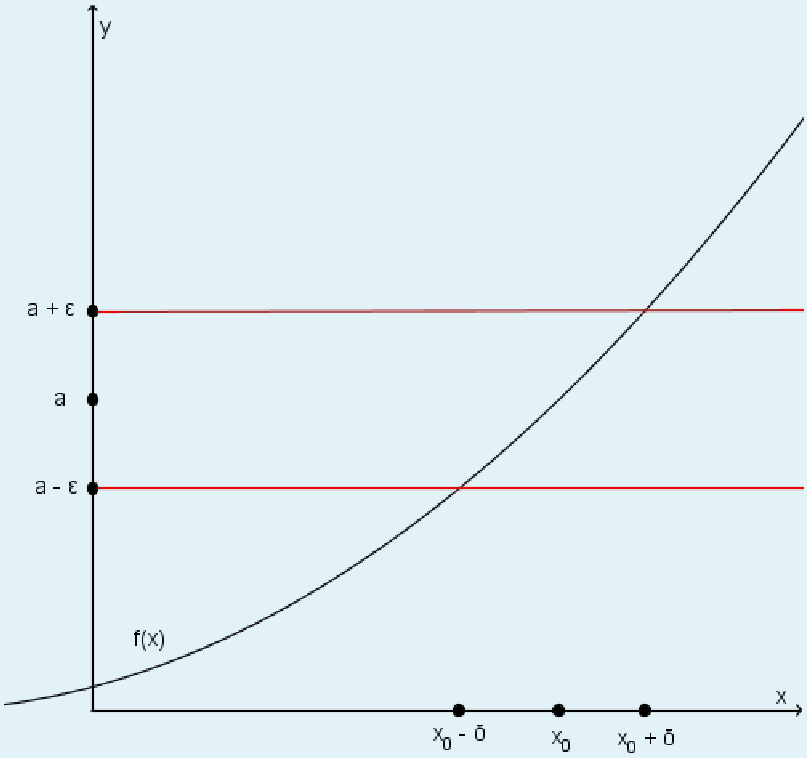
Wir haben relativ ungenau von sich annähern gesprochen. Will man sagen, dass sich ein Ausdruck $f(x)$ beliebig gut an einen Wert a annähert, wenn man sich x_0 nähert, so schreibt man

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ bedeutet mathematisch, dass für jede Toleranz $\varepsilon > 0$ ein Bereich $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ existiert mit $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so, dass

$$a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$

für alle x aus dem Intervall $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ mit $x \neq x_0$. Dies bedeutet, dass sich $f(x)$ von a um nicht mehr als ε unterscheidet, falls sich $x \neq x_0$ und x_0 um nicht mehr als δ unterscheiden. a heißt dann Grenzwert bzw. Limes.

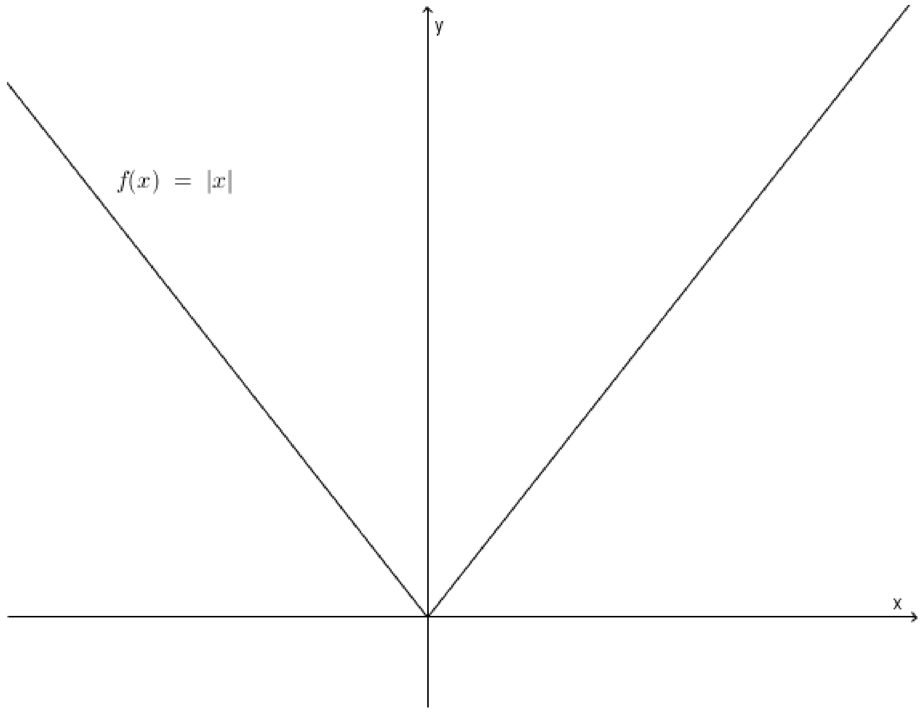


1. Sei $f(x) = 2x + 1$. Dann ist an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ und für $h \in \mathbb{R}$:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = 2(x_0 + h) + 1 - (2x_0 + 1) = 2h.$$

   Dann ist der Differenzenquotient $Q(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 2$. Da $Q(h) = 2$ konstant ist, geht $Q(h)$ gegen 2 für h gegen Null. Also ist f in jedem Punkt x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) = 2$.

2. Sei nun $f(x) = |x|$ die Betragsfunktion - also $f(x) = x$ für $x \geq 0$ und $f(x) = -x$ für $x < 0$. Für $h > 0$ ist $f(h) = h$, also $f(0 + h) - f(0) = h$ und $Q(h) = 1$. Es käme für das c aus (1.1) also nur 1 in Frage. Betrachtet man aber $h < 0$, so sieht man, dass wegen $f(0 + h) - f(0) = -h$ und $Q(h) = -1$ nur $c = -1$ in Frage käme. Man kann also kein eindeutiges c finden, dem sich $Q(h)$ annähert für h gegen Null. Also ist f in 0 nicht differenzierbar.



Ist f in jedem Punkt des Definitionsbereiches differenzierbar, so nennt man f *differenzierbar*. Da man dann in jedem Punkt x des Definitionsbereiches $f'(x)$ bilden kann, kann man f' auch als Funktion auffassen, die einem Punkt x_0 die Ableitung von f in x_0 zuordnet.

1. Die Ableitung wird zur Unterscheidung von höheren Ableitungen (wie der später eingeführten zweiten Ableitung) auch als *erste Ableitung* bezeichnet.

2. Da $f'(x_0)$ auch als Grenzwert des Differenzenquotienten berechnet werden kann, schreibt man statt $f'(x_0)$ manchmal auch $\frac{df}{dx}(x_0)$. Statt f' schreibt man auch $\frac{df}{dx}$, falls f von x abhängig ist.

3. Die Ableitung $f'(x_0)$ wird manchmal auch als $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ geschrieben. Hier ist dann $\Delta x = h$ und $\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Das Δ (Delta) steht allgemein für eine Differenz, Δx für die Differenz auf der x-Achse, Δy für die Differenz auf der y-Achse.

1.2 Die Ableitung als Änderungsrate

Manchmal betrachtet man Funktionen, die von der Zeit abhängig sind. Zum Beispiel kann man die gelaufene Strecke einer Person (die zum Zeitpunkt $t = 0$ gestartet ist) zum Zeitpunkt $t \geq 0$ mit $x(t)$ benennen. Im Zeitintervall vom Zeitpunkt t bis $t + h$ ist die durchschnittliche Geschwindigkeit offensichtlich $\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$. Lässt man nun das h immer kleiner werden, so nähert sich die Durchschnittsgeschwindigkeit im immer kürzer werdenden Zeitintervall also der momentanen Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t an. Diese wird oft mit $v(t)$ bezeichnet. Man hat also:

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = x'(t).$$

Die momentane Änderungsrate von $x(t)$ entspricht also der Geschwindigkeit $v(t)$, die über die Ableitung $x'(t)$ berechnet werden kann.
Speziell bei Funktionen, die von der Zeitvariablen abhängig sind, schreibt man statt eines Strichs für die Ableitung einen Punkt über die Funktion, also $\dot{x}(t)$ statt $x'(t)$.

1.3 Die Ableitung als lineare Approximation

Die Idee der Ableitung ist es, Funktionen lokal durch lineare Funktionen, also allgemeine Kurven durch Geraden anzunähern. Wie man die Ableitung einer Funktion zur linearen Approximation verwenden kann, lesen Sie

hier.

Nach der Definition der Differenzierbarkeit von f in x_0 ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = c.$$

Für die Differenz

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - c =: R(h)$$

muss also gelten:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = c + R(h), \tag{1.2}$$

und

$$\lim_{h\to 0} R(h) = 0.$$

Multipliziert man in (1.2) beide Seiten mit h, so erhält man

$$f(x_0+h)-f(x_0) = c\cdot h + R(h)\cdot h$$

bzw.

$$f(x_0+h) = f(x_0) + c\cdot h + R(h)\cdot h.$$

Man kann also den Funktionswert von f nahe x_0 (hier an der Stelle x_0+h) annähernd bestimmen als $f(x_0)+c\cdot h$. Der Fehler, den man dabei macht - also die Differenz zwischen dem exakten Wert $f(x_0+h)$ und dem angenäherten Wert $f(x_0)+c\cdot h$ - ist durch $R(h)\cdot h$ gegeben. Für kleine h bekommt man so also durch $f(x_0)+c\cdot h$ eine gute Näherung von $f(x_0+h)$, denn $R(h)\cdot h$ geht für $h\to 0$ gegen Null.
Dies motiviert die folgende Definition der Differenzierbarkeit von f in x_0, die zu unserer vorangegangenen Definition äquivalent ist.

f ist *in x_0 differenzierbar* (oder auch ableitbar), falls ein eindeutiges $c\in\mathbb{R}$ existiert, so dass

$$f(x_0+h) = f(x_0) + c\cdot h + R(h)\cdot h, \tag{1.3}$$

mit

$$\lim_{h\to 0} R(h) = 0.$$

Dieses c bezeichnet man dann als die *Ableitung von f in x_0* und schreibt

$$c =: f'(x_0).$$

Wichtig: Beachten Sie, dass auch hier $c=+\infty$ und $c=-\infty$ ausgeschlossen sind!

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 + 2x + 1$ im Punkt $x = 1$, indem Sie den Differenzialquotienten bestimmen!

Antwort

$f'(1) = 4.$

Lösung

Schritt 1: Nach Definition ist

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}.$$

Wir berechnen zuerst den Differenzenquotienten

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

für $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$.

Schritt 2:

$$\begin{aligned} \tfrac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \tfrac{(1+h)^2+2(1+h)+1-(1^2+2+1)}{h} \\ &= \tfrac{1+2h+h^2+2+2h+1-4}{h} \\ &= \tfrac{h^2+4h}{h} \\ &= h+4 \end{aligned}$$

Schritt 3: Nun berechnen wir den Grenzwert dieses Differenzenquotienten für $h \to 0$.

$$\lim_{h \to 0} h + 4 = 4$$

Also ist $f'(1) = 4$.

ÜBUNG 2

Sei $f(x) = x^3 + 2$. Berechnen Sie die Steigung der Tangente $T(x)$ an den Graphen von f im Punkt $(-1; f(-1))$, und geben Sie die Abbildungsvorschrift von $T(x)$ an!

Antwort

$T(x)$ besitzt die Form $T(x) = 3x + 4$ und hat die Steigung 3.

Lösung

Die Tangente $T(x)$ hat die Form $T(x) = f'(-1) \cdot (x - (-1)) + f(-1)$. Die Steigung von $T(x)$ entspricht $f'(-1)$.

Wir berechnen $f'(-1)$ über den Differenzenquotienten. Für $h \neq 0$ ist

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{(-1+h)^3 + 2 - ((-1)^3 + 2)}{h} = \frac{-1 + 3h - 3h^2 + h^3 + 2 - (-1+2))}{h} = 3 - 3h + h^2.$$

Für $h \to 0$ geht $3 - 3h + h^2$ gegen 3. Also ist

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = 3.$$

Da $f(-1) = (-1)^3 + 2 = -1 + 2 = 1$ ist, folgt

$$T(x) = f'(-1) \cdot (x - (-1)) + f(-1) = 3(x+1) + 1 = 3x + 4.$$

ÜBUNG 3

Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ sei gegeben durch $f'(x) = 2x + 1$. In welchen Stellen x aus $\mathbb{R}$ ist die Tangente an den Graphen von f parallel zur Winkelhalbierenden im ersten Quadranten?

Antwort

Die Tangente an den Graphen von f ist an der Stelle $x = 0$ parallel zur Winkelhalbierenden im ersten Quadranten.

Lösung

Die Winkelhalbierende im ersten Quadranten hat die Steigung 1. Die Tangente an den Graphen von f ist also parallel zu dieser Winkelhalbierenden, wenn sie die Steigung 1 hat.

Außerdem berechnet sich die Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x durch $f'(x)$. Gesucht sind also Stellen x mit $f'(x) = 1$.

Wir setzen an: $f'(x) = 1$, also $2x + 1 = 1$. Dies gilt nur in $x = 0$. Damit hat die Tangente an den Graphen von f nur an der Stelle $x = 0$ die Steigung 1.

ÜBUNG 4

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Berechnen Sie $f'(x)$ mit Hilfe des Differenzenquotienten. An welcher Stelle ist die Tangente an den Funktionsgraphen von f waagerecht?

Antwort

$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$. An der Stelle 0 ist die Tangente an den Funktionsgraphen von f waagerecht.

Lösung

Wir berechnen den Differenzenquotienten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{1+(x+h)^2} - \frac{1}{1+x^2}}{h} = \frac{1+x^2-(1+(x+h)^2)}{h(1+(x+h)^2)(1+x^2)} = \frac{-2x-h}{(1+(x+h)^2)(1+x^2)}$$

Für h gegen 0 geht dieser Ausdruck gegen $-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$. Damit ist

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Die Tangente an den Funktionsgraphen von f an einer Stelle x hat die Steigung $f'(x)$. Ist die Tangente waagerecht, so besitzt sie die Steigung 0. Um die gesuchte Stelle x zu finden, setzen wir also

$$f'(x) = 0.$$

Nur an der Stelle $x = 0$ ist $f'(x) = 0$. Also ist die Tangente an den Funktionsgraphen von f an der Stelle $x = 0$ waagerecht.

2. GRENZWERTE

Inhalt

Lernziele

In diesem Abschnitt lernen Sie den Grenzwert bzw. den Limes kennen, der z.B. bei der Ableitung (Differenzialquotient) verwendet wird. Sie lernen den links- und rechtsseitigen Limes an einer Stelle kennen, den Funktionsgrenzwert an einer Stelle sowie im Unendlichen und uneigentliche Grenzwerte.

2.1 Der Funktionsgrenzwert an einer Stelle

In der Definition der Ableitung wird der Grenzwertbegriff verwendet. $f'(x_0)$ wird durch

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

definiert. Wir nutzen ihn dort, um das Verhalten des Differenzenquotienten $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ für immer kleinere h zu verstehen. h zu 0 setzen geht natürlich nicht, weil man nicht durch 0 teilen kann.

Die Frage, wie sich ein Ausdruck in der Nähe einer Stelle verhält, stellt sich jedoch nicht nur beim Differenzialquotienten. Zum Beispiel taucht diese Fragestellung auf, wenn der Ausdruck $g(x)$ in $x = x_0$ gar nicht definiert ist (so wie beim Differenzialquotienten). Manchmal möchte man auch das Verhalten eines Ausdrucks $g(x)$ im Unendlichen (sowohl $+\infty$ als auch $-\infty$ - aber Vorsicht, weder $+\infty$ noch $-\infty$ sind Zahlen!) betrachten.

Wie berechnet man nun das Verhalten einer Funktion $g(x)$ für $x \to x_0$ (sprich x gegen x_0), wobei x_0 eine reelle Zahl ist? Man nimmt den Ausdruck $g(x)$ und beobachtet, wie sich der Wert $g(x)$ verhält, wenn man mit x immer näher an x_0 heranrückt. Man kann sich dabei ausschließlich von der positiven (der rechten) Seite an x_0 annähern, ausschließlich von der negativen (der linken) Seite annähern, oder auch beim Heranrücken von Seite zu Seite springen.

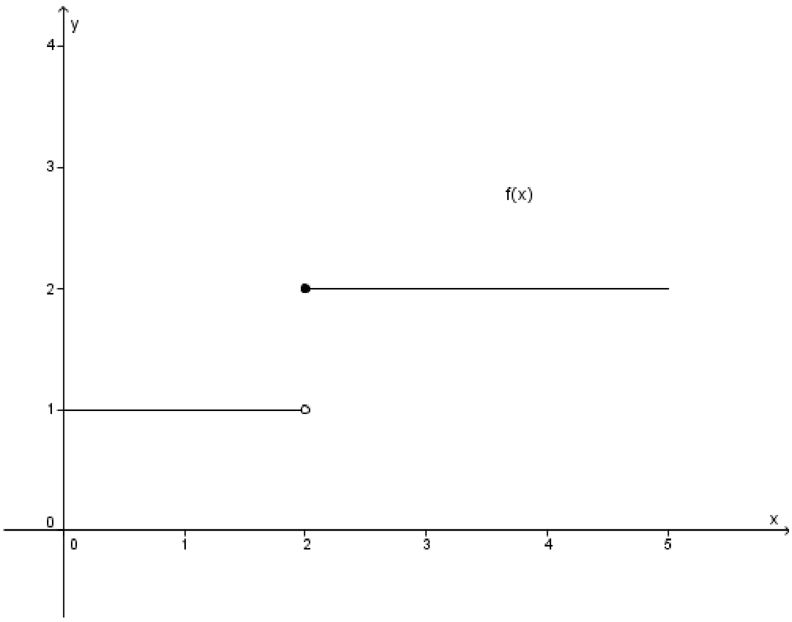
Beim Heranrücken an x_0 von der rechten Seite kann sich der Ausdruck $g(x)$ einer eindeutigen reellen Zahl annähern. Dieser Wert heißt der rechtsseitige Grenzwert von g in x_0 und man schreibt

$$\lim_{x \to x_0+} g(x)$$

für diesen Wert. Nähert man sich ausschließlich von der linken Seite an x_0 und nähert sich dabei $g(x)$ einer eindeutigen reellen Zahl an, so heißt der berechnete Grenzwert der linksseitige Grenzwert und man schreibt ihn

$$\lim_{x \to x_0-} g(x).$$

Das $+$ deutet beim rechtsseitigen Grenzwert an, dass man sich nur von der rechten, also der positiven Seite an x_0 annähert. Genauso zeigt das $-$ beim linksseiten Grenzwert an, dass man sich nur von der linken, also negativen Seite an x_0 annähert.



Ist wie im Bild $f(x) = 1$ für $x < 2$ und $f(x) = 2$ für $x \geq 2$, so ist $\lim_{x \to 2-} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 2+} f(x) = 2$.

Nur wenn rechts- und linksseitiger Grenzwert gleich sind, spricht man überhaupt vom Grenzwert von g in x_0.

Existieren der rechts- und der linksseitige Grenzwert von g in x_0 und stimmen diese beiden überein, so sagt man, dass der Grenzwert von g in x_0 existiert. Man schreibt für ihn

$$\lim_{x \to x_0} g(x)$$

und spricht: Limes $g(x)$ für x gegen x_0 .
Der Grenzwert hat dann nach Definition den gleichen Wert wie der rechtsseitige bzw. linksseitige Grenzwert von g in x_0 .
Falls $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = c$ ist, sagt man, dass $g(x)$ gegen c geht für x gegen x_0 .

Zur genauen Definition klicken Sie bitte

hier.

Die genaue Definition lautet folgendermaßen: Existiert ein $a \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$a - \varepsilon < g(x) < a + \varepsilon$$

für alle $x \neq x_0$ mit $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, so sagt man, dass

$$\lim_{x \to x_0} g(x)$$

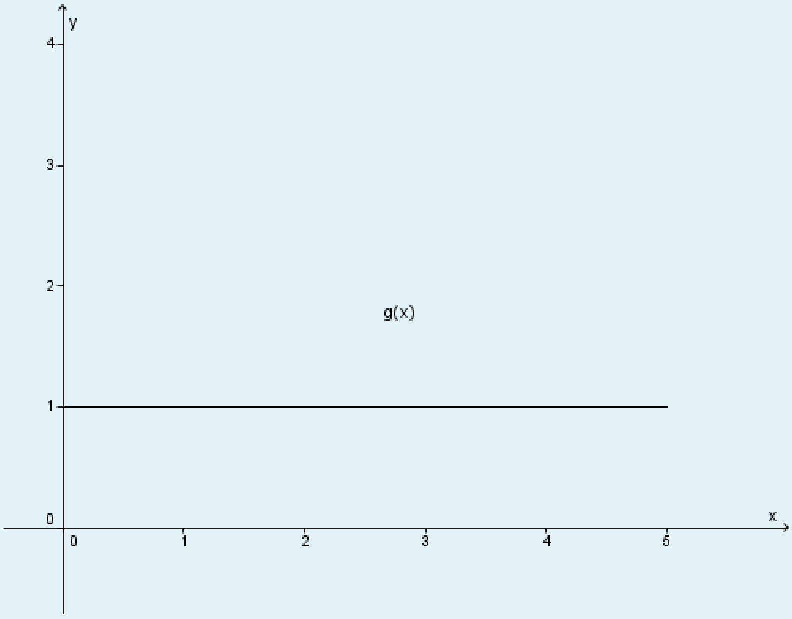
existiert und dass

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = a$$

ist. Beim rechtsseitigen Grenzwert lässt man dann nur x zu, die $x_0 < x < x_0 + \delta$ erfüllen, beim linksseitigen nur x mit $x_0 - \delta < x < x_0$.

Im Allgemeinen müssen weder die einseitigen Grenzwerte noch der Funktionsgrenzwert an einer Stelle existieren. D.h., es gibt Funktionen, bei denen ein einseitiger Grenzwert nicht existiert, und auch solche, bei denen beide einseitigen Grenzwerte nicht existieren.

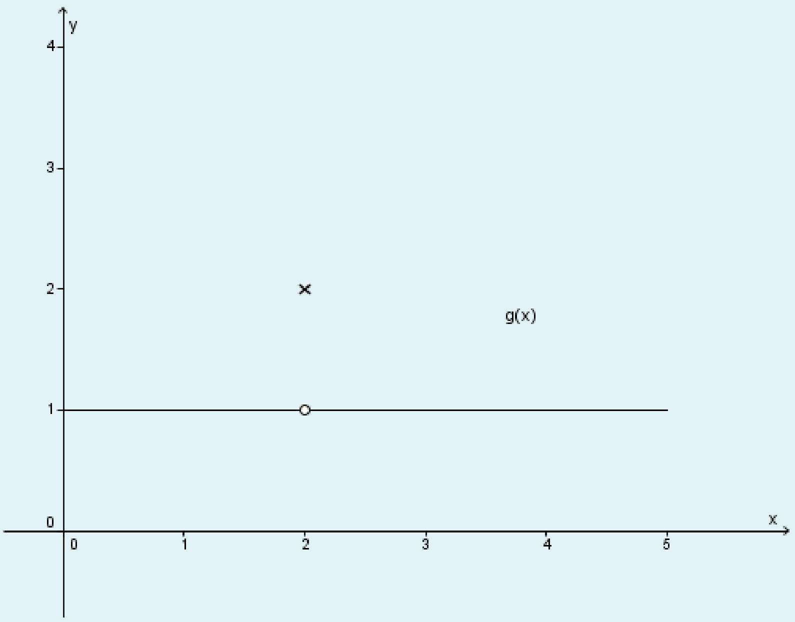
1.



Ist wie im Bild $g(x) = 1$ konstant, so ist $\lim\limits_{x \to 2-} g(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 2+} g(x) = 1$, damit also

$$\lim_{x \to 2} g(x) = 1.$$

2.



Ist wie im Bild $g(x) = 1$ für $x \neq 2$ und $g(x) = 2$ für $x = 2$, so ist $\lim\limits_{x \to 2-} g(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 2+} g(x) = 1$, damit also

$$\lim_{x \to 2} g(x) = 1.$$

Hier stimmt also $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 1$ nicht mit $g(2) = 2$ überein!

3.

Ist wie im vorangegangenen Beispiel zum links- und rechtsseitigem Grenzwert $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = 1$ und $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = 2$, so existiert $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ nicht, da links- und rechtsseitiger Grenzwert nicht übereinstimmen.

4.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}, \qquad x \to -1.$$

Der Nenner hat eine Nullstelle in -1, also ist der Quotient in -1 nicht definiert. Es gilt für $x \neq -1$:

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} = x - 1.$$

Einsetzen darf man die -1 in $f(x)$ zwar nicht, aber da $f(x)$ für $x \neq -1$ mit $x - 1$ übereinstimmt, ist die Berechnung des Verhaltens für x gegen -1 sehr einfach: Wir nutzen einfach den Ausdruck $x - 1$ und setzen dort unsere x ein. Der Grenzwert von $x - 1$ für x gegen -1 ist natürlich -2, also ist auch

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2.$$

2.2 Der Funktionsgrenzwert im Unendlichen

Man interessiert sich manchmal auch für das Verhalten von g im Unendlichen, d.h. für das Verhalten von $g(x)$ für x gegen $+\infty$ oder x gegen $-\infty$. Soll das Verhalten von $g(x)$ für x gegen $+\infty$ betrachtet werden, so setzt man immer größer werdende x in g ein. Nähert sich dann $g(x)$ (und zwar unabhängig von den x, die man genutzt hat) einem bestimmten Wert $a \in \mathbb{R}$, so sagt man, dass dieses a der Grenzwert von $g(x)$ für x gegen $+\infty$ ist, und schreibt für ihn $\lim\limits_{x \to \infty} g(x)$. Analog verfährt man für $-\infty$ - hier setzt man immer kleinere x ein, und nennt den Grenzwert $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$, sofern er existiert.

Zur genauen Definition klicken Sie bitte hier.

Die genaue Definition lautet folgendermaßen: existiert ein $a \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$a - \varepsilon < g(x) < a + \varepsilon$$

für alle $x \geq N$ ($x \leq -N$), so sagt man, dass

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) \qquad \Big(\lim_{x \to -\infty} g(x)\Big)$$

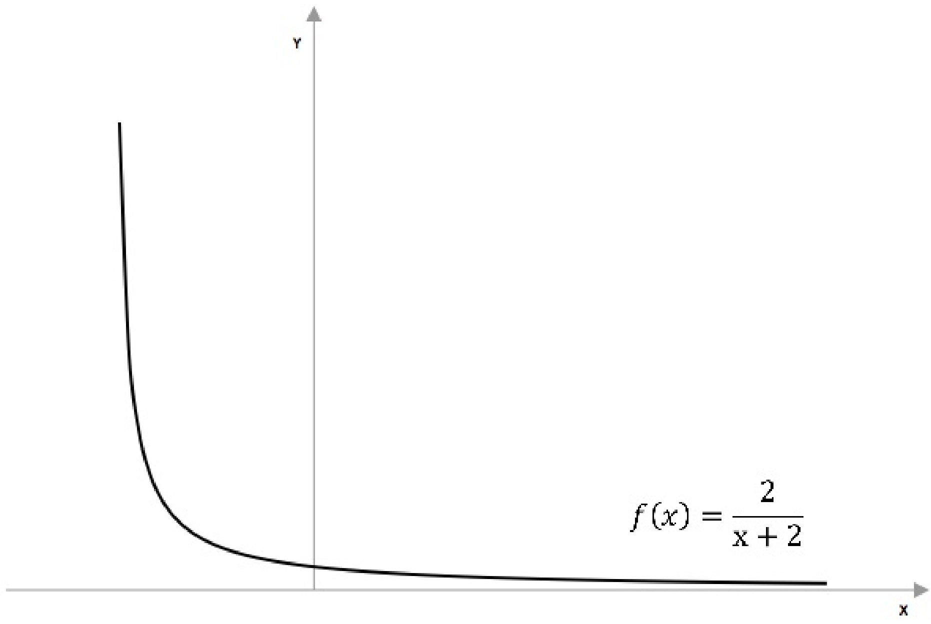
existiert und dass

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = a \qquad \Big(\lim_{x \to -\infty} g(x) = a\Big)$$

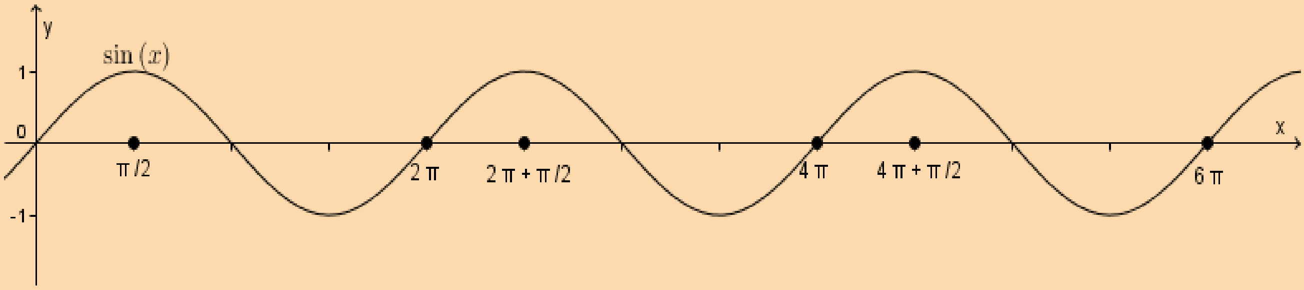
ist.

$$f(x) = \frac{2}{x+2}, \qquad x \to +\infty.$$

Der Nenner $(x+2)$ von $f(x)$ wächst unbeschränkt, wenn man x gegen $+\infty$ schickt. Damit strebt $f(x)$ gegen Null, d.h. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.



Der Grenzwert $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ oder $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ einer Funktion g muss im Allgemeinen nicht existieren. Z.B. strebt $\sin x$ nicht gegen einen festen Wert für x gegen $+\infty$. Denn setzt man der Reihe nach alle natürlichen Vielfachen von 2π ein, so ist $\sin x$ dort stets 0. Addiert man auf diese Vielfachen jedoch jeweils $\frac{\pi}{2}$ und setzt diese neuen Stellen in $\sin x$ ein, so erhält man stets 1 als Funktionswert. Es gibt also keine Zahl, der sich alle Funktionswerte für große x annähern.



2.3 Uneigentliche Grenzwerte

Bei vielen Funktionen ist es auch so, dass $g(x)$ gegen $+\infty$ oder $-\infty$ strebt, falls man sich von der rechten oder linken Seite an x_0 annähert, oder für x gegen $+\infty$ oder $-\infty$. In diesem Fall spricht man von einem uneigentlichen Grenzwert. Schreibweisen sind dann zum Beispiel

$$\lim_{x\to x_0+} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

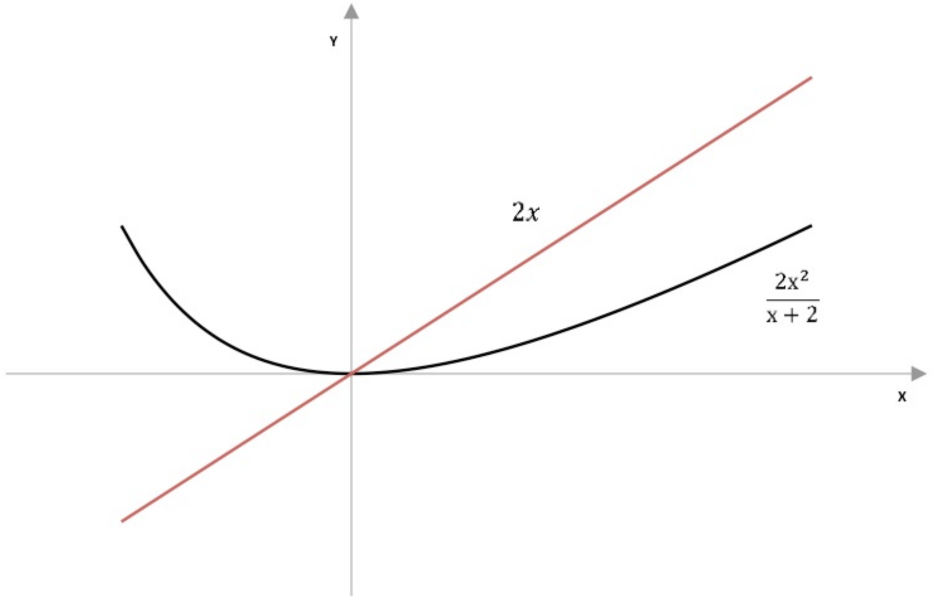
usw.

1. $$f(x) = \frac{2x^2}{x+2}, \qquad x \to +\infty.$$

   Es ist

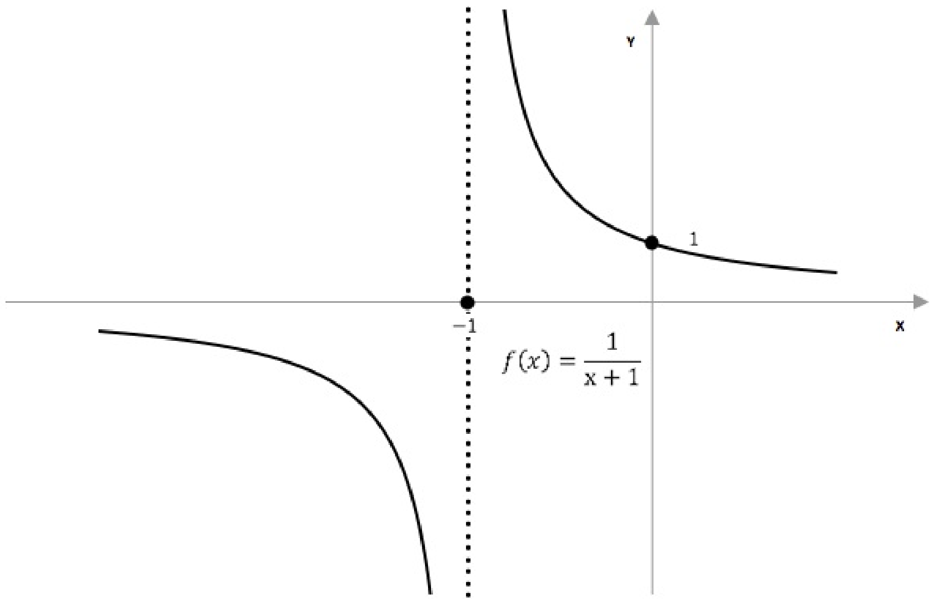
   $$\frac{2x^2}{x+2} = x \cdot \frac{2x}{x+2}.$$

   Da $\frac{2x}{x+2} = 2 - 2 \cdot \frac{2}{x+2}$ gegen 2 geht für $x \to \infty$ (wir haben oben eingesehen, dass $\frac{2}{x+2}$ gegen Null geht!), ist es für x genügend groß immer größer als 1. Dann ist das Produkt $x \cdot \frac{2x}{x+2}$ aber für genügend große x immer größer als x. Also ist $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.



2.
$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \qquad x \to -1.$$

Der Nenner hat eine Nullstelle in -1, deswegen kann f in -1 nicht ausgewertet werden. Wir nähern uns zuerst von der rechten Seite an -1 an. Wir schreiben für ein $x > -1$: $x = -1 + h$, mit h positiv. Dann ist $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{h}$. Je näher wir an -1 herankommen, desto kleiner wird h, und desto größer wird $\frac{1}{h}$. Der Ausdruck ist sogar unbeschränkt und strebt gegen $+\infty$. Damit ist $\lim\limits_{x \to -1+} \frac{1}{x+1} = +\infty$. Nähern wir uns von der linken Seite an -1, so kann man x schreiben als $-1 - h$, mit h positiv. Dann ist aber $\frac{1}{x+1} = -\frac{1}{h}$, und dieser Ausdruck strebt gegen $-\infty$, je kleiner h wird. Also ist $\lim\limits_{x \to -1-} \frac{1}{x+1} = -\infty$. Da die rechts- und linksseitigen uneigentlichen Grenzwerte von f verschieden sind, existiert weder ein Grenzwert noch ein uneigentlicher Grenzwert von f für $x \to -1$.



> Weitere Beispiele zur Bestimmung von uneigentlichen Grenzwerten finden Sie z.B. in Übung 3.

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Überprüfen Sie, ob $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ existiert.

Antwort

$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ existiert nicht.

Lösung

Schritt 1: Wir überprüfen, ob rechts- und linksseitiger Grenzwert von $\frac{|x|}{x}$ in 0 existieren, und ob diese gegebenenfalls gleich sind.

Schritt 2: Für $x > 0$ ist $\frac{|x|}{x} = 1$. Also existiert der rechtsseitige Grenzwert von $\frac{|x|}{x}$ in 0, und

$$\lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0+} 1 = 1.$$

Schritt 3: Für $x < 0$ ist $\frac{|x|}{x} = -1$. Also existiert der linksseitige Grenzwert von $\frac{|x|}{x}$ in 0, und

$$\lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0-} -1 = -1.$$

Schritt 4: Da rechts- und linksseitiger Grenzwert von $\frac{|x|}{x}$ in 0 nicht übereinstimmen, existiert $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ nicht.

ÜBUNG 2

Überprüfen Sie, ob $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{x+2}$ existiert, und bestimmen Sie diesen Grenzwert gegebenenfalls.

Antwort

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{x+2}$ existiert und $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{x+2} = 2.$

Lösung

Schritt 1: Wir formen zuerst den Ausdruck $\frac{2x}{x+2}$ um. Für $x > 0$ ist

$$\frac{2x}{x+2} = \frac{2x}{x+2} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{2}{1+\frac{2}{x}}.$$

Schritt 2: Der Nenner $1 + \frac{2}{x}$ des Quotienten $\frac{2}{1+\frac{2}{x}}$ geht für $x \to \infty$ gegen 1, das heißt

$$\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{2}{x}) = 1.$$

Schritt 3: Der Zähler 2 des Quotienten $\frac{2}{1+\frac{2}{x}}$ ist konstant, also ist

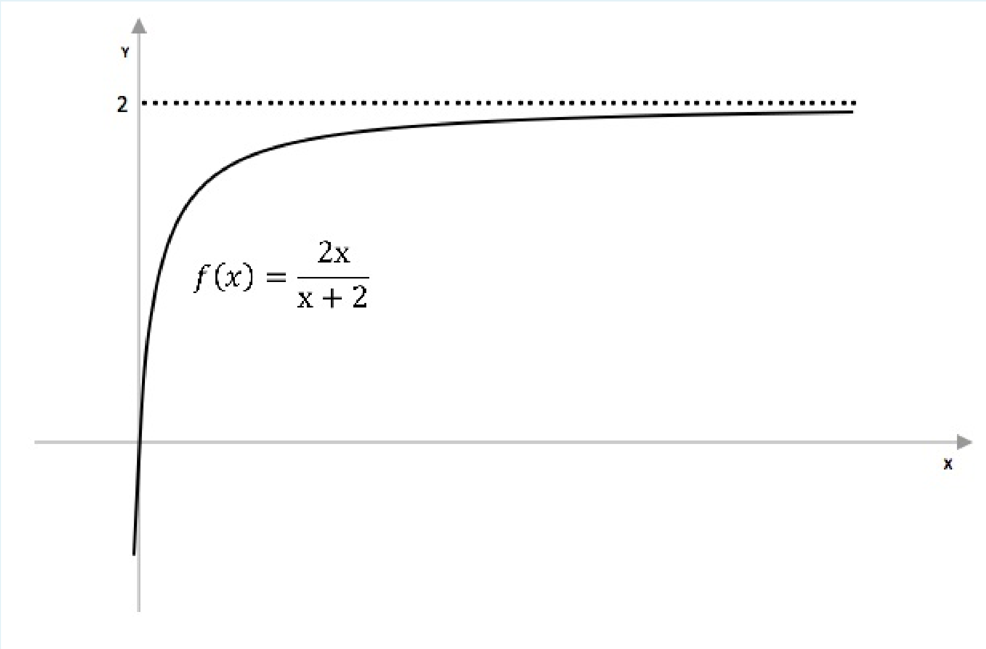
$$\lim_{x\to\infty} 2 = 2.$$

Schritt 4: Da der Grenzwert des Nenners 1 ist und damit nicht 0, berechnet sich der Grenzwert des Quotienten als Quotient der Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\frac{2}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 2}{\lim\limits_{x\to\infty} (1+\frac{2}{x})} = 2.$$

Damit ist dann

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x+2} = 2.$$



Y
2
$f(x) = \frac{2x}{x+2}$
x

ÜBUNG 3

Überprüfen Sie, ob $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3+2x+1}{-x^2-x+2}$ existiert, und bestimmen Sie diesen Grenzwert gegebenenfalls. Wie sieht es aus mit $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x^2-x+2}{x^3+2x+1}$?

Antwort

Der Grenzwert existiert im uneigentlichen Sinn, und es gilt $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3+2x+1}{-x^2-x+2} = \infty$. Weiter ist $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x^2-x+2}{x^3+2x+1} = 0.$

Lösung

Die Funktion $f(x) := \frac{x^3+2x+1}{-x^2-x+2}$ ist ein Quotient der Polynome x^3+2x+1 und $-x^2-x+2$, also eines Polynoms vom Grad 3 und eines Polynoms vom Grad 2.

Da ein Grenzwert gegen $-\infty$ betrachtet wird, teilen wir Zähler und Nenner von $f(x)$ durch x^l, wobei l der niedrigere der beiden Polynomgrade ist.

Hier ist $l = 2$. Wir teilen also Zähler und Nenner von $f(x)$ durch x^2 und erhalten:

$$f(x) = \frac{x^3+2x+1}{-x^2-x+2} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{x^3+2x+1}{-x^2-x+2} = \frac{x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{-1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}.$$

Für $x \to -\infty$ gehen $\frac{2}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $-\frac{1}{x}$ und $\frac{2}{x^2}$ gegen Null.

$x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$ geht also gegen $-\infty$ für x gegen $-\infty$, $-1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$ geht gegen -1 für x gegen $-\infty$.

Da der Grenzwert des neuen Nenners die reelle Zahl -1 ist, kann man anschaulich die Grenzwerte von Zähler und Nenner durcheinander teilen. Wir erhalten:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x+1}{-x^2-x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{-1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} = \infty.$$

Der Grenzwert ist also ein uneigentlicher Grenzwert.

Da $\frac{-x^2-x+2}{x^3+2x+1}$ der Kehrwert von $\frac{x^3+2x+1}{-x^2-x+2}$ ist, und $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x+1}{-x^2-x+2} = \infty$ ist, muss

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2-x+2}{x^3+2x+1} = 0.$$

gelten. Um dies herzuleiten, hätte man auch analog zum ersten Grenzwert

$$\frac{-x^2-x+2}{x^3+2x+1} = \frac{-1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

bilden können. Da $\lim\limits_{x\to-\infty} -1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2} = -1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2} = -\infty$, muss der Quotient gegen Null gehen.

ÜBUNG 4

Überprüfen Sie, ob $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x}{x+1}$ existiert, und bestimmen Sie diesen Grenzwert gegebenenfalls.

Antwort

$\lim\limits_{x \to -1} \frac{x}{x+1}$ existiert nicht.

Lösung

Schritt 1: Wir schreiben

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}. \tag{1}$$

Schritt 2: Aus dem im Abschnitt über Grenzwerte Berechneten wissen wir, dass

$$\lim_{x\to -1+} \frac{1}{x+1} = +\infty$$

und

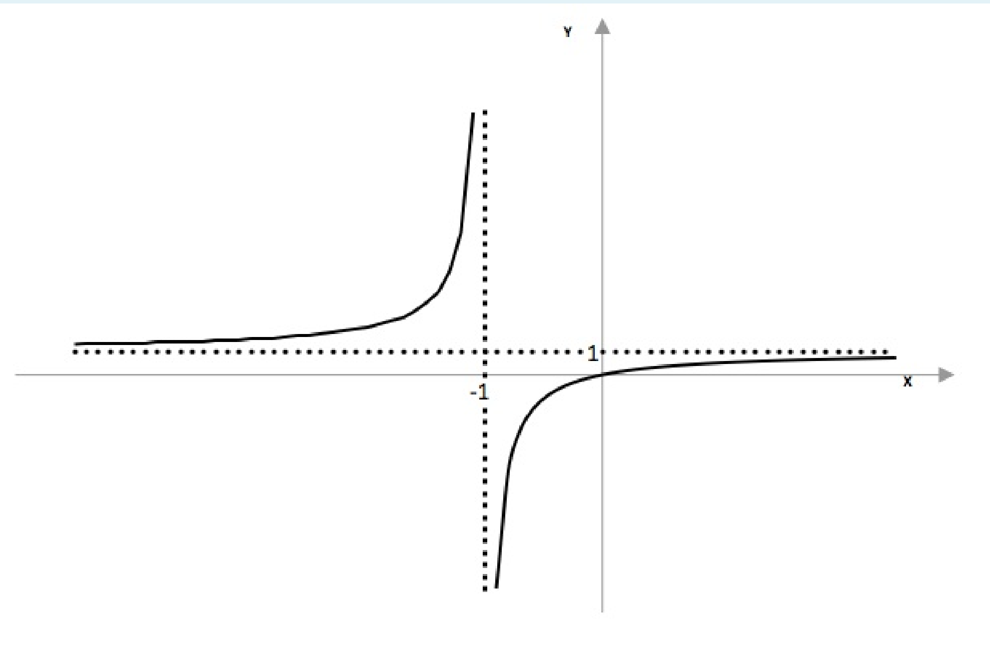
$$\lim_{x\to -1-} \frac{1}{x+1} = -\infty.$$

Schritt 3: Nun können wir mit der Gleichung (1) sofort schlussfolgern, dass

$$\lim_{x\to -1+} \frac{x}{x+1} = -\infty$$

und

$$\lim_{x\to -1-} \frac{x}{x+1} = +\infty.$$



3. ABLEITUNG ELEMENTARER FUNKTIONEN

Lernziele

In diesem Abschnitt lernen Sie die Ableitungen einiger elementarer Funktionen kennen.

Wir wissen nun prinzipiell, wie wir zu einer gegebenen Funktion f die Ableitung f' berechnen können - nämlich als den Grenzwert des Differenzenquotienten. Zu vielen Funktionen kann man so die Ableitung berechnen.

> Betrachten wir die Funktion $f(x) = c$, wobei c eine feste, reelle Zahl sein soll. Wir berechnen:
>
> $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$
>
> Leitet man eine konstante Funktion ab, so ergibt dies also die konstante Nullfunktion.

Die nächst komplizierteren Funktionen die wir ableiten wollen, sind die Monome und Polynome.

> 1. Nehmen wir uns als Erstes die Funktion $f(x) = x$ vor. Es ist
>
> $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1.$$
>
> 2. Nun sei $f(x) = x^2$, also quadratisch. Wir berechnen:
>
> $$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 2x + h \\ &= 2x. \end{aligned}$$

Für höhere Exponenten ist die folgende Überlegung hilfreich. Ist $f(x) = x^n$ mit $n \geq 3$, so ist $(x+h)^n$ von

der Form $x^n + nx^{n-1}h +$Rest, wobei der Rest eine Summe von Vielfachen von Potenzen von h der Ordnung 2 oder höher ist. (Dies kann man mit der allgemeinen binomischen Formel einsehen, die eine Verallgemeinerung der ersten binomischen Formel ist. Für $n = 3$ gilt z.B.: $(x+h)^3 = (x+h) \cdot (x+h)^2 = (x+h) \cdot (x^2 + 2xh + h^2) = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$.) Die Ableitung berechnet sich dann zu nx^{n-1}.
Im nächsten Abschnitt lernen Sie die Produktregel kennen, mit der Sie die Ableitung von x^n auch ohne die binomische Formel aus der Ableitung von x herleiten können.

> Wenden wir uns nun der Funktion $\frac{1}{x}$ zu. Diese ist in $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert. Sei $x \neq 0$ und h genügend klein. Dann ist
>
> $$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} \\ &= \frac{1}{h} \cdot \frac{x-(x+h)}{x(x+h)} \\ &= \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{x(x+h)} \\ &= -\frac{1}{x(x+h)}, \end{aligned}$$
>
> also
>
> $$f'(x) = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

Für die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$) erhalten wir in $x > 0$ und für h genügend klein:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \sqrt{x+h} - \sqrt{x} \\ &= \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{x+h-x}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{h}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}, \end{aligned}$$

also

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.$$

Damit ist

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Wie man an dieser Rechnung sieht, kann die Wurzelfunktion in 0 nicht differenzierbar sein.

Damit kennen wir schon die Ableitungen einiger elementarer Funktionen. Die folgenden, in einer Tabelle zusammengefassten Ableitungen sollten Sie kennen.

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$	Bedingung an x
$c \ (c \in \mathbb{R})$	0	
$x^n \ (n \in \mathbb{N}_0)$	nx^{n-1}	
$x^n \ (n \in \mathbb{Z}, n < 0)$	nx^{n-1}	$x \neq 0$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
e^x	e^x	
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$a^x \ (a > 0)$	$\ln a \cdot a^x$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Zeigen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, dass die Ableitung von $f(x) = x^3$ die Funktion $3x^2$ ist, wie in der Tabelle angegeben.

Lösung

Schritt 1: Für ein festes $x \in \mathbb{R}$ und $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ berechnen wir den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2.$$

Schritt 2: Nun lassen wir h gegen 0 gehen.

$$\lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2$$

Also ist $f'(x) = 3x^2$.

ÜBUNG 2

Zeigen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, dass die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x^2}$ die Funktion $-\frac{2}{x^3}$ ist, wie in der Tabelle angegeben.

Lösung

Schritt 1: Für ein festes $x \in \mathbb{R}$ und $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ berechnen wir den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \frac{x^2 - (x+h)^2}{x^2(x+h)^2 h} = -\frac{2x+h}{x^2(x+h)^2}$$

Schritt 2: Nun lassen wir h gegen 0 gehen.

$$\lim_{h \to 0} -\frac{2x+h}{x^2(x+h)^2} = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

Also ist $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$.

ÜBUNG 3

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ in $x = 0$ nicht differenzierbar ist.

Lösung

Schritt 1: Für $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ berechnen wir den Differenzenquotienten

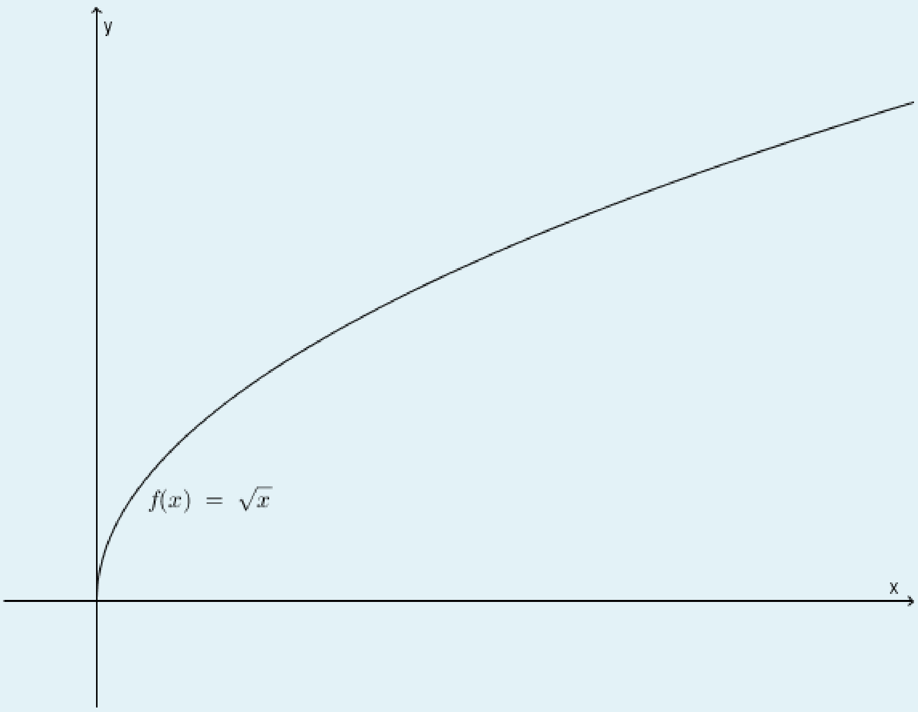
$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}.$$

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

Schritt 2: Wir überprüfen nun das Verhalten des Differenzenquotienten für h gegen 0.

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

Da wir $+\infty$ als Wert für die Ableitung ausgeschlossen hatten, ist $f(x)$ in $x=0$ also nicht differenzierbar.



Wie man im Bild erkennen kann, ist die y-Achse tangential an den Graphen von $\sqrt{x}$ im Punkt $(0;0)$.

ÜBUNG 4

Sei $f(x) = |x|$ die Betragsfunktion ($|x| := x$ für $x \geq 0$ und $|x| := -x$ für $x < 0$). Bestimmen Sie die Stellen $x \in \mathbb{R}$, an denen f differenzierbar ist, und geben Sie in diesen Punkten $f'(x)$ an.

Antwort

f ist in allen Punkten $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar mit $f'(x) = -1$ für $x < 0$, $f'(x) = 1$ für $x > 0$. In 0 ist f nicht differenzierbar.

Lösung

Wir betrachten zuerst den Fall $x < 0$. In diesem Fall ist $f(x) = -x$. Für h klein genug (z.B. $|h| \leq \frac{|x|}{2}$) ist stets $x + h < 0$. Damit ist dann $f(x+h) = -(x+h)$ und folglich

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = \lim_{h \to 0} -1 = -1.$$

Damit ist f in x differenzierbar mit $f'(x) = -1$.

Nun betrachten wir den Fall $x > 0$. Hier ist $f(x) = x$. Für h klein genug (wie oben z.B. $|h| \leq \frac{|x|}{2}$) ist stets $x + h > 0$, also $f(x+h) = x + h$. Wir erhalten:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1.$$

Damit ist f in x differenzierbar mit $f'(x) = 1$.

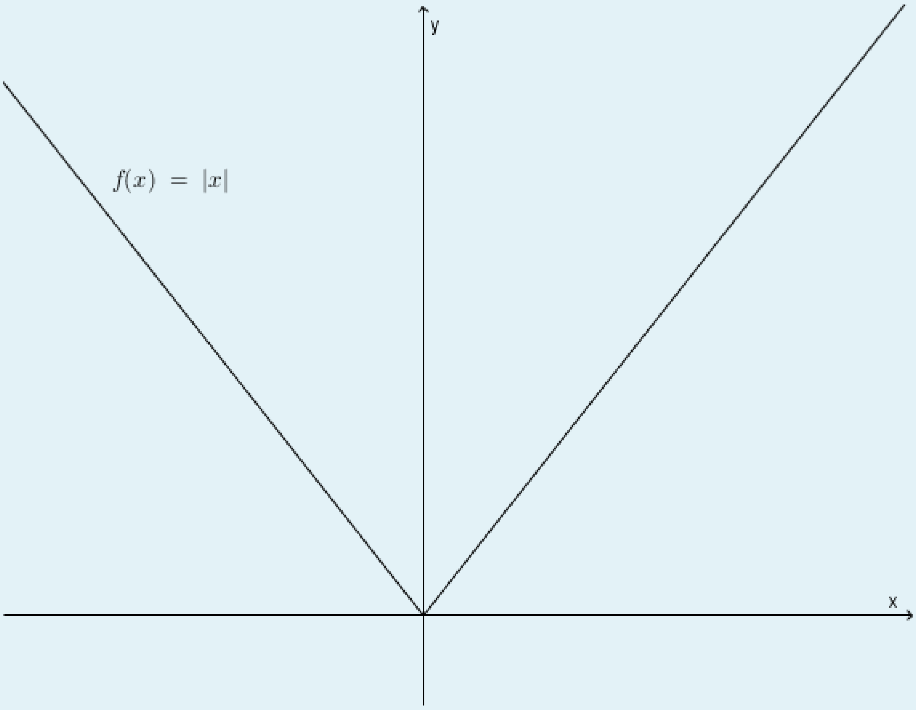
Wir kommen zum Fall $x = 0$. Es ist $f(0) = 0$. Ist $h > 0$, so ist $f(0+h) = h$, ist $h < 0$, so ist $f(0+h) = -h$.

Wir betrachten nun den links- und rechtsseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten.

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{h}{h} = 1,$$

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Damit stimmen links- und rechtsseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten nicht überein. Die Ableitung $f'(0)$ existiert also nicht, und damit ist f in 0 nicht differenzierbar.



Wie man im Bild sehen kann, ist die Gerade $T(x) = -x$ in jedem Punkt $(x_0; |x_0|)$ tangential an den Graphen von f, falls $x_0 < 0$. In einem Punkt $(x_0; |x_0|)$ mit $x_0 > 0$ ist hingegen $T(x) = x$ tangential. In $(0; 0)$ kann keine Tangente an den Graphen von f gelegt werden.

4. REGELN DER DIFFERENTIATION

Lernziele In diesem Abschnitt lernen Sie gängige Regeln zur Ableitung von Summen, Vielfachen, Produkten, Quotienten und Verkettungen von Funktionen kennen.

Aus den vorangegangenen Abschnitten wissen Sie, wie man die Ableitung einer Funktion berechnet, und Sie haben die Ableitungen wichtiger elementarer Funktionen kennengelernt. Für zusammengesetzte Funktionen gibt es Regeln, mit denen das Ableiten der zusammengesetzten Funktion auf das Ableiten der einzelnen Teile reduziert wird.
Sind f und g differenzierbare Funktionen, so ist

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\\ &= f'(x)+g'(x).\end{aligned}$$

Summen differenzierbarer Funktionen sind also differenzierbar. Wie ihre Ableitung berechnet wird, beschreibt die Summenregel.

Summenregel:
Für differenzierbare Funktionen f und g ist

$$(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x).$$

Damit ist auch jede endliche Summe von differenzierbaren Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ wieder differenzierbar:

$$(f_1+f_2+\ldots f_n)' = {f_1}'+{f_2}'+\ldots {f_n}'.$$

> Wir berechnen die Ableitung der Funktion $f(x)=x^3+x+1$. Diese Funktion ist die Summe der Funktionen x^3, x und der konstanten Funktion 1. Nach der Summenregel ist
>
> $$f'(x)=3x^2+1.$$

Multipliziert man eine differenzierbare Funktion f mit einer reellen Zahl c, so ist die Produktfunktion differenzierbar. Die Ableitung berechnet man zu

$$(c \cdot f)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)}{h} = c \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot f'(x).$$

Die Faktorregel fasst diesen Sachverhalt zusammen.

Faktorregel:
Für eine differentierbare Funktion f und $c \in \mathbb{R}$ ist

$$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x).$$

Zur Ergänzung ein Rap über die Faktorregel.

[video-online-only]

Wie Produkte differenzierbarer Funktionen abgeleitet werden, beschreibt die Produktregel.

Produktregel:
Sind f und g differenzierbare Funktionen, so ist

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Zur Ergänzung ein Rap über die Produktregel.

[video-online-only]

Herleitung

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x) &= \lim_{h \to 0} \tfrac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \tfrac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \tfrac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \tfrac{(f(x+h) - f(x)) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot (g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\tfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \tfrac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\
&= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

Wir berechnen als Beispiel die Ableitung der Funktion $F(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \sin x$. Diese ist das Produkt $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ der differenzierbaren Funktionen $f(x) = \frac{1}{x^2}$ und $g(x) = \sin x$. Die Ableitung von $f(x)$ ist $-\frac{2}{x^3}$, die Ableitung von $g(x)$ ist $\cos x$. Dann ist

$$F'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = -\frac{2}{x^3} \cdot \sin x + \frac{1}{x^2} \cdot \cos x.$$

Im vorigen Abschnitt ist dargelegt, dass die Ableitung jeder konstanten Funktion 0 ist. Nach der Produktregel ist also, falls konstant $g(x) = c$ gilt:

$$(c \cdot f)'(x) = (g \cdot f)'(x) = g'(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x) = 0 \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = c \cdot f'(x).$$

Die Faktorregel ist also ein Spezialfall der Produktregel.

Manchmal möchte man auch verkettete Funktionen der Art $f(g(x))$ ableiten (Die Verkettung ist in Kapitel VI, Abschnitt 8 dargestellt). Bei einer solchen Komposition nennt man f die äußere Funktion und g die innere Funktion. Ein Beispiel für eine solche verkettete Funktion wäre mit $f(y) = e^y$, $y = g(x) = x^2$: $f(g(x)) = e^{x^2}$. Man setzt also $g(x)$ in f ein. Oft wird auch $(f \circ g)(x)$ (sprich: f Kringel g) statt $f(g(x))$ geschrieben.

Die Ableitung der Komposition zweier Funktionen führt auf die Kettenregel.

Kettenregel:
Sind f und g differenzierbare Funktionen, so ist

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Man bildet also f' an der Stelle $g(x)$ sowie g' an der Stelle x und multipliziert diese beiden Werte miteinander.

1. Wir berechnen als Beispiel die Ableitung der Funktion $\sin(x^2)$. Setzen wir als äußere Funktion $f(y) = \sin y$ und als innere Funktion $g(x) = x^2$, so ist $f(g(x)) = \sin(x^2)$. Wir können also die Kettenregel benutzen. Zunächst ist $f'(y) = \cos y$. Für $y = g(x) = x^2$ ergibt das:

$$f'(g(x)) = \cos(g(x)) = \cos(x^2).$$

Nun müssen wir noch die Ableitung von g berechnen. Wir erhalten:

$$g'(x) = 2x.$$

Nach der Kettenregel ist dann die Ableitung von $f(g(x)) = \sin(x^2)$:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 2x\cos(x^2).$$

Wenn man ein wenig Erfahrung beim Ableiten von Funktionen gesammelt hat, braucht man natürlich nicht mehr diese vielen kleinen Einzelschritte zu gehen! Die Rechnung kann man in etwa auf die letzte Zeile des Beispieles reduzieren.

2. Kennt man die Ableitung einer Funktion $f(x)$, so kennt man auch die Ableitung von $\frac{1}{f(x)}$. Sei f differenzierbar und $f(x) \neq 0$ und sei $h(y) = \frac{1}{y}$. Dann ist $\frac{1}{f(x)} = (h \circ f)(x)$ nach der Kettenregel differenzierbar und

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = h'(f(x)) \cdot f'(x) = -\frac{1}{(f(x))^2} \cdot f'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}.$$

Wir haben also die folgenden Ableitungsregeln:

Funktion	Ableitung	Bedingung
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$	
$c \cdot f(x)$	$c \cdot f'(x)$	
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	
$(f \circ g)(x)$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$	
$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$	$f(x) \neq 0$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$	$g(x) \neq 0$

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $h(x) = (1-x^2)^9$ mit der Kettenregel.

Antwort

$h'(x) = -18x(1-x^2)^8.$

Lösung

Schritt 1: Wir versuchen, h als Verkettung von Funktionen darzustellen, deren Ableitung wir kennen.

Setzen wir als äußere Funktion $f(y) = y^9$ und als innere Funktion $g(x) = 1-x^2$, so ist $f(g(x)) = (1-x^2)^9 = h(x)$. Wir können also die Kettenregel

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

benutzen.

Zunächst ist

$$f'(y) = 9y^8.$$

Für $y = g(x) = 1-x^2$ ergibt das:

$$f'(g(x)) = 9(g(x))^8 = 9(1-x^2)^8.$$

Nun müssen wir noch die Ableitung von g berechnen. Wir erhalten:

$$g'(x) = -2x.$$

Nach der Kettenregel ist dann

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 9(1-x^2)^8 \cdot (-2x) = -18x(1-x^2)^8.$$

ÜBUNG 2

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $h(x) = xe^{2x}$.

Antwort

$h'(x) = (1+2x)e^{2x}$.

Lösung

Schritt 1: Wir versuchen, h als Summe, Produkt oder Verkettung von Funktionen darzustellen, deren Ableitung wir kennen.

$h(x)$ ist das Produkt von x und e^{2x}.

Die Ableitung von x ist 1. Wir kennen außerdem die Ableitung der Funktion $f(y) = e^y$, und die Ableitung der Funktion $g(x) = 2x$. Mit der Kettenregel können wir damit die Ableitung von e^{2x} berechnen.

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) = 2e^{2x}$$

Wir können jetzt mit der Produktregel die Ableitung von h bestimmen.

$$h'(x) = 1 \cdot (f \circ g)(x) + x \cdot (f \circ g)'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = (1+2x)e^{2x}.$$

ÜBUNG 3

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = a^x$ (für $a > 0$), indem Sie a^x mit Hilfe der Exponentialfunktion e^x darstellen.

Antwort

$f'(x) = \ln a \cdot a^x$.

Lösung

Wir schreiben zuerst $a^x = e^{x \cdot \ln a}$.

Wir sehen, dass wir f mit der Kettenregel ableiten können. Die äußere Funktion ist e^y, die innere $x \ln a$.

Dann ist

$$(a^x)' = \left(e^{x \cdot \ln a}\right)' = \ln a \cdot e^{x \cdot \ln a} = \ln a \cdot a^x .$$

Dies ist die Formel, die Sie aus dem vorangegangenen Abschnitt kennen.

ÜBUNG 4

Beweisen Sie die Quotientenregel: sind f, g differenzierbare Funktionen und ist $g(x) \neq 0$, so ist

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Benutzen Sie die Produktregel und die Regel zur Ableitung des Kehrwerts einer Funktion!

Lösung

Wir schreiben den Quotienten als Produkt:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)'.$$

Es folgt mit der Produktregel

$$\left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)}\right)'.$$

Mit der Ableitung von $\frac{1}{g(x)}$ ergibt sich dann:

$$f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} - f(x) \cdot \frac{g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

5. MONOTONIEVERHALTEN VON FUNKTIONEN

Inhalt

Lernziele

In diesem Abschnitt lernen Sie den Zusammenhang zwischen der 1. Ableitung einer Funktion und ihrem Monotonieverhalten kennen und wie man Bereiche bestimmt, in denen eine Funktion wächst oder fällt.

5.1 Monotonie

In der Analysis interessiert man sich häufig dafür, in welchen Bereichen eine Funktion f wächst oder fällt. Z.B. ist dies interessant, wenn man nach Extremstellen sucht. Nun soll das Monotonieverhalten einer Funktion f mit ihrer Ableitung f' in Zusammenhang gebracht werden (der Begriff Monotonie wurde bereits in Kapitel VI, Abschnitt 1.4 eingeführt).

Sei f eine auf dem Intervall I monoton steigende Funktion und x aus I. Dann ist also

$$f(x+h)-f(x)\geq 0 \quad \text{für alle} \quad h>0 \quad \text{bzw.}$$

$$f(x+h)-f(x)\leq 0 \quad \text{für alle} \quad h<0$$

mit $x+h\in I$. Dann ist aber der Differenzenquotient in jedem der beiden Fälle

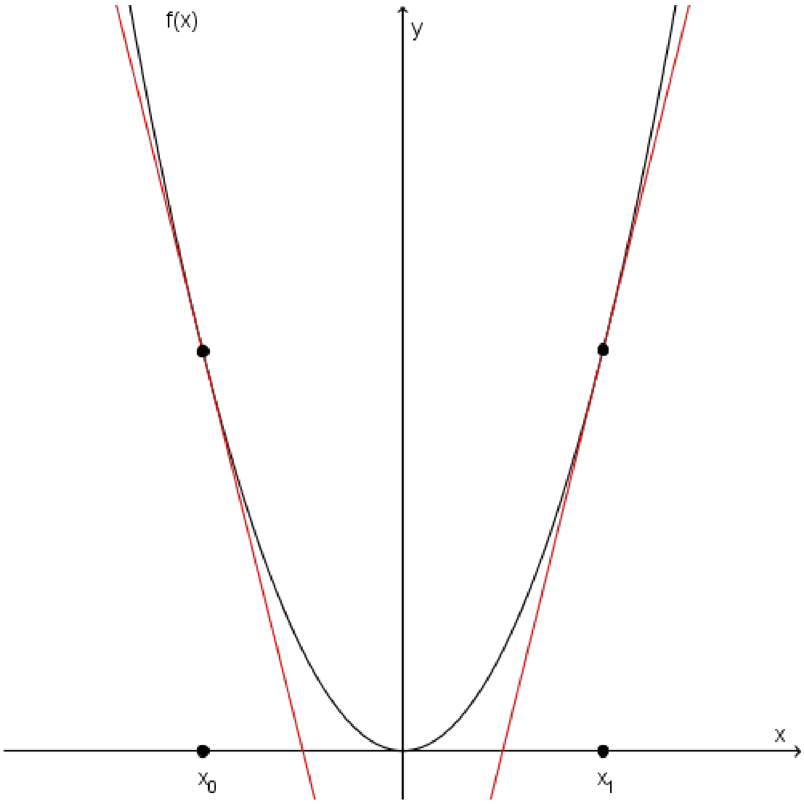
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0.$$

Natürlich ist dann auch der Grenzwert des Differenzenquotienten, der Differenzialquotient, für $h\to 0$ größer oder gleich 0 - das heißt $f'(x)\geq 0$.

Eine im Intervall I monoton wachsende differenzierbare Funktion f hat also eine Ableitung größer gleich Null, d.h.

$$f'(x) \geq 0, \qquad x \in I.$$

Genauso zeigt man, dass für monoton fallende differenzierbare Funktionen $f'(x) \leq 0, x \in I$ gilt.
Umgekehrt folgt aus $f'(x) \geq 0, x \in I$, dass f auf I monoton wächst und aus $f'(x) > 0$, dass f sogar streng monoton wächst.
Es gilt Entsprechendes für fallende Funktionen.



Die Funktion $f(x) = x^2$ ist monoton fallend auf $(-\infty; 0]$ und monoton steigend auf $[0; \infty)$. An einer Stelle x_0 mit $x_0 \leq 0$ hat also die Tangente eine Steigung $f'(x_0) \leq 0$, an einer Stelle x_1 mit $x_1 \geq 0$ hat die Tangente eine positive Steigung $f'(x_1) \geq 0$.
Da die Tangente in $x_0 < 0$ sogar eine negative Steigung hat, ist $f'(x) < 0$ für $x \in (-\infty; 0)$, und damit ist f auf $(-\infty; 0)$ streng monoton fallend. Analog gilt $f'(x) > 0$ auf $(0; \infty)$ und f ist dort streng monoton steigend.

Das Steigungsverhalten einer differenzierbaren Funktion steht also in engem Zusammenhang mit dem Vorzeichen ihrer Ableitung. Verschwindet die Ableitung einer Funktion f an einer Stelle x_0, so ist die Tangente an den Graphen in diesem Punkt waagerecht. Die lineare Approximation steigt nicht und fällt nicht. Deswegen nennt man eine solche Stelle auch eine stationäre Stelle.

Eine Stelle x, an der $f'(x) = 0$ gilt, heißt *stationäre* Stelle von f. Den dazugehörigen Punkt $(x; f(x))$ auf dem Graphen nennt man einen stationären Punkt.

> Die Stelle 0 ist eine stationäre Stelle der Funktion $f(x) = x^3$, denn $f'(x) = 3x^2$ und $f'(0) = 0$. Die Funktion $g(x) = x^3 - 3x$ hat die Ableitung $g'(x) = 3x^2 - 3$, also sind wegen $g'(1) = 0 = g'(-1)$ die Stellen $x = 1$ und $x = -1$ stationäre Stellen von g.

Wir fassen zusammen:

$$
\begin{array}{llcl}
 & \underline{f'(x) \ \text{ auf } I} & & \underline{\text{Monotonieverhalten von } f \text{ auf } I} \\
 & f'(x) \geq 0 & \Leftrightarrow & f \text{ monoton wachsend} \\
 & f'(x) \leq 0 & \Leftrightarrow & f \text{ monoton fallend} \\
\text{und} & & & \\
 & f'(x) > 0 & \Rightarrow & f \text{ streng monoton wachsend} \\
 & f'(x) < 0 & \Rightarrow & f \text{ streng monoton fallend}
\end{array}
$$

5.2 Qualitativer Verlauf der Graphen von f und f'

Im vorangegangenen Abschnitt wurde beschrieben, wie das Monotonieverhalten einer Funktion mit den Eigenschaften Ihrer Ableitung korrespondiert. Sie können sich nun diesen Zusammenhang mit zwei Mathlets veranschaulichen. In beiden Mathlets wird ein Polynom dritten Grades f und seine Ableitung f' dargestellt. Im ersten Mathlet können Sie Veränderungen an der dargestellten Funktion f vornehmen, im zweiten an der Ableitung f'.

[online-only]

Auch in diesem Mathlet können Sie das Monotonieverhalten der Funktion f (blauer Graph) mit den Eigenschaften von f' wie Vorzeichen und Nullstellen (roter Graph) vergleichen. Hier haben Sie die Möglichkeit, die Nullstellen von f' zu bestimmen.

[online-only]

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

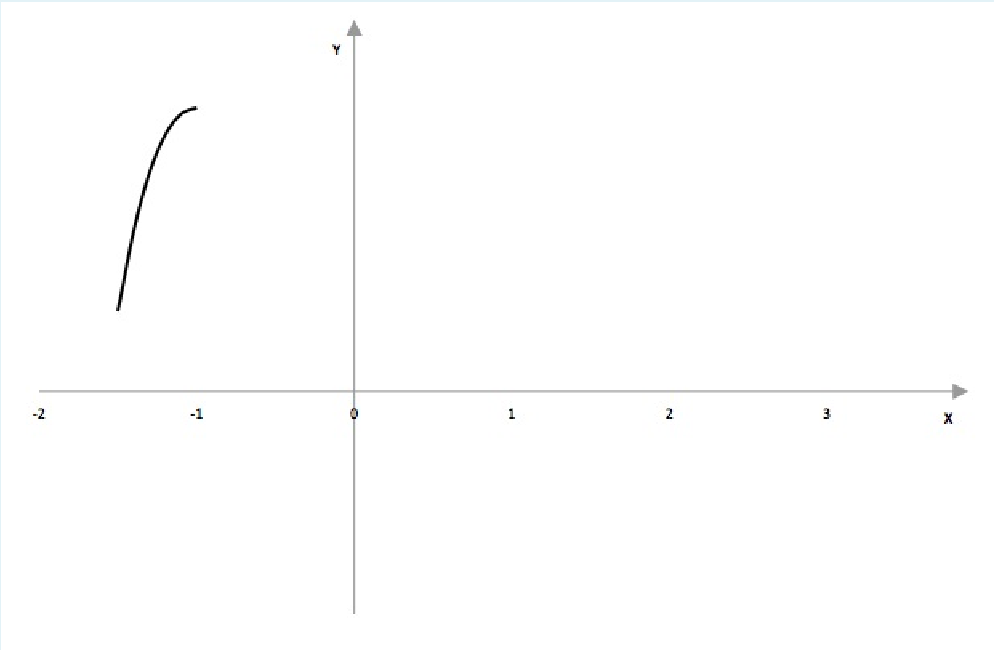
Die Ableitung einer Funktion f soll das folgende Vorzeichen besitzen:

Intervall	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;3)$	3	$(3;\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

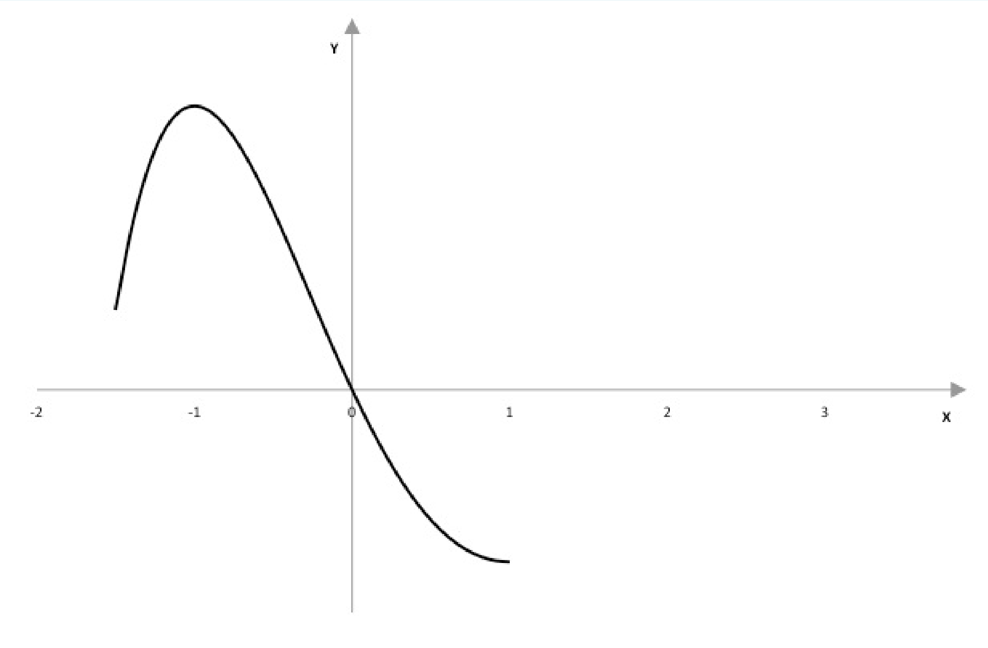
Skizzieren Sie einen möglichen Graphen von f.

Lösung

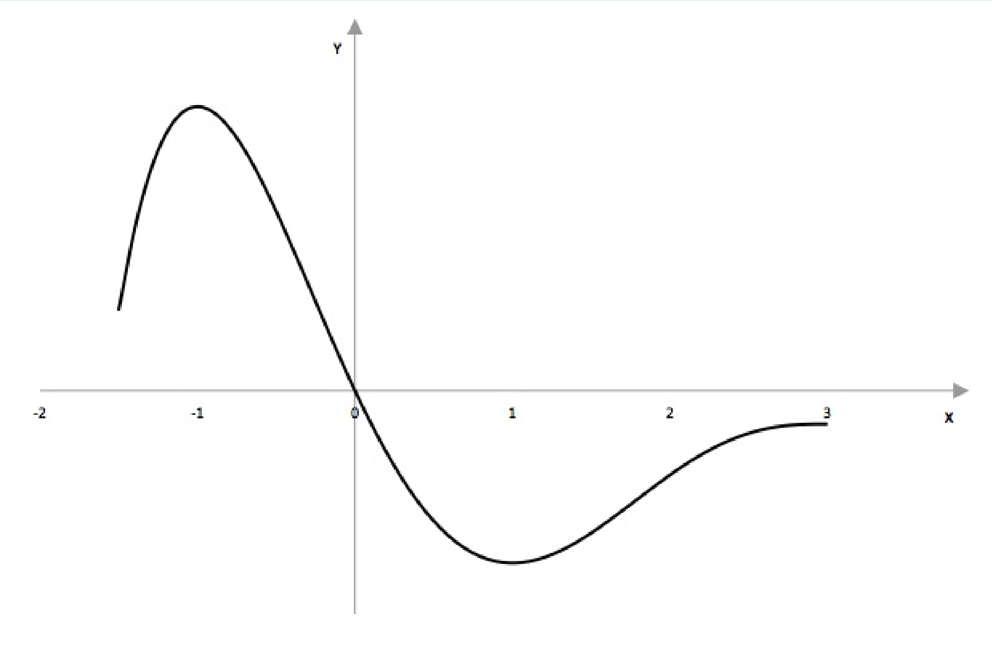
f ist auf $(-\infty;-1)$ monoton wachsend, da die Ableitung dort ein positives Vorzeichen hat. Außerdem ist $f'(-1)=0$, was bedeutet, dass in -1 die Tangente an den Graphen die Steigung 0 hat. Damit verläuft f auf $(-\infty;-1]$ ungefähr wie in diesem Bild:



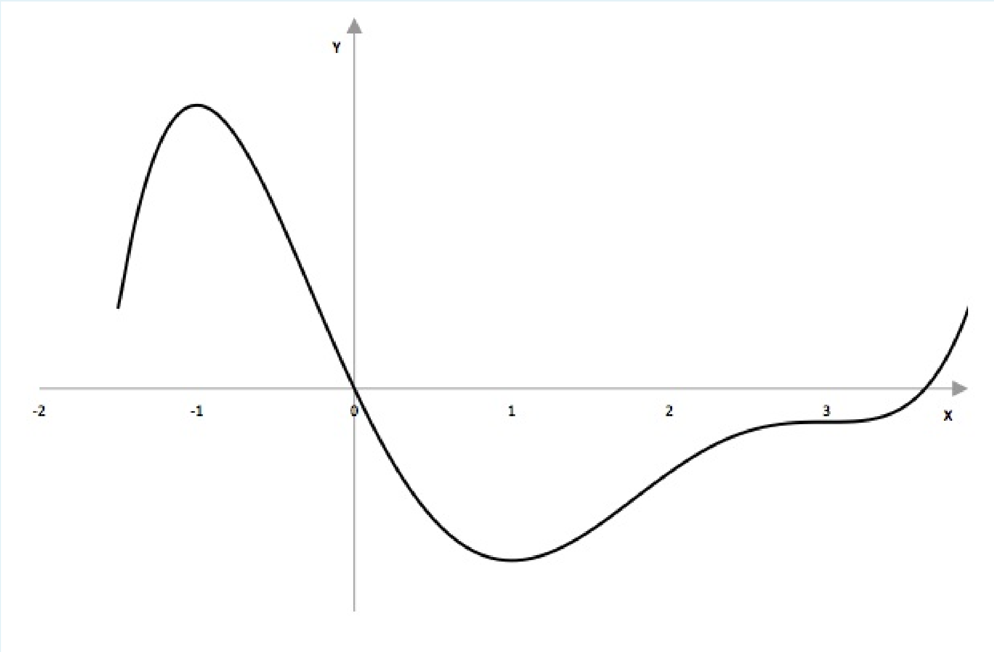
Im Intervall $(-1;1)$ ist f monoton fallend, da die Ableitung negativ ist. In 1 ist die Tangente wieder wegen $f'(1)=0$ horizontal.



Auf dem Intervall $(1;3)$ steigt f wegen des positiven Vorzeichens der Ableitung wieder, 3 ist wegen $f'(3)=0$ eine stationäre Stelle.



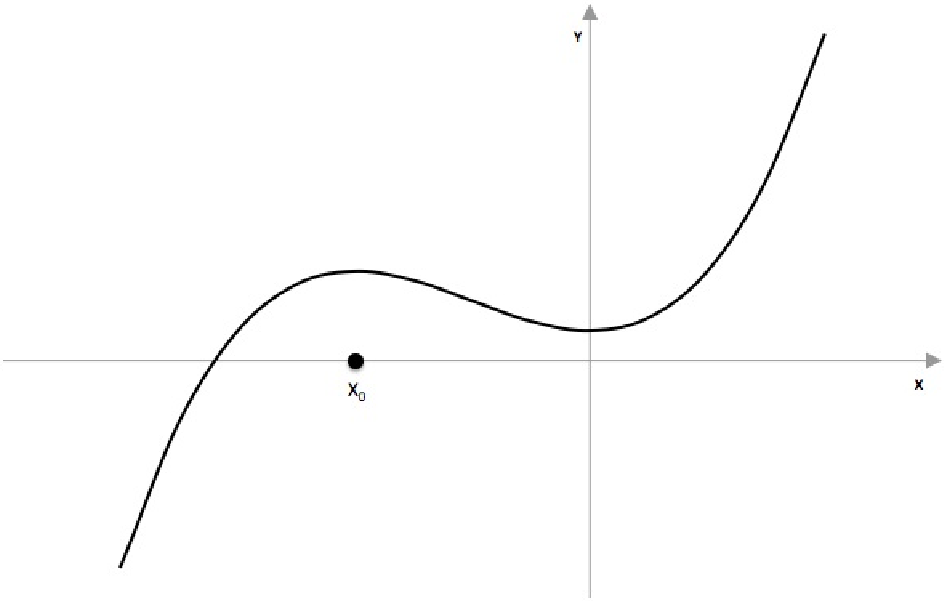
Da $f'(x)$ ein positives Vorzeichen hat für $x>3$, steigt f auf $(3;\infty)$ wieder monoton.



Die oben beschriebene Ableitung lautet z.B. $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-3)^2$.

ÜBUNG 2

Gegeben ist der Graph einer Funktion f. Bestimmen Sie das Vorzeichen der Ableitung von f in geeigneten Intervallen.



Lösung

Auf $(-\infty; x_0)$ ist f monoton wachsend, deswegen ist das Vorzeichen von f' dort positiv.

In x_0 ist die Tangente an den Graphen horizontal, deshalb ist $f'(x_0) = 0$.

Auf $(x_0; 0)$ ist f monoton fallend. Damit ist das Vorzeichen von f' dort negativ.

In 0 ist wieder $f'(0) = 0$, da die Tangente an den Graphen die Steigung 0 hat.

Auf $(0; \infty)$ steigt f monoton. Damit hat f' dort ein positives Vorzeichen.

Insgesamt erhält man die folgende Tabelle:

Bereich	$(-\infty; x_0)$	x_0	$(x_0; 0)$	0	$(0; \infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$

ÜBUNG 3

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 2$. Bestimmen Sie die Intervalle der Monotonie von f.

Antwort

f ist auf den Intervallen $(-\infty; -2)$ und $(0; 1)$ streng monoton fallend, und auf $(-2; 0)$ sowie $(1; \infty)$ streng monoton steigend.

Lösung

Wir berechnen zuerst $f'(x)$.

$$f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x.$$

Wir versuchen nun, die Nullstellen von f' zu finden.

0 ist offensichtlich eine Nullstelle. Wir klammern x aus:

$$f'(x) = 4x(x^2 + x - 2).$$

Die beiden anderen Nullstellen -2 und 1 bestimmt man mit der p-q-Formel. Damit ist dann

$$f'(x) = 4x(x-1)(x+2).$$

Für $x \in (-\infty; -2)$ oder $x \in (0; 1)$ ist $f'(x) < 0$, und damit ist f dort streng monoton fallend.

Für $x \in (-2; 0)$ sowie $x \in (1; \infty)$ ist $f'(x) > 0$, und damit ist f dort streng monoton steigend.

ÜBUNG 4

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x \ln x$ für $x > 0$. Wo steigt f monoton, wo fällt f monoton? Wo besitzt f stationäre Stellen?

Antwort

f ist auf dem Intervall $(0; e^{-1})$ monoton fallend und auf dem Intervall $(e^{-1}; \infty)$ monoton steigend. In e^{-1} liegt die einzige stationäre Stelle vor.

Lösung

Wir berechnen $f'(x)$ mit der Produktregel.

$$f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Wir setzen $f'(x) = 0$ an:

$$0 = \ln x + 1.$$

Dies gilt genau dann, wenn $x = e^{-1}$ ist. Also liegt in e^{-1} die einzige stationäre Stelle vor.

Da $\ln x + 1 < 0$ für $x \in (0; e^{-1})$, ist f dort monoton fallend, und sogar streng monoton fallend.

Da $\ln x + 1 > 0$ für $x \in (e^{-1}; \infty)$, ist f dort monoton steigend, und sogar streng monoton steigend.

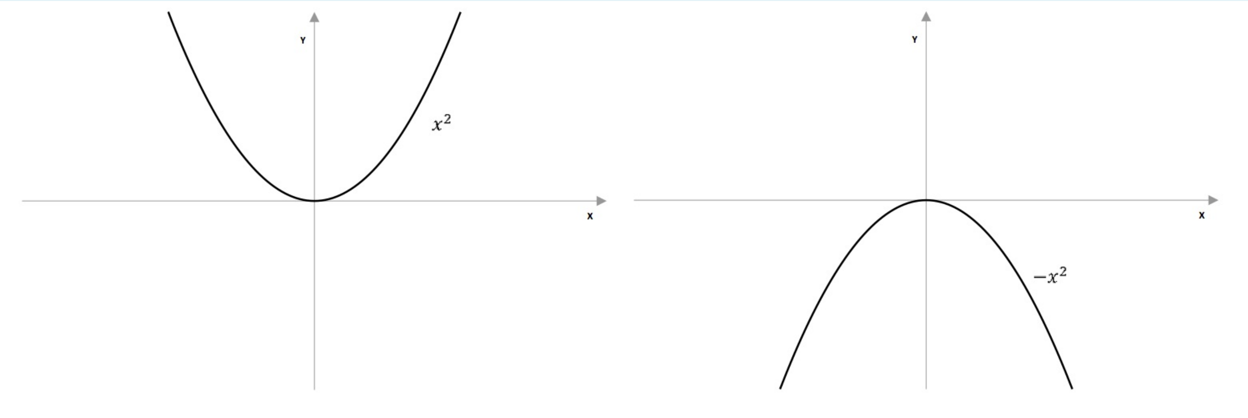
6. DIE ZWEITE ABLEITUNG

Lernziele

In diesem Abschnitt lernen Sie, mit Hilfe der zweiten Ableitung einer Funktion die Krümmung ihres Graphen zu bestimmen, was Wendepunkte und Sattelpunkte einer Funktion sind und wie man deren Lage bestimmt.

Der letzte Abschnitt behandelte das Wachstumsverhalten von Graphen anhand der ersten Ableitung. Nun soll ein weiterer Aspekt des Verhaltens von Kurven untersucht werden, nämlich die Krümmung. Wir setzen in diesem Abschnitt voraus, dass f auf dem Definitionsbereich differenzierbar ist, dass also auch die Ableitung f' eine auf dem Definitionsbereich definierte Funktion ist.

Der Graph der Funktion x^2 ist nach oben geöffnet, der Graph der Funktion $-x^2$ ist dagegen nach unten geöffnet.



Stellt man sich vor, dass man mit wachsendem x, also von links nach rechts, auf dem Graphen entlangfährt, so fährt man auf dem ersten Graphen eine Linkskurve, auf dem zweiten Graphen hingegen eine Rechtskurve. Den ersten Graphen nennt man auch linksgekrümmt, den zweiten rechtsgekrümmt. Wir beobachten, dass bei einer Linkskurve die Steigung zunimmt, dass also die Ableitungsfunktion f' monoton wächst. Bei einer Rechtskurve nimmt die Steigung ab, dort ist die Ableitungsfunktion f' monoton fallend. Bei vielen Funktionen gehen solche Rechtskurven in Linkskurven über oder umgekehrt. Eine Stelle, an der solch ein Übergang geschieht, nennt man eine Wendestelle. Dies soll nun mathematisch präzisiert werden. Dafür benötigt man die zweite Ableitung.

Sei f eine differenzierbare Funktion mit Ableitung f'. Ist f' an einer Stelle x_0 differenzierbar, d.h. existiert der Grenzwert

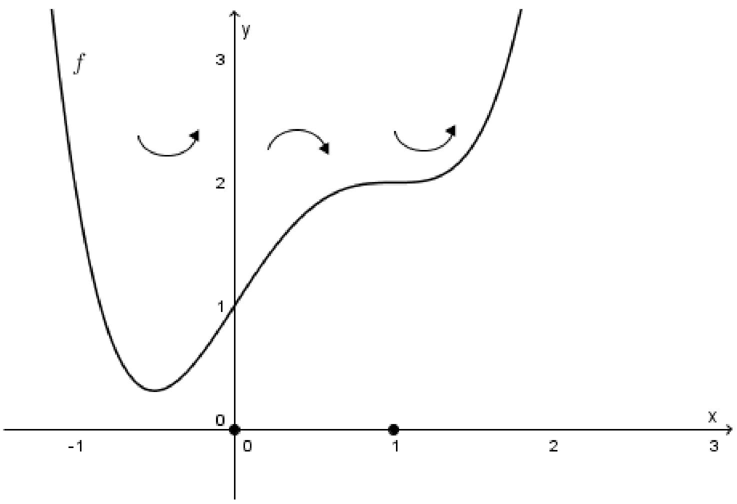
$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h},$$

so existiert also $(f')'(x_0)$. Wenn die Ableitungsfunktion f' in allen Stellen des Definitionsbereiches differenzierbar ist, heißt f *zweimal differenzierbar*. Man schreibt dann statt $(f')'$ kurz f''.
Die *zweite Ableitung von f in x_0* ist also die Ableitung von f' und

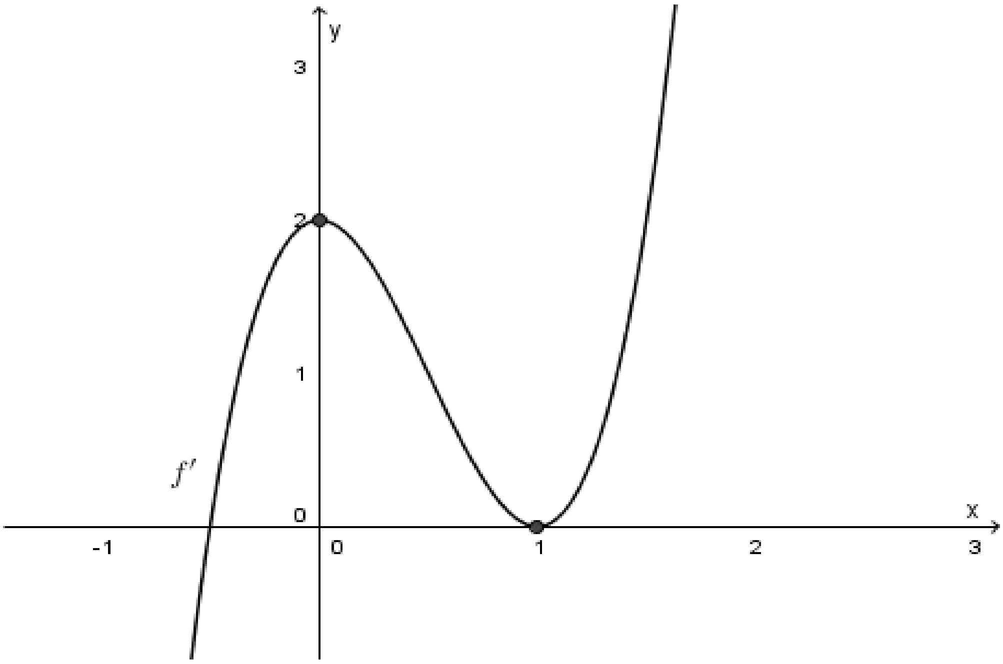
$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h}.$$

1. Sei $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5$. Dann ist $f'(x) = 3x^2 + 4x$ und $f''(x) = 6x + 4$.
2. Sei $f(x) = \sin(x)$. Es ist $f'(x) = \cos(x)$, folglich $f''(x) = -\sin(x)$.
3. Sei $f(x) = \cos(x)$. Wir erhalten $f'(x) = -\sin(x)$ und $f''(x) = -\cos(x)$.
4. Sei $f(x) = e^{2x}$. Nach der Kettenregel ist $f'(x) = 2e^{2x}$ und $f''(x) = 4e^{2x}$.
5. Sei $f(x) = \ln(x)$. Dann ist $f'(x) = \frac{1}{x}$ und $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$.

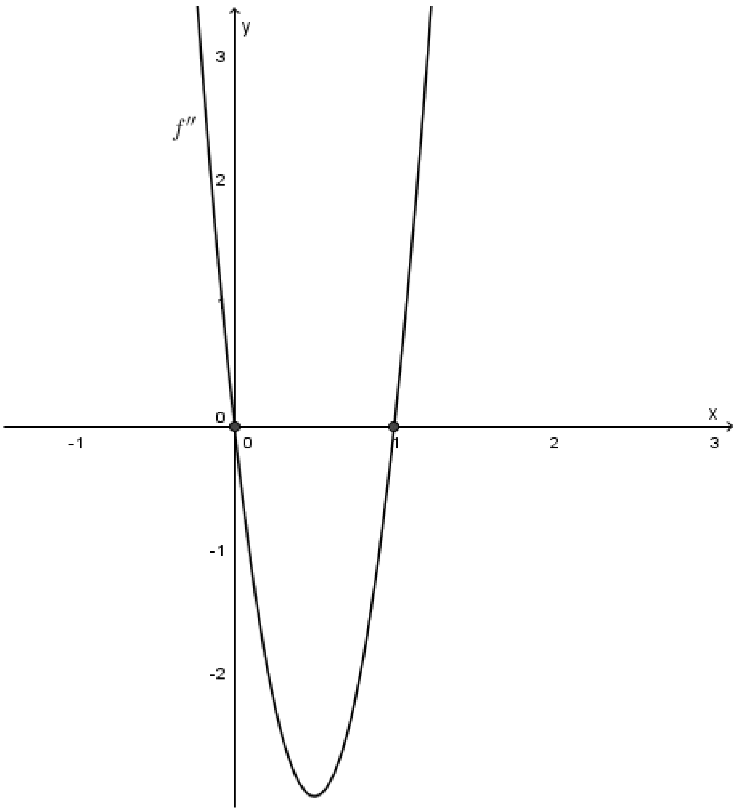
Der Graph der Funktion $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x + 1$ besteht aus einer Linkskurve für $x < 0$, einer Rechtskurve für $0 < x < 1$ und wieder einer Linkskurve für $x > 1$. Die Wendestellen liegen damit bei $x = 0$ und $x = 1$.



Die Ableitung berechnet sich zu $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2$.



Man sieht am Schaubild von f', dass f' bis zur Stelle 0 wächst, um danach zu fallen. Hier muss also ein Vorzeichenwechsel von $(f')' = f''$ von positiv zu negativ stattfinden. An der Stelle 1 muss dagegen das Vorzeichen von f'' von negativ zu positiv wechseln.



Dies erkennt man auch an der Form der zweiten Ableitung: $f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$. $f''(x)$ ist positiv für $x < 0$ und $x > 1$ (Linkskurve von f) und negativ für $0 < x < 1$ (Rechtskurve von f). Diese Beobachtung nutzen wir, um den Begriff der Wendestelle sauber mathematisch zu definieren.

Sei f zweimal differenzierbar. Ist $f''(x) = 0$ und wechselt f'' in x das Vorzeichen, so ist nach Definition x eine Wendestelle. Der Punkt $(x; f(x))$ heißt dann Wendepunkt.

Ist in einem Intervall $f''(x) > 0$ für $x \in I$, so beschreibt f in I eine Linkskurve. Ist $f''(x) < 0$ für $x \in I$, so beschreibt f eine Rechtskurve.

Für ein einfaches Kriterium zur Bestimmung einer Wendestelle benötigt man also die 2. Ableitung, die 1. Ableitung ist nicht ausreichend. Die 1. Ableitung hilft aber bei der weiteren Unterscheidung: Im Beispiel 6.3 sieht man, dass die Art der Wendestellen in 0 und 1 verschieden ist - in 1 hat die Tangente, die man an den Funktionsgraphen anlegt, die Steigung 0, in 0 hat die Tangente an den Graphen die Steigung 2.
Eine Wendestelle x, in der zusätzlich $f'(x) = 0$ gilt, bezeichnet man auch als Sattelstelle.
Den dazugehörigen Punkt $(x; f(x))$ auf dem Graphen nennt man analog Sattelpunkt.
Jeder Sattelpunkt ist also insbesondere ein Wendepunkt und ein stationärer Punkt.

> Im vorherigen Beispiel zu $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x + 1$ wurde gezeigt, dass f in 0 und 1 Wendestellen besitzt. Da $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2$ ist, erhält man $f'(0) = 2$ und $f'(1) = 0$. In 1 liegt also eine Sattelstelle vor, in 0 liegt hingegen wegen $f'(0) \neq 0$ keine Sattelstelle vor.

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Bestimmen Sie die zweite Ableitung der Funktion $f(x) = e^x(x^2 - 4x + 5)$ und überprüfen Sie, wo $f''(x)$ positiv, negativ oder 0 ist. Wo ist der Graph von f rechtsgekrümmt, wo ist er linksgekrümmt?

Antwort

$f''(x) = e^x(x^2 - 1)$. $f''(x) = 0$ für $x = 1$ und $x = -1$. Auf $(-1; 1)$ ist $f''(x)$ negativ, auf $(-\infty; -1)$ und $(1; \infty)$ ist $f''(x)$ positiv. Also ist der Graph von f auf $(-1; 1)$ rechtsgekrümmt und auf $(-\infty; -1)$ sowie auf $(1; \infty)$ linksgekrümmt.

Lösung

Wir berechnen $f'(x)$ mit der Produktregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x(x^2 - 4x + 5) + e^x(2x - 4) \\ &= e^x(x^2 - 4x + 5 + 2x - 4) \\ &= e^x(x^2 - 2x + 1). \end{aligned}$$

Wir berechnen $f''(x)$ als Ableitung von $f'(x)$ mit der Produktregel:

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x(x^2 - 2x + 1) + e^x(2x - 2) \\ &= e^x(x^2 - 2x + 1 + 2x - 2) \\ &= e^x(x^2 - 1). \end{aligned}$$

Da $e^x > 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$, müssen wir nur den Term $x^2 - 1$ betrachten.

$x^2 - 1 = 0$, falls $x = -1$ oder $x = 1$ ist. Also ist $f''(x) = 0$ für $x = 1$ und $x = -1$.

$x^2 - 1 > 0$ für $x \in (-\infty; -1)$ oder $x \in (1; \infty)$. Also ist $f''(x)$ auf $(-\infty; -1)$ und $(1; \infty)$ positiv. Damit ist der Graph von f auf $(-\infty; -1)$ sowie auf $(1; \infty)$ linksgekrümmt.

$x^2 - 1 < 0$ für $x \in (-1; 1)$. Also ist $f''(x)$ auf $(-1; 1)$ negativ, und der Graph von f auf $(-1; 1)$ rechtsgekrümmt.

ÜBUNG 2

Bestimmen Sie die zweite Ableitung und die Wendestellen der Funktion $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 2x + 1$.

Antwort

$f''(x) = 60x^2(x-1)$. f besitzt eine Wendestelle in 1. f besitzt keine weiteren Wendestellen.

Lösung

Wir berechnen $f'(x)$:

$$f'(x) = 15x^4 - 20x^3 + 2.$$

Wir berechnen $f''(x)$:

$$f''(x) = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x-1).$$

Nun bestimmen wir die Wendestellen. Dafür setzen wir $f''(x) = 0$ an.

f'' hat die beiden Nullstellen 0 und 1.

Da $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $x - 1 < 0$ für alle $x < 1$, ist $f''(x) = 60x^2(x-1) \leq 0$ für alle $x < 1$. Damit liegt in 0 kein Vorzeichenwechsel von f'' vor, und folglich ist 0 keine Wendestelle von f.

Da aber $60x^2(x-1) < 0$ für alle $0 < x < 1$ und $60x^2(x-1) > 0$ für alle $x > 1$, liegt in 1 ein Vorzeichenwechsel von f'' und damit eine Wendestelle von f vor.

ÜBUNG 3

Bestimmen Sie die zweite Ableitung und die Wendestellen der Funktion $f(x) = xe^{x^2}$.

Antwort

$f''(x) = 2xe^{x^2}(3+2x^2)$. f besitzt eine Wendestelle in 0. f besitzt keine weiteren Wendestellen.

Lösung

Wir berechnen $f'(x)$ mit der Produkt- und Kettenregel:

$$f'(x) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}.$$

Wir berechnen $f''(x)$ als Ableitung von $f'(x)$ mit der Summen-, Produkt- und Kettenregel:

$$f''(x) = 2xe^{x^2} + 4xe^{x^2} + 4x^3e^{x^2} = 2xe^{x^2}(3+2x^2).$$

Nun bestimmen wir die Wendestellen. Dafür setzen wir $f''(x) = 0$ an.

Da $2e^{x^2} > 0$ und $3+2x^2 > 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$, ist 0 die einzige Nullstelle von f''.

Da $2e^{x^2}(3+2x^2)$ stets positiv ist, hat $f''(x)$ dasselbe Vorzeichen wie x. Damit wechselt f'' in 0 das Vorzeichen, und insgesamt liegt in 0 eine Wendestelle vor.

ÜBUNG 4

Bestimmen Sie die zweite Ableitung, die Wendestellen und Sattelstellen der Funktion $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$.

Antwort

$f''(x) = 12x^2 - 24x$. f besitzt Wendestellen in 0 und 2. In 0 liegt zudem eine Sattelstelle vor.

Lösung

Wir berechnen $f'(x)$:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2.$$

Wir berechnen $f''(x)$:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2).$$

Nun bestimmen wir die Wendestellen. Dafür setzen wir $f''(x) = 0$ an.

f'' hat die beiden Nullstellen 0 und 2.

Für $x < 0$ ist $f''(x) = 12x(x-2)$ positiv. Für $x \in (0;2)$ ist $12x(x-2)$ negativ, für $x > 2$ ist wieder $12x(x-2) > 0$.

Damit liegen in 0 und 2 Vorzeichenwechsel von f'' vor. Somit sind 0 und 2 Wendestellen von f.

Da $f'(0) = 0$ ist, liegt in 0 auch eine Sattelstelle vor. 2 ist wegen $f'(2) = -16$ keine Sattelstelle von f.

7. EXTREMA

Inhalt

Lernziele In diesem Abschnitt lernen Sie, was Extrema (Minima/Maxima) sind und wie man die Extrema einer Funktion mit Hilfe der ersten und zweiten Ableitung bestimmt.

7.1 Globale und lokale Extrema

In den Anwendungen ist man oft an möglichst großen oder kleinen Werten einer Funktion interessiert. Dabei unterscheidet man, ob zum Vergleich alle Werte der Variablen x herangezogen werden (globale Extrema) oder nur benachbarte Werte von x (lokale Extrema).

Globale Extrema:
Wenn an einer Stelle x_1 gilt

$$f(x_1) \geq f(x)$$

für alle x im Definitionsbereich von f, dann heißt x_1 eine *globale Maximalstelle* und der Funktionswert $f(x_1)$ ein *globales Maximum* von f.
Entsprechend definiert man eine *globale Minimalstelle* x_2 und ein *globales Minimum* $f(x_2)$, falls $f(x_2) \leq f(x)$ für alle x im Definitionsbereich von f gilt.

Globale Maxima und Minima werden zusammen als *globale Extrema* bezeichnet.

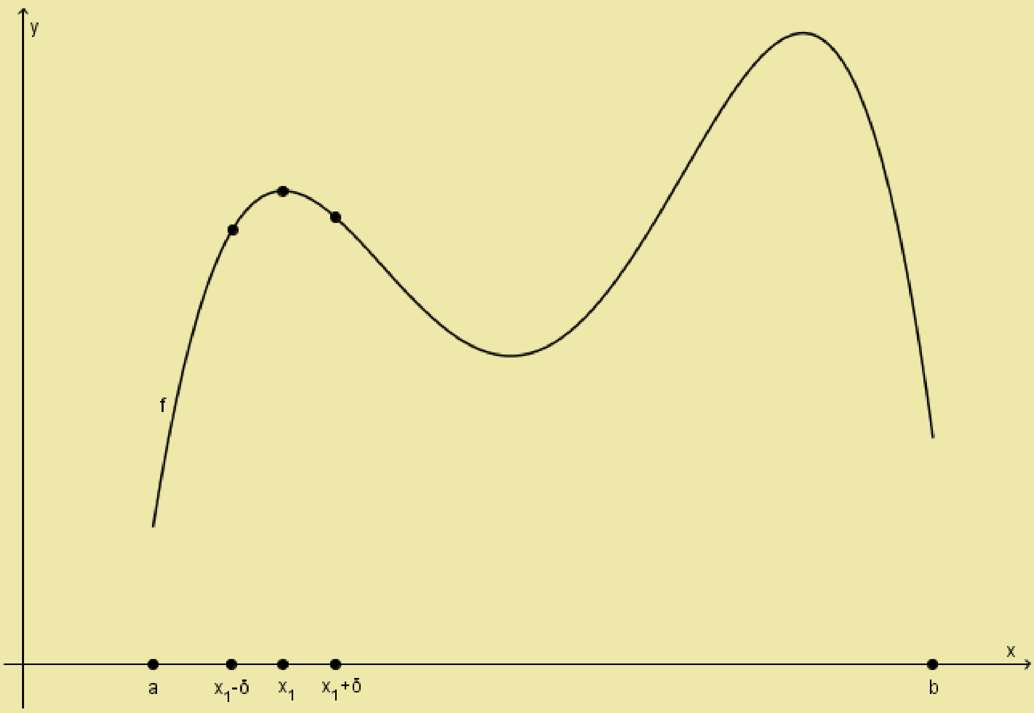
Es hängt von der Funktion ab, ob sie ein globales Maximum und/oder Minimum hat. $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$ hat ein globales Minimum Null bei $x = 0$ aber kein globales Maximum, $x = 0$ ist die einzige globale Minimalstelle. $g(x) = \cos(x),\ x \in \mathbb{R}$ hat das globale Maximum 1 und das globale Minimum -1 mit unendlich vielen globalen Maximalstellen $x_k = k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ und Minimalstellen $x_l = \pi + l \cdot 2\pi,\ l \in \mathbb{Z}$. Die Funktion $h(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$ hat keine globalen Extrema.

Bei lokalen Extrema lassen wir nur Werte der Variablen x im Definitionsbereich von f zu, deren Abstand von x_1 eine (kleine) Schranke $\delta > 0$ nicht überschreitet: $x_1 - \delta < x < x_1 + \delta$.

Lokale Extrema:
Wenn es zu einer Stelle x_1 ein $\delta > 0$ gibt, so dass für x im Definitionsbereich von f gilt

$$f(x_1) \geq f(x) \quad \text{wenn} \quad x_1 - \delta < x < x_1 + \delta,$$

dann ist x_1 eine *lokale Maximalstelle* und $f(x_1)$ ein *lokales Maximum* von f.
Entsprechend geht man für *lokale Minimalstellen* und *lokale Minima* vor.



Jedes globale Extremum ist auch ein lokales Extremum. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, wie das Bild illustriert.

Wenn aus dem Zusammenhang klar ist, ob lokale oder globale Extrema gemeint sind, wird das Adjektiv lokal oder global oft weggelassen.

7.2 Die notwendige Bedingung für lokale Extrema

Wir setzen jetzt voraus, dass f auf einem *offenen Intervall* I definiert ist (d.h. $I = \mathbb{R}$, $I = (a; b)$, $I = (a; \infty)$ oder $I = (-\infty; b)$) und dass f auf I *differenzierbar* ist.
Polynome, Sinus, Kosinus, Exponentialfunktion und viele weitere Funktionen erfüllen diese Voraussetzung, sie sind sogar alle zweimal differenzierbar.
Damit steht uns die Ableitung als effizientes Hilfsmittel zur Verfügung. Für Intervalle mit Randpunkten (z.B. $[a; b]$) siehe Bemerkung am Ende des Unterabschnitts über die hinreichende Bedingung für lokale Extrema.

Wenn $x_1 \in I$ eine lokale Maximalstelle ist, dann gilt $f(x_1 + h) - f(x_1) \leq 0$ für alle h mit $-\delta < h < \delta$.

Daraus folgt für die Sekantensteigung links von der Maximalstelle ($h < 0$) und rechts davon ($h > 0$)

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \geq 0, \quad h < 0, \quad \text{und}$$

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \leq 0, \quad h > 0.$$

Dann gilt auch:

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0 \quad \text{und} \quad \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0.$$

Der Grenzwert $f'(x_1)$ muss daher sowohl $f'(x_1) \geq 0$ als auch $f'(x_1) \leq 0$ erfüllen, also ist $f'(x_1) = 0$. Die Stelle x_1 ist eine stationäre Stelle.
Geometrisch sind die Sekanten links von der Maximalstelle steigend oder waagerecht und rechts davon fallend oder waagerecht. Dann kann die Tangente an der Maximalstelle nur waagerecht sein.

An einer Minimalstelle ist es (mit vertauschten Rollen von rechts und links) entsprechend.
Die Extremalstellen differenzierbarer Funktionen sind *stationäre Stellen*, wie sie im Abschnitt Monotonie definiert wurden.

Notwendige Bedingung:
Sei f auf $(a;b)$ differenzierbar. In einer lokalen Extremalstelle $x \in (a;b)$ von f gilt

$$f'(x) = 0.$$

1. Sei $f(x) = \sin(x)$. Da $\sin(x) \leq 1$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, liegt in $x = \frac{\pi}{2}$ ein lokales Maximum vor. Die Ableitung von f ist $f'(x) = \cos(x)$. In der lokalen Extremalstelle $\frac{\pi}{2}$ gilt $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

2. Für die Funktion $f(x) = x^3$ mit $f'(x) = 3x^2$ ist $x = 0$ eine stationäre Stelle, aber keine Extremalstelle, denn $f(x) > 0$ für alle $x > 0$ und $f(x) < 0$ für alle $x < 0$. Die stationären Stellen - die Nullstellen der Ableitung - sind nur Kandidaten für Extremalstellen. Ob eine stationäre Stelle eine Extremalstelle ist und ob sie dann eine Minimal- oder Maximalstelle ist, erfordert weitere Untersuchungen.

7.3 Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema

Im Abschnitt über Monotonie haben wir gesehen, wie das Vorzeichen von f' das Monotonieverhalten von f beeinflusst. Angenommen, f' wechselt in x_1 das Vorzeichen von positiv zu negativ. Dann steigt f links von x_1 und fällt rechts von x_1. Folglich muss in x_1 ein lokales Maximum vorliegen. Ist die Ableitung links von x_2

negativ und rechts von x_2 positiv, so ist x_2 eine Minimalstelle. Es genügt wieder, nur benachbarte x mit $x_1 - \delta < x < x_1 + \delta$ etc. für ein kleines $\delta > 0$ zu betrachten.

Hinreichende Bedingung für lokale Minima und Maxima:
Sei f auf dem offenen Intervall I differenzierbar und $f'(x_0) = 0$. Wenn für ein $\delta > 0$ gilt:

$f'(x) > 0$ für $x_0 - \delta < x < x_0$ und $f'(x) < 0$ für $x_0 < x < x_0 + \delta$, dann ist x_0 eine *Maximalstelle* von f,
$f'(x) < 0$ für $x_0 - \delta < x < x_0$ und $f'(x) > 0$ für $x_0 < x < x_0 + \delta$, dann ist x_0 eine *Minimalstelle* von f.

> Sei $f(x) = e^{-x^2}$. Dann ist $f'(x) = -2xe^{-x^2}$. Da $e^{-x^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, ist 0 die einzige Nullstelle von $f'(x)$. In 0 wechselt f' zudem das Vorzeichen von positiv zu negativ. Also liegt in 0 eine Maximalstelle von f vor.

Ein Wechsel der Ableitung nahe bei einer stationären Stelle von positiven zu negativen Werten bedeutet, dass $f'(x)$ dort streng monoton fallend ist. Das ist sicher dann der Fall, wenn die Ableitung der Ableitung, also die zweite Ableitung von f negativ ist, wie wir im vorigen Abschnitt über Monotonie gesehen haben.
Wir setzen deshalb jetzt voraus, dass f auf dem Intervall I nicht nur differenzierbar, sondern zweimal differenzierbar ist. Für fast alle unserer Beispielfunktionen ist das erfüllt.

Hinreichende Bedingung für lokale Minima und Maxima:
Sei f auf dem offenen Intervall I zweimal differenzierbar und $f'(x_0) = 0$.
Ist $f''(x_0) < 0$, so ist x_0 eine lokale Maximalstelle von f.
Ist $f''(x_0) > 0$, so ist x_0 eine lokale Minimalstelle von f.

Ergänzende Bemerkung

Die Bedingungen in den letzten beiden Sätzen 7.5 und 7.7 sind *hinreichend* für das Vorliegen von lokalen Maxima bzw. Minima, d.h. die Existenz lokaler Extrema folgt aus diesen Voraussetzungen.
Diese Bedingungen sind jedoch *nicht notwendig*: es gibt Funktionen, die lokale Extrema haben, obwohl eine der Voraussetzungen nicht erfüllt ist (z.B. die Funktion $f(x) = x^4$, die bei $x = 0$ ein Minimum hat, obwohl $f''(0) = 0$ nicht positiv ist).
Andererseits ist für ein Extremum einer in einem offenen Intervall (keine Randpunkte!) differenzierbaren Funktion *notwendig*, dass die Ableitung eine Nullstelle hat (Satz 7.3). Wenn $f'(x_0) \neq 0$, ist x_0 sicher keine Extremstelle.

1. Sei $f(x) = -2x^3 + 3x^2$. Dann ist $f'(x) = -6x^2 + 6x = -6x(x-1)$. Stationäre Stellen sind also $x = 0$ und $x = 1$. f' besitzt einen Vorzeichenwechsel in 0 von negativ zu positiv und einen Vorzeichenwechsel in 1 von positiv zu negativ. Also liegt nach Satz 7.5 in 0 ein lokales Minimum und in 1 ein lokales Maximum vor.

2. Sei wieder $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ mit $f'(x) = -6x^2 + 6x = -6x(x-1)$ und den stationären Stellen 0 und 1. Nun soll Satz 7.7 zur Untersuchung auf Extremalstellen angewendet werden. Es ist $f''(x) = -12x + 6$, damit $f''(0) = 6 > 0$ und $f''(1) = -6 < 0$. Nach Satz 7.7 liegt also in 0 ein lokales Minimum und in 1 ein lokales Maximum vor.

3. Sei $f(x) = 1 - (x+2)^4$. Dann ist $f'(x) = -4(x+2)^3$. Die einzige stationäre Stelle ist $x = -2$. Offensichtlich wechselt f' in -2 das Vorzeichen von positiv zu negativ. Damit liegt in -2 ein lokales Maximum vor.
   Da $f''(x) = -12(x+2)^2$, ist $f''(-2) = 0$. Mit Hilfe von Satz 7.7 kann man also bei dieser Funktion keine Aussage über Extremalstellen treffen.
   Eine Möglichkeit, sofort und ohne Differenzialrechnung die Extrema dieser Funktion zu bestimmen, ist die Betrachtung der Funktionswerte. Es ist $f(-2) = 1$ und $f(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit liegt in -2 sogar ein globales Maximum vor.

In folgender Tabelle sind hinreichende Bedingungen für lokale Extrema zusammengefasst:

$$\begin{array}{lllll} f' & \text{wechselt in } x_1 & \text{das Vorzeichen von pos. zu neg.} & \Rightarrow & \text{lokales Maximum in } x_1 \\ f' & \text{wechselt in } x_2 & \text{das Vorzeichen von neg. zu pos.} & \Rightarrow & \text{lokales Minimum in } x_2 \end{array}$$

oder alternativ

$$\begin{array}{lllll} f'(x_1) = 0 & \text{und} & f''(x_1) < 0 & \Rightarrow & \text{lokales Maximum in } x_1 \\ f'(x_2) = 0 & \text{und} & f''(x_2) > 0 & \Rightarrow & \text{lokales Minimum in } x_2. \end{array}$$

Ergänzende Bemerkung zu Extrema auf Intervallen mit Randpunkten

Mitunter müssen auch Extrema einer Funktion f bestimmt werden, die auf einem Intervall mit Randpunkten definiert ist. Wie man dann vorzugehen hat, soll an folgendem Beispiel erläutert werden. Sei $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $[-1; 2]$. Um alle lokalen und globalen Extremalstellen zu bestimmen, bestimmt man zunächst alle lokalen Extremalstellen. Ein lokales Extremum kann in $-1, 2$ oder dem Intervall $(-1; 2)$ liegen. Da das Intervall $(-1; 2)$ offen ist, kann man dort alle lokalen Extrema mit Hilfe der ersten Ableitung bestimmen. Aus $f'(x) = 2x$ folgt die einzige stationäre Stelle $x = 0$. Aus $f''(x) = 2$ folgt $f''(0) = 2 > 0$, und damit liegt in 0 eine lokale Minimalstelle von f auf dem Intervall $(-1; 2)$ und damit auch auf dem Intervall $[-1; 2]$ vor.
Nun muss noch untersucht werden, ob an den Stellen -1 und 2 lokale Extrema vorliegen. Da f auf $[-1; 0)$ streng monoton fallend ist, liegt in -1 ein lokales Maximum vor. Da f auf $(0; 2]$ streng monoton wachsend ist, liegt in 2 ein lokales Maximum vor. Hier kann man also mit dem Monotonieverhalten von f auf das Vorliegen von Extremalstellen schließen - da -1 und 2 jeweils an einem Randpunkt des Definitionsbereiches von f liegen, kann man hier auch gar nicht mit den oben erlernten Methoden argumentieren.
Will man nun noch bestimmen, was das globale Maximum und was das globale Minimum ist, so bildet man die Funktionswerte an den entsprechenden lokalen Extremalstellen und vergleicht diese dann miteinander. Diese Vorgehensweise führt hier zum Erfolg, da auf abgeschlossenen Intervallen die globalen Extrema stets angenommen werden, und da zudem jedes globale Extremum ein lokales Extremum ist.
Lokale Maximalstellen sind -1 und 2. f hat dort die Funktionswerte $f(-1) = 1$ und $f(2) = 4$. Da $f(2) = 4 > 1 = f(-1)$, liegt in 2 das globale Maximum 4 vor.
Da es nur die lokale Minimalstelle 0 gibt, ist 0 auch die globale Minimalstelle, und das globale Minimum ist $f(0) = 0$.
Verändert man die Aufgabenstellung leicht, indem man die Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $(-\infty; 2]$ betrachtet, so muss man etwas anders argumentieren. Die einzige stationäre Stelle von f auf $(-\infty; 2)$ ist wieder die 0, und dort liegt ein lokales Minimum vor. Man macht sich leicht klar, dass dieses auch das globale Minimum sein muss, denn $f(x)$ nimmt stets Werte ≥ 0 an, und $f(0) = 0$. In 2 liegt wieder ein lokales Maximum vor, da die Funktion auf $(0; 2]$ streng monoton steigt. Dies ist jedoch kein globales Maximum, da z.B. $f(-3) = 9 > 4 = f(2)$ ist. Die Funktion hat auf diesem Definitionsbereich kein globales Maximum, da $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$.

7.4 Kurvendiskussion

Bei einer Kurvendiskussion wird eine Funktion f auf ihre wesentlichen Merkmale überprüft. Zu diesen können der maximale Definitionsbereich, die Nullstellen, das Monotonieverhalten, asymptotisches Verhalten, Wende-, Sattel- und Extremalstellen und einige mehr zählen.
In diesem Abschnitt soll jedoch der Hauptaspekt auf einigen hier behandelten Merkmalen liegen. Unter einer Kurvendiskussion wollen wir hier also das Untersuchen einer Funktion auf Wende- und Sattelstellen sowie auf Extrema verstehen.

Sei $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$. Dann ist

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x^2 - 3x + 2) = 4x(x-1)(x-2).$$

f' besitzt also die Nullstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$. Da $f'(x)$ in allen drei Nullstellen das Vorzeichen wechselt, liegen in x_1, x_2 und x_3 Extremalstellen vor.
Da das Vorzeichen in x_0 von negativ zu positiv wechselt, liegt in $x_0 = 0$ ein lokales Minimum vor. Analog folgert man, dass in $x_1 = 1$ ein lokales Maximum und in $x_2 = 2$ ein lokales Minimum vorliegt.
Weiter ist

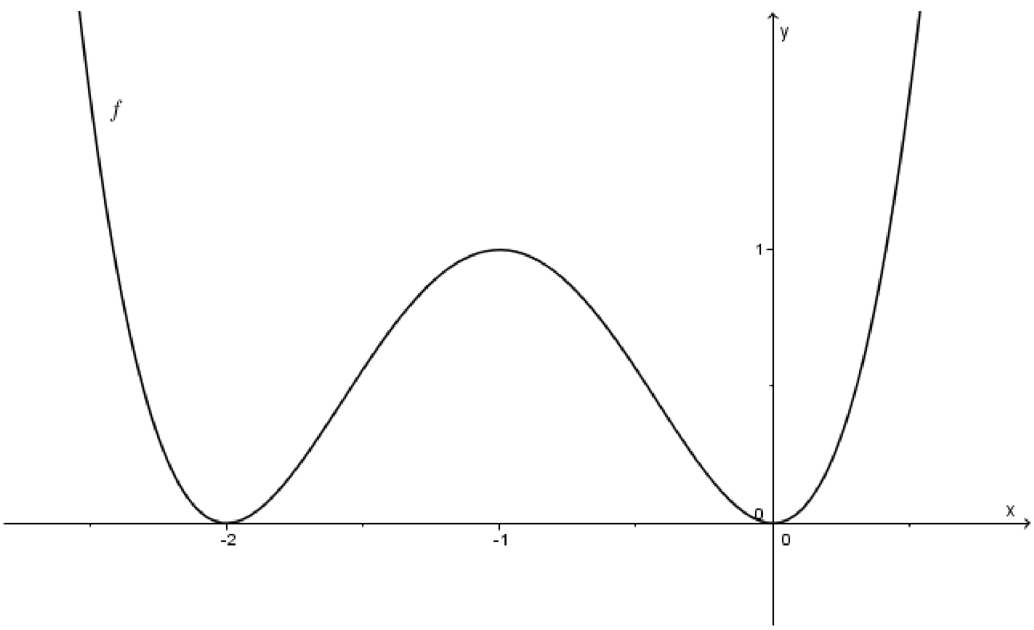
$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 8 = 12(x^2 - 2x + \frac{2}{3}).$$

Die Nullstellen von f'' berechnen sich nach der $p-q$-Formel zu $x_3 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $x_4 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$. Wir haben also

$$f''(x) = 12(x - (1 + \frac{1}{\sqrt{3}}))(x - (1 - \frac{1}{\sqrt{3}})).$$

f'' wechselt also in x_3 und x_4 das Vorzeichen und damit liegen in x_3 und x_4 Wendestellen vor. Da weder x_3 noch x_4 Nullstellen von f' sind, sind beide Wendestellen keine Sattelstellen. f besitzt also keine Sattelstellen.

Nun muss noch auf globale Extrema untersucht werden. Da $f(x) = x^2(x-2)^2$ gilt, nimmt f stets Werte größer oder gleich Null an. Da $f(x_0) = f(0) = 0$ und $f(x_2) = f(2) = 0$, liegen in x_0 und x_2 globale Minimalstellen vor. Nun muss noch die lokale Maximalstelle x_1 untersucht werden. Da $f(1) = 1$, aber z.B. $f(-1) = 9 > 1 = f(1)$, kann x_1 keine globale Maximalstelle sein. Dies hätte man z.B. auch einsehen können, indem man $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ oder $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ bildet.



Sie haben nun mit der Kurvendiskussion ein Hilfsmittel zum Analysieren einer Funktion f und können sich mit ihr auch ein ungefähres Bild des Kurvenverlaufs verschaffen. Das folgende Mathlet soll der Anschauung dienen. In ihm können Sie Eigenschaften der Kurven von f, f' und f'' miteinander in Beziehung setzen.

[online-only]

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Berechnen Sie die lokalen Extremalstellen der Funktion $f(x) = xe^{-0{,}5x}$. Benutzen Sie zur Bestimmung nur die erste Ableitung von f.

Antwort

In 2 liegt ein lokales Maximum vor. Es gibt keine weiteren lokalen Extremalstellen.

Lösung

Wir suchen zuerst die stationären Stellen. Dazu berechnen wir $f'(x)$:

$$f'(x) = e^{-0{,}5x} - 0{,}5xe^{-0{,}5x} = e^{-0{,}5x}(1 - 0{,}5x).$$

Wir setzen $f'(x) = 0$, also

$$e^{-0{,}5x}(1 - 0{,}5x) = 0.$$

Da $e^{-0{,}5x} \neq 0$ ist für alle x, muss $1 - 0{,}5x = 0$ gelten, also $x = 2$. Nur in $x_0 := 2$ kann also ein lokales Extremum vorliegen. Wir müssen nun noch überprüfen, ob tatsächlich ein lokales Extremum in 2 vorliegt, und falls dies der Fall sein sollte, welcher Art es ist.

Da $e^{-0{,}5x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, hat $f'(x)$ dasselbe Vorzeichen wie $1 - 0{,}5x$. Dann ist $f'(x) > 0$ für $x < 2$ und $f'(x) < 0$ für $x > 2$. Damit liegt in 2 ein lokales Maximum vor.

ÜBUNG 2

Berechnen Sie die lokalen Extremalstellen der Funktion $f(x) = x^2 e^{-2x}$. Benutzen Sie das Kriterium für die zweite Ableitung von f, um zu überprüfen, ob in den stationären Stellen lokale Extrema vorliegen.

Antwort

In 1 liegt ein lokales Maximum vor, in 0 liegt ein lokales Minimum vor.

Lösung

Wir suchen zuerst die stationären Stellen. Dazu berechnen wir $f'(x)$:

$$f'(x) = 2xe^{-2x} - 2x^2 e^{-2x} = 2xe^{-2x}(1-x).$$

Wir setzen $f'(x) = 0$, also

$$2xe^{-2x}(1-x) = 0.$$

Da $e^{-2x} \neq 0$ ist für alle x, muss $x = 0$ oder $x = 1$ gelten. Nur in $x_0 := 0$ und in $x_1 := 1$ können also lokale Extrema vorliegen. Wir müssen nun noch überprüfen, ob dort tatsächlich lokale Extrema vorliegen, und falls dies der Fall sein sollte, welcher Art sie sind.

Für die zweite Ableitung erhalten wir mit der Produktregel:

$$f''(x) = 2e^{-2x}(1-x) - 4xe^{-2x}(1-x) - 2xe^{-2x} = 2e^{-2x}(2x^2 - 4x + 1).$$

Wir setzen $x_0 = 0$ in f'' ein und erhalten

$$f''(0) = 2 > 0.$$

Damit liegt in 0 ein lokales Minimum vor.

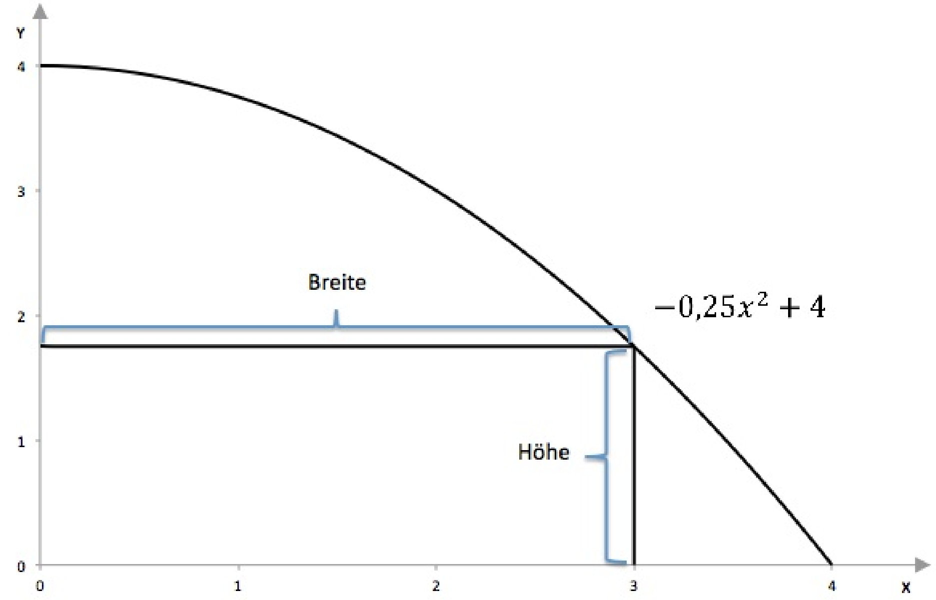
In $x_1 = 1$ ist

$$f''(1) = -2e^{-2} < 0.$$

Damit liegt in 1 ein lokales Maximum vor.

ÜBUNG 3

Maximieren Sie den Umfang U eines Rechtecks, das auf der x-Achse mit einer Ecke im Ursprung liegt, und dessen gegenüberliegende Ecke auf der Parabel $-0{,}25x^2 + 4$ liegt. Die Grundseite soll auf der positiven x-



Achse liegen.

Antwort

Der maximale Umfang U ist $U = 10$.

Lösung

Zuerst müssen wir die Funktion finden, die wir maximieren wollen. Es soll der maximale Wert von $2x + 2y$ bestimmt werden, wenn x die Breite des Rechtecks (abgetragen auf der x-Achse) und y die Höhe des Rechtecks ist (abgetragen auf der y-Achse). Da dann $y = -0{,}25x^2 + 4$ ist, können wir y in der Formel für den Umfang ersetzen: wir müssen also den maximalen Wert von $2x + 2 \cdot (-0{,}25x^2 + 4) = -0{,}5x^2 + 2x + 8$ bestimmen. Dabei soll natürlich weiterhin $x \geq 0$ gelten, und da die Parabel die x-Achse im Punkt $(4; 0)$ schneidet, ist auch $x \leq 4$. Setzen wir also $f(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 8$ für $x \in [0; 4]$, so wollen wir den maximalen Wert von f bestimmen.

Wir suchen zuerst in dem Intervall $(0; 4)$ nach einem Maximum.

An einer solchen Stelle muss $f'(x) = 0$ gelten. Wir berechnen also $f'(x)$:

$$f'(x) = -x + 2.$$

Dann ist also $f'(2) = 0$, und es gibt keine weiteren Nullstellen von f'. Damit besitzt f in $(0; 4)$ nur die stationäre Stelle 2.

Da $f''(x) = -1$ konstant und $f''(2) = -1 < 0$ ist, liegt in 2 ein lokales Maximum vor.

Da $f(0) = 8$ und $f(4) = 8$, aber $f(2) = 10$, wird in 2 der maximale Wert von f auf $[0; 4]$ angenommen. Also ist der maximale Umfang $U = 10$.

ÜBUNG 4

Finden Sie den minimalen Funktionswert der Funktion $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$ auf dem Intervall $[-1;2]$. Wo wird dieser angenommen?

Antwort

Der kleinste Funktionswert ist $-\frac{3}{2}$ und wird in -1 angenommen.

Lösung

Um den kleinsten Funktionswert zu bestimmen, müssen wir nach globalen Minima suchen. Wir suchen zuerst die stationären Stellen im Intervall $(-1;2)$. Dazu berechnen wir $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 3x = 3x(x-1).$$

Wir setzen $f'(x) = 0$, also

$$3x(x-1) = 0.$$

$f'(x)$ hat die beiden Nullstellen 0 und 1, diese liegen auch beide im Intervall $(-1;2)$. Nur in 0 und 1 können also im Intervall $(-1;2)$ Minima vorliegen. Nun berechnen wir die zweite Ableitung:

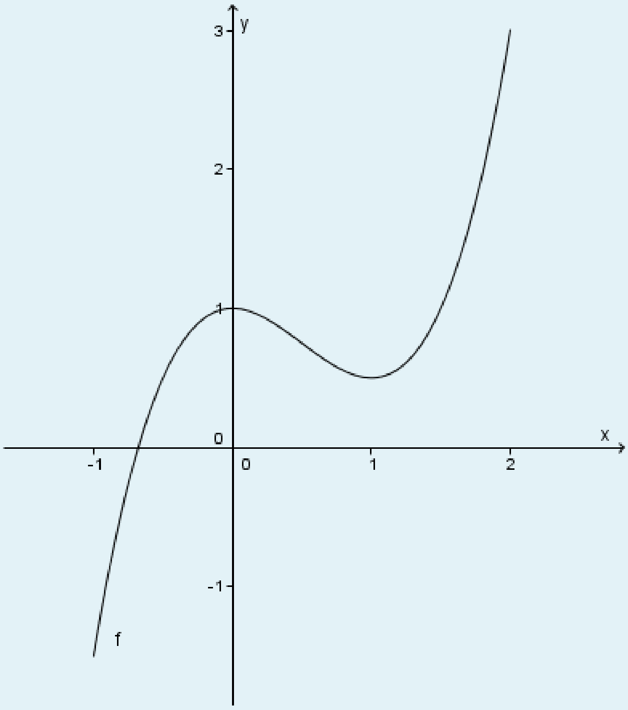
$$f''(x) = 6x - 3.$$

Wir berechnen $f''(0) = -3 < 0$. Damit liegt in 0 ein lokales Maximum vor und kein Minimum.

Weiter ist $f''(1) = 3 > 0$. Damit hat f in 1 ein lokales Minimum. Der Funktionswert ist $f(1) = \frac{1}{2}$.

Um zu überprüfen, ob dies auch tatsächlich der kleinste Funktionswert auf dem Intervall $[-1;2]$ ist, müssen wir noch $f(1)$ mit $f(-1)$ und $f(2)$ vergleichen.

$f(-1) = -\frac{3}{2} < \frac{1}{2}$, $f(2) = 3 > \frac{1}{2}$. Damit wird der kleinste Funktionswert von f auf $[-1;2]$ in -1 angenommen, und der kleinste Funktionswert ist $-\frac{3}{2}$.



Wie man im Bild erkennen kann, wird das globale Minimum in -1 angenommen. In 0 liegt ein lokales Maximum vor.

KAPITELÜBUNGEN

ÜBUNG 1

Sei $f(x) = x^2 + 2x + 3$. Berechnen Sie mithilfe des Differenzenquotienten die Ableitung von f an der Stelle 1, und geben Sie die Tangente $T(x)$ an den Graphen von f im Punkt $(1; f(1))$ an!

Antwort

Es ist $f'(1) = 4$, und die Tangente $T(x)$ hat die Form:

$$T(x) = 4x + 2.$$

Lösung

Für ein $h \neq 0$ ist der Differenzenquotient von f in 1:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h}.$$

Dies berechnet sich zu

$$\frac{(1+h)^2 + 2(1+h) + 3 - (1^2 + 2 + 3)}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 + 2 + 2h + 3 - 6}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h.$$

Für h gegen Null geht dieser Ausdruck gegen 4, also ist

$$\lim_{h \to 0} 4 + h = 4.$$

Damit ist $f'(1) = 4$.

Die Tangente $T(x)$ hat dann die Form:

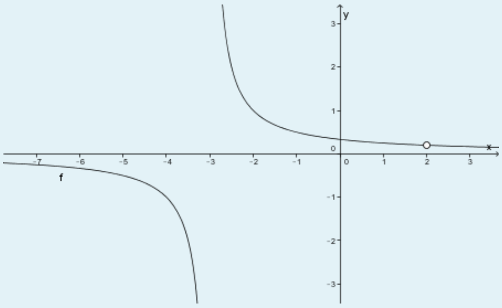
$$T(x) = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1) = 4(x - 1) + 6 = 4x + 2.$$

ÜBUNG 2

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{5}{x^2+x-6}$. Bestimmen Sie den maximalen Bereich D in $\mathbb{R}$, auf dem f definiert ist und bestimmen Sie dann den Kurvenverlauf von f. Nutzen Sie Ihr Wissen über Monotonie und asymptotisches Verhalten, das Sie in diesem Kapitel erlernt haben.

Antwort

Der maximale Definitionsbereich D, auf dem f definiert ist, ist $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$. Der Graph hat die Form



Lösung

Das Polynom x^2+x-6 hat die Nullstellen $x_0 := 2$ und $x_1 := -3$, also ist f an diesen Stellen nicht definiert. Da $x-2$ auch die Nullstelle $x_0 = 2$ hat, ist der maximale Definitionsbereich D, auf dem f definiert ist: $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$.

Zuerst vereinfachen wir $f(x)$, indem wir $\frac{1}{x-2}$ und $-\frac{5}{x^2+x-6}$ auf einen Nenner bringen. Man erhält im Definitionsbereich:

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{5}{x^2+x-6} = \frac{1}{x-2} - \frac{5}{(x-2)(x+3)} = \frac{x+3}{(x-2)(x+3)} - \frac{5}{(x-2)(x+3)} = \frac{x+3-5}{(x-2)(x+3)} = \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x+3}.$$

Nun bestimmen wir das Monotonieverhalten über die 1. Ableitung von f. Es ist:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2}.$$

Da $f'(x) < 0$ ist für alle x in D, ist f also streng monoton fallend auf allen Intervallen in D. f ist folglich streng monoton fallend auf $(-\infty; -3)$, $(-3; 2)$ und $(2; \infty)$.

Wir untersuchen nun, wie sich f für x gegen x_0 und x_1 verhält. Für x gegen 2 geht $f(x) = \frac{1}{x+3}$ gegen $\frac{1}{5}$, d.h.

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{5}.$$

Für $x < -3$ ist $f(x)$ stets negativ. Wenn man von links kommend an -3 heranrückt, geht $x+3$ gegen 0. Damit geht der Kehrwert $f(x)$ von $x+3$ gegen $-\infty$. Also ist

$$\lim_{x\to -3-} f(x) = -\infty.$$

Für $x > -3$ ist $f(x)$ stets positiv. Auch hier geht $x+3$ gegen 0, wenn man sich von rechts der Stelle -3 nähert. Da $x+3$ jedoch positiv ist, geht der Kehrwert $f(x)$ gegen $+\infty$:

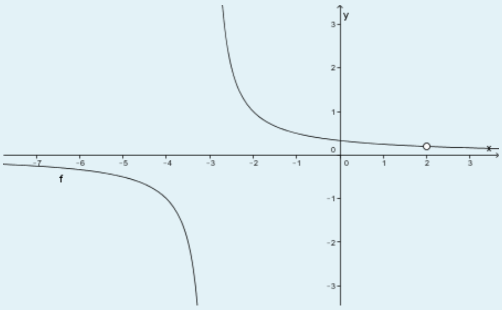
$$\lim_{x\to -3+} f(x) = \infty.$$

Da rechts- und linksseitiger Grenzwert in 3 verschieden sind, existiert $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ nicht.

Nun muss noch das Verhalten von $f(x)$ für x gegen $+\infty$ und $-\infty$ bestimmt werden. Da $x+3$ gegen $+\infty$ unbeschränkt steigt und gegen $-\infty$ unbeschränkt fällt, geht $f(x)$ als Kehrwert von $x+3$ in beiden Fällen gegen 0. D.h.,

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0.$$

Insgesamt erhalten wir folgenden Kurvenverlauf von f:



ÜBUNG 3

Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^x(x-1)^3$. Führen Sie eine Kurvendiskussion unter den in diesem Kapitel erlernten Aspekten durch, d.h. untersuchen Sie f auf lokale und globale Extrema, Wendestellen und Sattelstellen.

Antwort

In -2 liegt ein lokales und globales Minimum vor. Es gibt keine weiteren lokalen oder globalen Extremalstellen. f besitzt Wendestellen in 1, $-2+\sqrt{3}$ und in $-2-\sqrt{3}$. Die Stelle 1 ist zudem eine Sattelstelle. Es gibt keine weiteren Wendestellen oder Sattelstellen.

Lösung

Wir bilden zunächst die Ableitung $f'(x)$ mit Hilfe der Produktregel.

$$f'(x) = e^x(x-1)^3 + 3e^x(x-1)^2 = e^x(x+2)(x-1)^2.$$

Stationäre Stellen liegen in den Nullstellen von $f'(x)$ vor. Da $e^x > 0$ ist für alle reellen Zahlen x, sind -2 und 1 die einzigen Nullstellen von $f'(x)$. Nur in -2 oder 1 können also lokale Extremalstellen vorliegen.

Mit den Kriterien zu Extremalstellen über die 1. Ableitung können wir diese stationären Stellen auf das Vorliegen lokaler Extremalstellen untersuchen.

Da $f'(x)$ in -2 einen Vorzeichenwechsel von negativ zu positiv besitzt, liegt in -2 ein lokales Minimum vor.

In 1 wechselt $f'(x)$ hingegegen nicht das Vorzeichen: Es gilt $f'(x) > 0$ für $-2 < x < 1$ und $f'(x) > 0$ für $x > 1$, d.h. f ist auf $(-2;1)$ sowie auf $(1;\infty)$ streng monoton steigend. Somit liegt in 1 kein lokales Extremum vor.

Da $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, gibt es keine globale Maximalstelle.

Da $f'(x)$ auf $(-\infty;-2)$ negativ ist, fällt f auf diesem Intervall. Da f auf $[-2;\infty)$ monoton steigend ist, muss in -2 also ein globales Minimum vorliegen.

Für das Bestimmen der Wendestellen benötigen wir die 2. Ableitung $f''(x)$.

$$f''(x) = e^x(x+2)(x-1)^2 + e^x(x-1)^2 + 2e^x(x+2)(x-1) = e^x(x-1)(x^2+4x+1).$$

$f''(x)$ hat die Nullstellen 1 sowie $-2+\sqrt{3}$ und $-2-\sqrt{3}$. Nur diese Stellen kommen also für Wendestellen in Frage.

Da $f''(x)$ an den Stellen 1, $-2+\sqrt{3}$ und $-2-\sqrt{3}$ das Vorzeichen wechselt, sind diese Stellen Wendestellen.

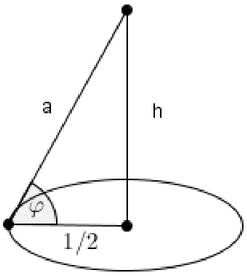
Eine Sattelstelle ist eine Wendestelle, die gleichzeitig auch eine stationäre Stelle ist. Damit ist 1 die einzige Sattelstelle.

ÜBUNG 4

Eine Lampe hängt mittig über einem runden Tisch. Der Durchmesser beträgt einen Meter, so dass der Radius der Tischplatte einen halben Meter beträgt. Die Höhe h der Lampe über dem Tisch wird mit h bezeichnet. Die Helligkeit I am Rand des Tisches berechnet sich dann zu

$$I = k \cdot \frac{\sin \varphi}{a^2}.$$

Dabei ist k eine feste Konstante. In welcher Höhe h über dem Tisch muss die Lampe befestigt werden, damit der Tischrand optimal ausgeleuchtet wird?



Antwort

Die Lampe muss in der Höhe $h = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ Meter über dem Tisch befestigt werden, damit der Tischrand optimal ausgeleuchtet wird.

Lösung

Wir müssen zunächst eine Funktion aufstellen, die wir dann maximieren. I hängt bisher von zwei Variablen (φ und a) ab, von denen wir eine eliminieren müssen.

Da $\sin \varphi = \frac{h}{a}$ ist, ergibt sich

$$I = k \cdot \frac{h}{a^3}.$$

Da nach dem Satz des Pythagoras gilt: $a^2 = h^2 + \frac{1}{4}$, ist $a = \sqrt{\frac{1}{4} + h^2}$ und somit

$$I = k \cdot \frac{h}{(\frac{1}{4} + h^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wir definieren also für h in $[0; \infty)$:

$$f(h) = k \cdot \frac{h}{\left(\frac{1}{4} + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

und suchen das globale Maximum dieser Funktion.

Für $h = 0$ ergibt sich $f(0) = 0$. Diese Stelle scheidet offensichtlich als globale Maximalstelle aus, da f für $h > 0$ echt positive Werte annimmt. Wir suchen also nach dem globalen Maximum auf $(0; \infty)$. Da jedes globale Maximum von f auf $(0; \infty)$ auch ein lokales Maximum ist, suchen wir zunächst nach lokalen Extrema.

Wir berechnen die Ableitung:

$$f'(h) = k \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{4} + h^2\right)^{\frac{3}{2}}} - 3k \cdot \frac{h^2}{\left(\frac{1}{4} + h^2\right)^{\frac{5}{2}}}.$$

Dies vereinfacht sich zu

$$f'(h) = k \cdot \frac{\frac{1}{4} - 2h^2}{\left(\frac{1}{4} + h^2\right)^{\frac{5}{2}}}.$$

In einer globalen Extremalstelle in $(0; \infty)$ muss $f'(h) = 0$ gelten. Wir setzen also an:

$$0 = f'(h) = k \cdot \frac{\frac{1}{4} - 2h^2}{\left(\frac{1}{4} + h^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

und sehen, dass dies nur gelten kann, falls $\frac{1}{4} - 2h^2$ bzw. $h = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ gilt

Wir müssen nun noch begründen, warum in $h = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ tatsächlich ein lokales Maximum vorliegt. Dies gilt aber, da f' in $h = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ das Vorzeichen von positiv zu negativ wechselt.

Da f' auf $(0; \infty)$ nur in $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ das Vorzeichen wechselt - und hier von positiv zu negativ - folgt außerdem, dass f auf $(0; \frac{1}{2\sqrt{2}})$ streng monoton wächst und auf $(\frac{1}{2\sqrt{2}}; \infty)$ streng monoton fällt. Damit liegt in $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ auch das globale Maximum vor.