1. RECHNEN MIT NATÜRLICHEN, GANZEN UND RATIONALEN ZAHLEN

Inhalt

1.1 Mengen und die natürlichen Zahlen
1.2 Die ganzen Zahlen
1.3 Die rationalen Zahlen
1.4 Die Grundrechenarten
1.5 Anordnung der Zahlen

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie kennen die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ und verstehen ihre grundlegenden Eigenschaften.
- Sie beherrschen die Grundrechenarten $+$, $-$, $\cdot$ und $:$.
- Sie kennen die Vergleichszeichen $>$ (ist größer als) und $<$ (ist kleiner als).

1.1 Mengen und die natürlichen Zahlen

Die einfachsten Zahlen sind die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$, die zum Zählen benutzt werden. Man nennt diese Zahlen *natürliche Zahlen* und bezeichnet die Menge aller dieser Zahlen mit dem Symbol $\mathbb{N}$. *Mengen* sind ein sehr nützliches Hilfsmittel, um mathematische Aussagen kurz, präzise und übersichtlich aufzuschreiben.

Eine *Menge* ist die Zusammenfassung von unterscheidbaren Objekten zu einem Ganzen. Die Objekte in einer Menge nennt man *Elemente*. Ist x ein Element der Menge M , so schreibt man

$$x \in M$$

(sprich: „x ist Element von M" oder „x liegt in M"); andernfalls schreibt man

$$x \notin M$$

(sprich: „x ist kein Element von M" oder „x liegt nicht in M").

Die einfachste Form, eine Menge zu beschreiben, ist die aufzählende Mengenschreibweise, bei der die

Elemente der Menge zwischen geschweifte Klammern gesetzt werden, z.B. ist

$$B = \{a, b, c\}$$

die Menge, die die Buchstaben a, b, c und sonst nichts enthält. Offensichtlich gilt $a \in B$ und $d \notin B$. Ist die Zahl der Elemente einer Menge zu groß, um alle aufzuführen (oder das Aufführen aller Elemente zu umständlich), kann man manchmal Elemente durch Punkte ersetzen, wenn leicht zu erraten ist, welche Elemente weggelassen wurden. Für die Menge der natürlichen Zahlen zwischen 2 und 16, also von 3 bis 15 einschließlich, welche man eigentlich durch

$$\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

angeben müsste, kann man kürzer auch

$$\{3, 4, 5, \ldots, 15\}$$

schreiben, da der Anfang $3, 4, 5$ die richtige Fortsetzung suggeriert.

Die *Menge der natürlichen Zahlen* ist

$$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}.$$

Nimmt man die Null hinzu, wird das durch einen Index Null an dem Buchstaben $\mathbb{N}$ bezeichnet:

$$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}.$$

Oft wird auch die Menge $\mathbb{N}_0$ als „Menge der natürlichen Zahlen" bezeichnet.

In vielen Fällen ist die Anzahl der Elemente aber zu groß und zu unübersichtlich, um sie (mit oder ohne Pünktchen) aufzuzählen. In diesem Fall werden die Elemente der Menge über die Eigenschaften charakterisiert, die hinter einem senkrechten Trennstrich angegeben werden.

> Die Menge aller Farben ist
>
> $$F = \{\, x \,|\, x \text{ ist eine Farbe} \,\}$$
>
> und die Menge der geraden Zahlen lässt sich durch
>
> $$G = \{\, y \,|\, y \text{ ist eine gerade Zahl} \,\}$$
>
> beschreiben. Die Menge aller natürlichen Zahlen, die zwischen 2 und 16 liegen (vgl. oben), kann man auch schreiben als
>
> $$\{3; 4; \ldots; 15\} = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \text{ liegt zwischen } 2 \text{ und } 16\}.$$
>
> Hier wird vor dem Trennstrich noch eine schon bekannte Menge (in diesem Fall $\mathbb{N}$) angegeben, in der die Elemente mit der angegebenen Eigenschaft zusätzlich liegen sollen. (Z.B. liegt die Zahl $3{,}5$ auch zwischen 2 und 16, sie gehört aber nicht zur Menge. Sie wird durch „$x \in \mathbb{N}$" ausgeschlossen.)

Bei Mengen spielt es keine Rolle, wie oft ein Element aufgezählt wird. Sie werden insbesondere nicht größer, wenn ihre Elemente mehrfach aufgezählt werden. Z.B. ist $\{1; 1; 2; 2; 2; 2\} = \{1; 2\}$. Auch auf die Reihenfolge der Elemente kommt es nicht an: $\{1; 2; 3\} = \{3; 2; 1\} = \{2; 1; 3; 1; 2; 3\} = \ldots$

Es erweist sich als zweckmäßig, eine Menge zur Verfügung zu haben, die keine Elemente besitzt. Diese heißt die *leere Menge* und wird mit $\emptyset$ oder $\{\}$ bezeichnet.

Aus gegebenen Mengen können neue konstruiert werden. Beipiele dafür sind die *Vereinigung* und der *Durchschnitt* von Mengen. Sie spielen bei der Bestimmung der Lösungsmengen von Ungleichungen eine nützliche Rolle.

Wir betrachten zwei Mengen A und B und definieren
die *Vereinigung* $A \cup B$ von A und B durch

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\},$$

den *Durchschnitt* $A \cap B$ von A und B durch

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

und die *Differenz* $A \setminus B$ von A und B (oder auch die *Differenz* A *ohne* B genannt) durch

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}.$$

In obiger Definition ist bei $x \in A$ *oder* $x \in B$ **kein** „entweder oder", sondern ein „logisches Oder" gemeint: x ist in A oder in B oder in beiden Mengen (gleichzeitig) enthalten. Ebenso ist bei $x \in A$ *und* $x \in B$ als

„logisches Und" gemeint: x ist sowohl in A als auch in B enthalten.

> Wir betrachten die zwei Mengen
>
> $$A = \{1; 2; 3; 4\} \quad \text{und} \quad B = \{3; 4; 5\}.$$
>
> Die Vereinigung von A und B enthält dann alle Elemente, die in mindestens einer der beiden Mengen enthalten sind, also ist
>
> $$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}.$$
>
> Der Durchschnitt enthält alle Elemente, die in beiden Mengen enthalten sind, also ist
>
> $$A \cap B = \{3; 4\}.$$
>
> Die Differenz von A und B enthält diejenigen Elemente, die in A enthalten sind, aber nicht in B, also ist
>
> $$A \setminus B = \{1; 2\}.$$

1.2 Die ganzen Zahlen

Mit den natürlichen Zahlen kann man wie gewohnt rechnen und erhält bei diesen Rechnungen in vielen Fällen wieder natürliche Zahlen als Ergebnisse. Zum Beispiel ist $2 + 3 = 5$ oder $4 \cdot 23 = 92$, aber schon die einfache Rechnung

$$1 - 2 = -1$$

ergibt keine natürliche sondern eine *ganze* Zahl.

Für jede natürliche Zahl $1, 2, \ldots$ lässt sich eine *Gegenzahl* konstruieren, sodass die Summe aus Zahl und Gegenzahl gerade Null ergibt. Sie wird durch Hinzufügen eines negativen Vorzeichens mit $-1, -2, \ldots$ bezeichnet. Damit wird die Menge der natürlichen Zahlen so vergrößert, dass damit auch Gleichungen wie $3 + x = 0$ gelöst werden können.

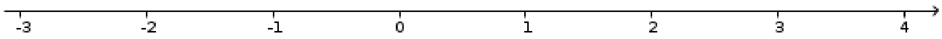
> $$1 + (-1) = 0, \qquad -3 + 3 = 0, \qquad 15 + (-15) = 0, \qquad \ldots$$

Fügt man nun die Gegenzahlen und die Null zur Menge der natürlichen Zahlen hinzu, so entsteht die Menge der *ganzen Zahlen*.

Die *Menge der ganzen Zahlen* ist die Menge

$$\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}.$$

Die ganzen Zahlen kann man sich an einem sogenannten *Zahlenstrahl* veranschaulichen. Von der Null als Referenzpunkt liegen dann in immer gleichen Abständen nach rechts die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 usw., und in immer gleichen Abständen nach links die zugehörigen Gegenzahlen -1, -2, -3 usw.



Um mit ganzen, insbesondere negativen Zahlen rechnen zu können, muss noch geklärt werden, was nun ein Ausdruck wie $-(-a)$ bedeutet. Nach unserem bisherigen Verständnis ist diese Zahl gerade die Gegenzahl zu $-a$, also diejenige, die bei Addition zu $-a$ Null ergibt. Diese Eigenschaft hat aber schon die Zahl a. Es gilt also:

$$-(-a) = a.$$

Für die Gegenzahlen wird die Multiplikation und Division auf die Multiplikation und Division natürlicher Zahlen zurückgeführt:

Für beliebige ganze Zahlen a und b gilt:

$$(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)\,.$$

Man kann die letzten Klammern auch weglassen und schreibt $-a \cdot b$. Außerdem ist

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b\,.$$

Entsprechend gelten für die Division

$$(-a) : b = a : (-b) = -(a : b) = -a : b\,,$$

$$(-a) : (-b) = a : b\,.$$

Da die Division natürlicher oder ganzer Zahlen meist nicht ohne Rest möglich ist, werden wir auf die Menge der rationalen Zahlen geführt.

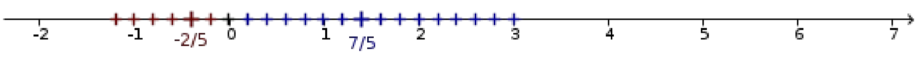
1.3 Die rationalen Zahlen

Addiert oder multipliziert man zwei ganze Zahlen oder subtrahiert man eine ganze Zahl von einer anderen, erhält man stets wieder eine ganze Zahl. Wenn man jedoch ein ganze Zahl durch eine andere teilt (dividiert), ist das Ergebnis im Allgemeinen keine ganze Zahl mehr, sondern man erhält Hälften, Drittel, Zehntel oder ähnliches.

Diese Zahlen können wiederum am Zahlenstrahl veranschaulicht werden. Als Beispiel betrachten wir die Zahl „Drei durch Fünf" (auch „Dreifünftel" genannt). Dazu wird die Strecke, die von Null nach Drei geht, in fünf Teile gleicher Länge geteilt. Das erste Teilstück geht von der Zahl Null zur Zahl Dreifünftel auf dem Zahlenstrahl. Sie wird als Bruch $\frac{3}{5}$ geschrieben. (Der Bruch $\frac{3}{5}$ oder $3/5$ und $3:5$ sind verschiedene Schreibweisen für dieselbe Zahl „Drei dividiert durch Fünf".)

Alternativ kann man auch alle Abschnitte zwischen den ganzen Zahlen in jeweils fünf gleiche Teile teilen. Dann ist das Stück von einem Teilungspunkt zum nächsten immer ein Fünftel, und die Zahl $\frac{3}{5}$ liegt also rechts von der Null beim dritten Teilungspunkt.

Entsprechend erhält man die Zahlen $\frac{7}{5}$ und $-\frac{2}{5}$ (links von Null) auf dem Zahlenstrahl.



Die Zahlen, die als Ergebnis einer Division ganzer Zahlen entstehen können, heißen *rationale Zahlen*. Die Menge aller rationaler Zahlen wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

Da eine Division durch Null nicht erlaubt ist, ist insbesondere klar, dass die Zahl unter dem Bruchstrich, also der Nenner, von Null verschieden sein muss.

Für die Menge der rationalen Zahlen schreibt man

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}.$$

Hierbei nennt man p den **Zähler** des Bruchs und q den **Nenner** des Bruchs.

Anmerkung zur Definition

In Definition 3 werden alle rationalen Zahlen mehrfach (sogar unendlich oft) aufgezählt, da zum Beispiel $\frac{4}{2} = \frac{6}{3}$ gilt. Da aber mehrfach aufgezählte Elemente eine Menge nicht vergrößern (siehe obige Bemerkung), stellt diese Definition dennoch kein Problem dar.

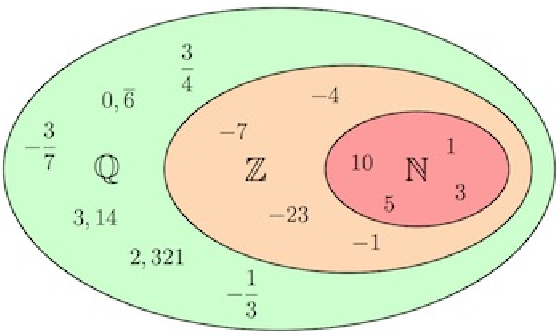
Mit der Regel 2 kann man aus Brüchen mit negativen Nennern leicht Brüche mit positiven Nennern machen, weshalb man jede rationale Zahl als Bruch $\frac{p}{q}$ mit einer natürlichen Zahl q schreiben kann.

> Es sind
>
> $$\frac{12}{-57} = -\frac{12}{57} = \frac{-12}{57}$$
>
> und
>
> $$\frac{-13}{-5} = \frac{13}{5}.$$

Da

$$-3 = \frac{-3}{1}, \qquad 0 = \frac{0}{1}, \qquad 5 = \frac{5}{1}, \qquad \text{etc.}$$

gilt, gehören auch die ganzen und damit auch die natürlichen Zahlen zu den rationalen Zahlen.



1.4 Die Grundrechenarten

Der Erfolg im Umgang mit mathematischen Ausdrücken hängt letztlich entscheidend davon ab, ob Sie die vier Grundrechenarten sicher beherrschen. Diese sind die *Addition* $+$, die *Subtraktion* $-$, die *Multiplikation* $\cdot$ und die *Division* $:$.

1. *Addition*: $5 + 8 = 13$; die Zahlen 5 und 8 heißen *Summanden* und die Zahl 13 heißt *Summe*.

2. *Subtraktion*: $14 - 9 = 5$; die Zahl 14 nennt man *Minuend* und die Zahl 9 *Subtrahend*. Die Zahl 5 ist *Differenz*.

3. *Multiplikation*: $4 \cdot 7 = 28$; die Zahlen 4 und 7 heißen *Faktoren* und die Zahl 28 heißt *Produkt*.

4. *Division*: $6 : 3 = 2$; die Zahl 6 nennt man *Dividend* und die Zahl 3 *Divisor*. Die Zahl 2 heißt *Quotient*.

Wie man rationale Zahlen addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert, wird in Abschnitt I.4 Bruchrechnung erklärt.

Grundsätzlich dürfen zwei Rechensymbole nicht direkt hintereinander stehen. Statt $5 + -3$ schreibt man daher $5 + (-3)$, was dasselbe wie $5 - 3$ ist.
Statt $5 - -3$ schreibt man daher $5 - (-3)$, was dasselbe wie $5 + 3$ ist.
„Vier multipliziert mit minus Zwei" muss mit Klammern als $4 \cdot (-2)$ geschrieben werden, und ebenso „Vier geteilt durch minus Zwei" als $4 : (-2)$.

Häufig wird man Ausdrücken begegnen, die zwei oder mehr Rechenoperationen enthalten, wie etwa

$$2 \cdot 4 + 5 \cdot (3 + 2),$$

weshalb geklärt werden muss, in welcher Reihenfolge die Rechnungen durchzuführen sind.

Wenn ein Ausdruck mehrere Rechenoperationen enthält, so ist bei der Berechnung folgende Reihenfolge einzuhalten:

1. Ausdrücke in Klammern berechnen (die innersten Klammern zuerst)

2. Multiplikationen und Divisionen von links nach rechts

3. Additionen und Subtraktionen von links nach rechts

Man sagt auch:

"Punktrechnung (Multiplikation und Division) *geht vor Strichrechnung"* (Addition und Subtraktion).

In obigem Beispiel $2 \cdot 4 + 5 \cdot (3 + 2)$ wird also zunächst der Ausdruck in der Klammer berechnet: $3 + 2 = 5$. Dann werden die Multiplikationen (von links nach rechts) ausgeführt: $2 \cdot 4 = 8$ und $5 \cdot 5 = 25$. Zuletzt wird die Addition $8 + 25$ ausgeführt: $8 + 25 = 33$.

Also:

$$2 \cdot 4 + 5 \cdot (3+2) = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 8 + 25 = 33.$$

richtig	**falsch**
$3 - 2 \cdot 8 = 3 - 16 = -13$	$3 - 2 \cdot 8 = 1 \cdot 8 = 8$
$2 - 3 - 4 = -1 - 4 = -5$	$2 - 3 - 4 = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$
$1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 3 + 6 = 9$	$1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 3 + 2 \cdot 3 = 5 \cdot 3 = 15$
$18 : 3 \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12$	$18 : 3 \cdot 2 = 18 : 6 = 3$
$18 : (3 \cdot 2) = 18 : 6 = 3$	$18 : (3 \cdot 2) = 6 \cdot 2 = 12$

1.5 Anordnung der Zahlen

Die natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen (und auch die reellen Zahlen aus dem nächsten Abschnitt) kann man nach ihrer „Größe" anordnen. Bei den natürlichen Zahlen geht das intuitiv dadurch, dass diese Zahlen Anzahlen von Dingen beschreiben: Eine natürliche Zahl ist größer als die andere, wenn sie eine größere Anzahl beschreibt. Wenn man die Zahlen auf dem Zahlenstrahl betrachtet, sieht man, dass die größeren natürlichen Zahlen immer weiter rechts liegen als die kleineren.
Dies verwendet man dann als Kriterium für alle Zahlen des Zahlenstrahls:

Eine Zahl a ist *kleiner als* eine Zahl b, wenn a auf dem Zahlenstrahl weiter links liegt als b.
Eine Zahl a ist *größer als* eine Zahl b, wenn a auf dem Zahlenstrahl weiter rechts liegt als b.

Zum Vergleichen von Zahlen verwendet man die Symbole

$>$ (sprich: „ist größer als"), $\geq$ (sprich: „ist größer oder gleich"),

und die Symbole

$<$ (sprich: „ist kleiner als"), $\leq$ (sprich: „ist kleiner oder gleich")

sowie natürlich das Symbol $=$ (sprich: „ist gleich (groß wie)"). Dabei zeigt die Spitze der Symbole „$>$" und „$<$" immer auf den kleineren Term.

Anstelle von „größer oder gleich" und „kleiner oder gleich" wird oft kürzer „größer gleich" bzw. „kleiner gleich" gesagt. Um den Unterschied zwischen $>$ und $\geq$ zu betonen, wird für $>$ auch „ist echt größer als" und entsprechend für $<$ auch „ist echt kleiner als" gesagt.

Für zwei Zahlen x und y gilt stets genau eine der drei Beziehungen

$$x > y, \qquad x = y, \qquad x < y.$$

Durch Veranschaulichung auf dem Zahlenstrahl erkennt man leicht, dass folgende Ungleichungen richtig sind:

$$1 < 2 < 4,$$

$$-7 < -3 < -\frac{5}{2} < -1 \leq 0 < \frac{5}{2}.$$

Bei zwei Brüchen mit demselben positiven Nennern ist der Bruch der kleinere, der den kleineren Zähler hat, z.B.

$$\frac{-5}{3} < \frac{-2}{3} < \frac{4}{3} < \frac{7}{3}$$

Wenn zwei Brüche verschiedene Nenner haben, können sie durch Erweitern in Brüche mit gleichen Nennern überführt werden.

Mehr zu Vergleichszeichen und zum Einfluss von Rechenoperationen auf Vergleichszeichen finden Sie in Kapitel III.1.

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Bestimmen Sie, welche der folgenden Zahlen natürliche Zahlen, ganze Zahlen oder rationale Zahlen sind. (Geben Sie jeweils alle zutreffenden Bezeichnungen an.)

a) 3

b) -3

c) $-\frac{8}{2}$

d) $\frac{4}{10}$

e) $(-4) \cdot (-3)$

Antwort

a) natürliche Zahl, ganze Zahl, rationale Zahl

b) ganze Zahl, rationale Zahl

c) ganze Zahl, rationale Zahl

d) rationale Zahl

e) natürliche Zahl, ganze Zahl, rationale Zahl

Lösung a)

3 ist eine natürliche Zahl. Da jede natürliche Zahl eine ganze Zahl und jede ganze Zahl eine rationale Zahl ist, ist 3 auch eine ganze Zahl und eine rationale Zahl.

Durch die Darstellung $3 = \frac{3}{1}$ erkennt man direkt, dass 3 eine rationale Zahl ist.

Lösung b)

-3 ist eine negative ganze Zahl und daher keine natürliche Zahl. Als ganze Zahl ist -3 natürlich auch rational.

Lösung c)

Da $-\frac{8}{2} = -4$ gilt, ist $-\frac{8}{2}$ eine ganze Zahl und damit auch eine rationale Zahl. Da aber -4 eine negative Zahl ist, ist $-\frac{8}{2}$ keine natürliche Zahl.

Lösung d)

Die Zahl $\frac{4}{10}$ ist ein Bruch und daher eine rationale Zahl. Da aber 4 nicht durch 10 teilbar ist, ist $\frac{4}{10}$ keine ganze Zahl und auch keine natürliche Zahl.

Lösung e)

$(-4)\cdot(-3)=12$ ist eine natürliche Zahl, also auch eine ganze und eine rationale Zahl.

ÜBUNG 2

Gegeben sind die Mengen von ganzen Zahlen

$$M = \{2; 3; -1; 10; -2\} \quad \text{und} \quad K = \{-2; -1; 0; \ldots; 5; 6\}.$$

Bestimmen Sie den Durchschnitt $M \cap K$ und die Vereinigung $M \cup K$, sowie die Menge

$$A = \{x \in K \mid x \text{ ist durch } 3 \text{ teilbar}\}.$$

Bestimmen Sie weiter die Mengendifferenz $K \setminus A$.

Antwort

Es sind

$$\begin{aligned} M \cap K &= \{2; 3; -1; -2\}, \\ M \cup K &= \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 10\}, \\ A &= \{0; 3; 6\} \quad \text{und} \\ K \setminus A &= \{-2; -1; 1; 2; 4; 5\}. \end{aligned}$$

Lösung zu $M \cap K$

Der Durchschnitt $M \cap K$ enthält alle Zahlen, die sowohl in M als auch in K enthalten sind.

Von den Zahlen, die in der Menge M liegen, liegt nur die 10 nicht in K, also ist

$$M \cap K = \{2; 3; -1; -2\}.$$

Lösung zu $M \cup K$

Die Vereinigung $M \cup K$ enthält alle Zahlen, die in M oder in K oder sogar in beiden liegen.

M enthält die Zahlen $2, 3, -1, 10$ und -2, und K enthält die Zahlen $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ und 6. Also ist

$$M \cup K = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 10\}.$$

Lösung zu A

Die Menge A enthält alle Zahlen, die in K liegen und die angegebene Eigenschaft haben, also durch 3 teilbar sind.

Da K die Zahlen $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ und 6 enthält, und von diesen nur die Zahlen 0, 3 und 6 durch 3 teilbar sind, gilt somit

$$A = \{0; 3; 6\}.$$

Lösung zu $K \setminus A$

Die Menge $K \setminus A$ besteht aus allen Zahlen von K, die nicht durch 3 teilbar sind.

Definitionsgemäß ist $K \setminus A$ die Menge aller Zahlen, die in K und nicht in A liegen. Also erhalten wir

$$K \setminus A = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\} \setminus \{0; 3; 6\} = \{-2; -1; 1; 2; 4; 5\}\,.$$

ÜBUNG 3

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke ohne Verwendung eines Taschenrechners:

a) $2-3+2-1-5$

b) $2\cdot 3+(-2)\cdot 3+2\cdot(-3)+5\cdot 6$

c) $4:2+(-6):3+8:(-4)+9:3$

d) $-4+(-3):3+2\cdot(-3)+(-9)\cdot 11$

Antwort

a) -5

b) 24

c) 1

d) -110

Lösung a)

Der Term enthält ausschließlich Additionen und Subtraktionen. In diesem Fall werten wir die Rechenoperationen im Ausdruck einfach von links nach rechts der Reihe nach aus:

$$2-3+2-1-5=-1+2-1-5=1-1-5=0-5=-5.$$

Lösung b)

Der Ausdruck enthält sowohl Additionen als auch Multiplikationen. In diesem Fall werden zunächst die Multiplikationen berechnet:

$$2\cdot 3+(-2)\cdot 3+2\cdot(-3)+5\cdot 6=6+(-6)+(-6)+30\,.$$

Es verbleiben nur Additionen und Subtraktionen, also werten wir von links nach rechts aus und erhalten

$$6-6-6+30=0-6+30=-6+30=24\,.$$

Das Ergebnis ist also

$$2\cdot 3+(-2)\cdot 3+2\cdot(-3)+5\cdot 6=24\,.$$

Lösung c)

Weil sowohl Additionen als auch Divisionen vorkommen, werden zuerst die Divisionen ausgewertet:

$$4:2+(-6):3+8:(-4)+9:3=2+(-2)+(-2)+3\,.$$

Der verbleibende Term enthält nur noch Additionen und Subtraktionen, also wird das Ergebnis von links nach rechts berechnet:

$$2+(-2)+(-2)+3=0+(-2)+3=-2+3=1\,.$$

Lösung d)

Multiplikationen und Divisionen werden zuerst ausgewertet:

$$-4+(-3):3+2\cdot(-3)+(-9)\cdot 11=-4+(-1)+(-6)+(-99)\,.$$

Die verbleibenden Additionen und Subtraktionen werden anschließend von links nach rechts berechnet:

$$-4+(-1)+(-6)+(-99)=-5+(-6)+(-99)=-11+(-99)=-110\,.$$

ÜBUNG 4

Ordnen Sie die folgenden Zahlen in aufsteigender Reihenfolge an.

a) $-5; \quad -2; \quad 0; \quad -100; \quad -50$

b) $-5; \quad 2; \quad -2; \quad 0; \quad 5; \quad 7; \quad -100; \quad 100$

c) $\frac{3}{10}; \quad -20; \quad \frac{-5}{2}; \quad 1; \quad \frac{-15}{-3}$

Antwort

a) $-100; \quad -50; \quad -5; \quad -2; \quad 0$

b)$-100; \quad -5; \quad -2; \quad 0; \quad 2; \quad 5; \quad 7; \quad 100$

c)$-20; \quad \frac{-5}{2}; \quad \frac{3}{10}; \quad 1; \quad \frac{-15}{-3}$

Lösung a)

Es ist klar, dass $0 < 2 < 5 < 50 < 100$ ist. Ein Wechsel des Vorzeichens dreht die Reihenfolge der Ordnung um, wie man am Zahlenstrahl sehen kann. Deshalb gilt

$$-100 < -50 < -5 < -2 < 0\,.$$

Lösung b)

Es gilt $0 < 2 < 5 < 7 < 100$ und $0 < 2 < 5 < 100$. Der Übergang zu negativen Zahlen dreht die Reihenfolge um: $-100 < -5 < -2 < 0$. Insgesamt gilt damit

$$-100 < -5 < -2 < 0 < 2 < 5 < 7 < 100\,.$$

Lösung c)

Zunächst sind die negativen Zahlen kleiner als die positiven.
Da $\frac{-15}{-3} = \frac{15}{3} = 5$ gilt, ist diese Zahl positiv. Die einzigen negativen Zahlen sind also -20 und $\frac{-5}{2} = -\frac{5}{2}$. Da $\frac{5}{2} < \frac{6}{2} = 3 < 20$ gilt, ist $-20 < -\frac{5}{2}$. Bei den positiven Zahlen sieht man schnell $\frac{3}{10} < \frac{10}{10} = 1 < 5 = \frac{-15}{-3}$.
Insgesamt ergibt sich also

$$-20 < \frac{-5}{2} < \frac{3}{10} < 1 < \frac{-15}{-3}.$$

2. RECHNEN MIT REELLEN ZAHLEN, DEZIMALZAHLEN

Inhalt

- 2.1 Die reellen Zahlen
- 2.2 Intervalle
- 2.3 Dezimalzahlen
- 2.4 Rechnen mit Dezimalzahlen
- 2.5 Brüche und Dezimalzahlen
- 2.6 Runden von Dezimalzahlen

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

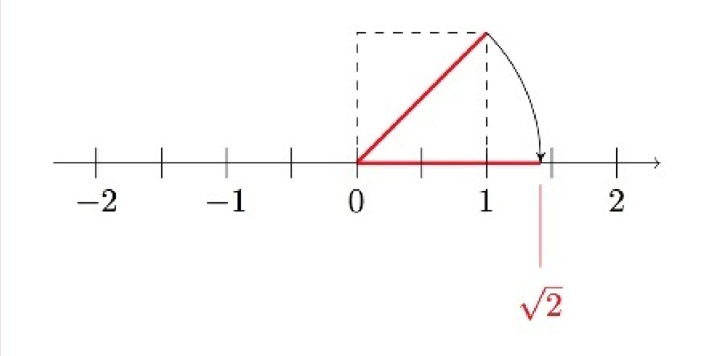
Lernziele

- Sie besitzen eine grundlegende Vorstellung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.
- Sie beherrschen die Regeln zur Kommaverschiebung.
- Sie können Dezimalzahlen in Brüche und Brüche in Dezimalzahlen umwandeln.
- Sie sind in der Lage, den Näherungswert eines Bruches oder eines Dezimalbruches bis auf eine vorgegebene Zahl von Stellen zu berechnen, d.h. Sie können korrekt runden.
- Sie können mit Dezimalzahlen rechnen.

2.1 Die reellen Zahlen

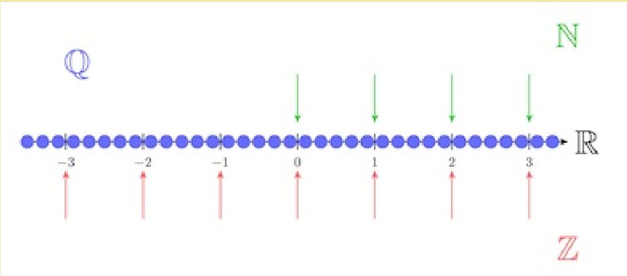
Alle natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen können auf einer Zahlengeraden dargestellt werden. Jedoch füllen sie die Zahlengerade nicht völlig aus. Es gilt nämlich:

Konstruiert man über dem Einheitsintervall der Zahlengerade von 0 bis 1 ein Quadrat und schlägt um 0 einen Kreis, der durch die rechte obere Ecke des Quadrates geht, so schneidet dieser die Zahlengerade in keinem rationalen Punkt! (vgl. Abschnitt I.6.1 Die Quadratwurzel)



Diese Zahl, die man mit $\sqrt{2}$ (sprich: „Wurzel aus 2") bezeichnet, ist also keine rationale Zahl, sie liegt aber dennoch auf der Zahlengeraden. Zahlen auf der Zahlengeraden, die nicht als rationale Zahlen dargestellt werden können, nennt man *irrationale Zahlen*. Tatsächlich sind die meisten Wurzeln wie $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ oder $\sqrt{7}$ irrationale Zahlen, aber auch andere Zahlen wie die Kreiszahl $\pi = 3{,}14\ldots$ oder die Eulersche Zahl $e = 2{,}71\ldots$

Nimmt man die irrationalen Zahlen zu den rationalen hinzu - nimmt man also alle Zahlen der Zahlengeraden - so erhält man die *reellen Zahlen*.



Die Menge der reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

2.2 Intervalle

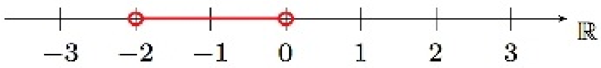
Für spezielle Teilmengen der reellen Zahlen, die *Intervalle*, gibt es noch eine besondere Notation, die im Folgenden erläutert wird. Für die Visualisierung der Intervalle gibt es verschiedene Möglichkeiten. Die unten angegebene ist nur eine davon.

Zur Erinnerung: Eine reelle Zahl a ist kleiner als b, $(\, a < b \,)$, wenn a auf dem Zahlenstrahl links von b liegt. Für zwei reelle Zahlen a und b gilt stets genau eine der drei Beziehungen $a < b$, $a = b$, oder $b < a$.

Das *offene Intervall* von a bis b, wobei $a < b$, ist die Menge aller reellen Zahlen zwischen a und b. Sie wird mit $(a;b)$ bezeichnet:

$$(a;b) = \{\, x \,|\, a < x < b \,\}.$$

$$(-2;0) = \{\, x \,|\, -2 < x < 0 \,\}$$

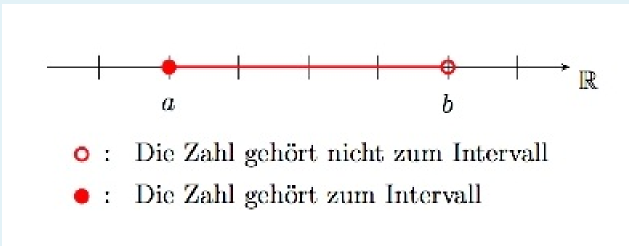


Da Intervalle immer Teilmengen der reellen Zahlen sind, wird anstelle von $\{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \,\}$ kürzer $\{\, x \mid a < x < b \,\}$ etc. geschrieben.

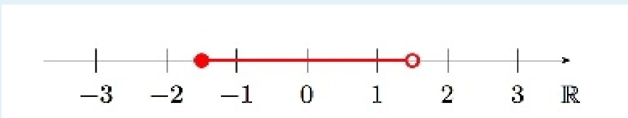
Halboffene Intervalle $[a;\, b)$ und $(a;\, b]$

Nimmt man den linken Randpunkt a zur Menge hinzu, erhält man das *rechtsoffene Intervall* von a bis b und schreibt dafür $[a;b)$. Es ist also

$$[a;b) = \{\, x \,|\, a \leq x < b \,\}.$$

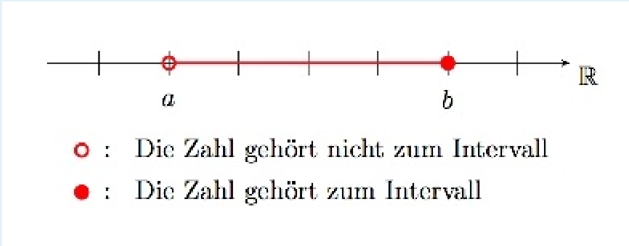


$$\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right) = \left\{\, x \,\middle|\, -\frac{3}{2} \leq x < \frac{3}{2} \,\right\}$$

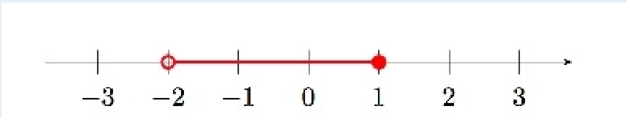


Wird anstelle des linken der rechte Randpunkt b zum offenen Intervall hinzugefügt, erhält man das *linksoffene Intervall*

$$(a;b] = \{\, x \,|\, a < x \leq b \,\}.$$



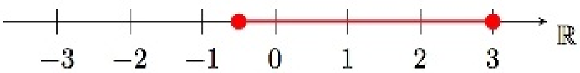
$$(-2; 1] = \{\, x \,|\, -2 < x \leq 1 \,\}$$



Das *abgeschlossene Intervall* von a bis b ist die Menge aller reellen Zahlen zwischen a und b einschließlich der Randpunkte a und b, also

$$[a; b] = \{\, x \,|\, a \leq x \leq b \,\}.$$

$$\left[-\frac{1}{2}; 3\right] = \left\{\, x \,\middle|\, -\frac{1}{2} \leq x \leq 3 \,\right\}$$



Speziell bei abgeschlossenen Mengen ist zusätzlich zu $a < b$ auch $a = b$ zulässig, das Intervall $[a; a] = \{a\}$ ist die einpunktige Menge, die nur aus a besteht.

Oft werden auch die Zahlenmengen $\{\, x \,|\, x > a \,\}$, $\{\, x \,|\, x \geq a \,\}$, $\{\, x \,|\, x < a \,\}$ und $\{\, x \,|\, x \leq a \,\}$ für feste reelle Zahlen a benötigt. In Anlehnung an die Intervalle werden diese Mengen bezeichnet als

$$
\begin{aligned}
\{\, x \,|\, x > a \,\} &= (a; \infty)\,, \\
\{\, x \,|\, x \geq a \,\} &= [a; \infty)\,, \\
\{\, x \,|\, x < a \,\} &= (-\infty; a)\,, \\
\{\, x \,|\, x \leq a \,\} &= (-\infty; a]\,, \\
\mathbb{R} &= (-\infty; \infty)
\end{aligned}
$$

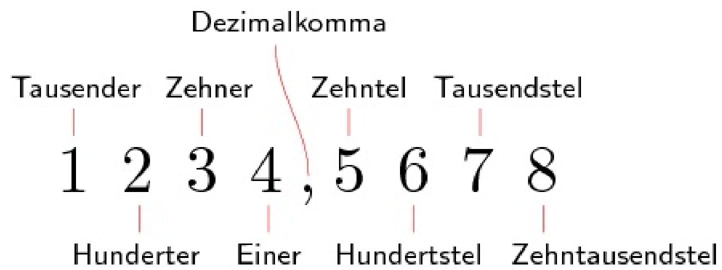
mit oberen „Grenzen” ∞ (sprich: *unendlich*) bzw. unteren „Grenzen” $-\infty$ (sprich: *minus unendlich* oder *negativ unendlich*). Da ∞ und $-\infty$ keine Zahlen sind, steht dort immer eine runde Klammer.

Anmerkung zu weiteren Notationen

Während die Notation zu abgeschlossenen Intervallen in der Literatur als $[a; b]$ einheitlich ist, gibt es für rechts-, links- bzw. offene Intervalle auch eine weitere Notation, nämlich anstelle der runden Klammer die nach außen geöffnete eckige Klammer, d.h. das rechtsoffene Intervall von a bis b wird auch mit $[a; b[$ bezeichnet, das linksoffene mit $]a; b]$ und das offene Intervall von a bis b mit $]a; b[$. In diesem Kurs wird aber durchgängig die Notation mit runden Klammern verwendet.

2.3 Dezimalzahlen

Reelle Zahlen kann man je nach ihren Eigenschaften verschieden beschreiben (z.B. $\sqrt{2}$, π^2, $\frac{2}{9}$). Es gibt aber eine Darstellung, die für alle reellen Zahlen einheitlich ist und mit der man außerdem die Größe der reellen Zahlen gut vergleichen kann, die sogenannte *Dezimalschreibweise*. Eine reelle Zahl, die in der Dezimalschreibweise dargestellt ist, nennt man *Dezimalzahl*.



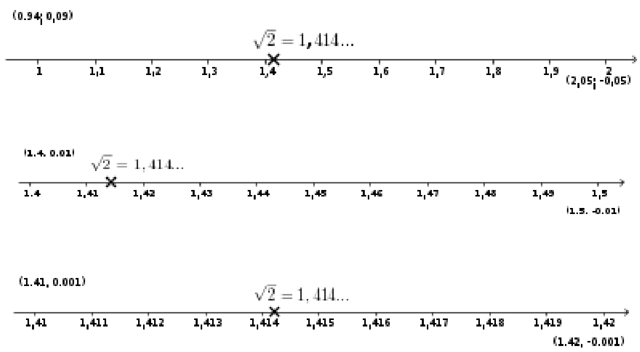
In der Abbildung ist eine *abbrechende* Dezimalzahl dargestellt, d.h. sie besitzt nur eine endliche Anzahl an Nachkommastellen (oder auch *Dezimalstellen*). Im Allgemeinen ist die Ziffernfolge nach dem Komma aber unendlich lang. Bei den nicht-abbrechenden Dezimalzahlen unterscheidet man noch grob zwei Fälle:

1. Periodische Dezimalzahlen: Bei diesen wiederholt sich ab einer bestimmten Nachkommastelle immer die gleiche Folge von Ziffern, die sogenannte *Periode*.
   Zum Beispiel ist $2{,}2151515\ldots$ eine periodische Dezimalzahl mit Periode 15. Man schreibt diese Dezimalzahl dann auch als $2{,}2\overline{15}$, d.h. man setzt einen Überstrich über die Periode.

2. Nicht-periodische Dezimalzahlen: Bei diesen gibt es keine Periode.

Im Unterabschnitt 5 wird noch näher darauf eingegangen.

Um die Dezimaldarstellung zum Beispiel der Zahl $\sqrt{2}$ (vgl. Satz 1) zu bekommen, muss man sich ihre Lage auf dem Zahlenstrahl genau anschauen, also den Bild-Ausschnitt in Satz 1 vergrößern:



Zunächst liegt diese Zahl zwischen den ganzen Zahlen 1 und 2, weshalb die Darstellung mit $1,\ldots$ beginnt. Vergrößert man den Ausschnitt des Zahlenstrahls sieht man, dass $\sqrt{2}$ zwischen $1+\frac{4}{10}=1{,}4$ und $1+\frac{5}{10}=1{,}5$ liegt. Also beginnt die Darstellung mit $1{,}4\ldots$.
Eine weitere Vergrößerung zeigt, dass $\sqrt{2}$ zwischen $1{,}4+\frac{1}{100}=1{,}41$ und $1{,}4+\frac{2}{100}=1{,}42$ liegt. Die Darstellung beginnt daher mit $1{,}41\ldots$.
Eine dritte Vergrößerung des Ausschnitts liefert, dass die Dezimaldarstellung von $\sqrt{2}$ mit $1{,}414\ldots$ beginnt.
Anstatt auf diese grafische Weise die Nachkommastellen zu bestimmen, werden diese in der Praxis berechnet.

Anstelle des Kommas wird auch ein „Dezimalpunkt” als Dezimalzeichen verwendet, insbesondere im angelsächsischen Sprachbereich, auf Taschenrechnern und in vielen Computerprogrammen.

2.4 Rechnen mit Dezimalzahlen

Um mit Dezimalzahlen rechnen zu können, ist zunächst wichtig zu wissen, wie sich die Zahl verändert, wenn das Komma verschoben wird.

Kommaverschiebung

Wird eine Dezimalzahl mit $10, 100, 1000, \ldots$ multipliziert, so wird das Komma um die Anzahl der Nullen nach rechts verschoben. Entsprechend wird bei der Division durch $10, 100, 1000, \ldots$, das Komma um die entsprechende Anzahl der Nullen nach links verschoben.

Falls beim Verschieben nach links die Anzahl der Dezimalstellen vor dem Komma nicht ausreicht, müssen der Zahl zunächst noch Nullen vorangestellt werden. Ebenso müssen der Zahl nach den letzten Dezimalstellen noch Nullen angehängt werden, falls die Anzahl der Dezimalstellen nach dem Komma beim Verschieben nach rechts nicht ausreicht.

> - $32{,}174 \cdot 100 = 3217{,}4$,
> - $143{,}27 : 1000 = 0143{,}27 : 1000 = 0{,}14327$,
> - $13{,}1 \cdot 100 = 13{,}10 \cdot 100 = 1310$,
> - $2{,}2\overline{15} \cdot 100 = 221{,}5\overline{15}$.

Das schriftliche Addieren und Subtrahieren von Dezimalzahlen funktioniert genauso wie das Addieren und Subtrahieren mit ganzen Zahlen. Die Zahlen müssen natürlich stellenwertrichtig untereinander geschrieben werden, also Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Zehntel unter Zehntel usw., sowie Komma unter Komma. Dann müssen die stellenwertrichtig untereinander geschriebenen Zahlen mit Übertrag addiert bzw. subtrahiert werden. Das Komma im Ergebnis wird genau unter die anderen Kommas gesetzt:

> Wir betrachten die Addition $1{,}34 + 32{,}7$.
>
> $$\begin{array}{r} 1{,}34 \\ 32{,}7 \\ \hline 34{,}04 \end{array}$$
>
> Das Endergebnis lautet $34{,}04$.

Die Multiplikation zweier abbrechender Dezimalzahlen lässt sich auch auf die Multiplikation ganzer Zahlen zurückführen. Hier werden die Kommas in beiden Zahlen einfach ganz nach rechts verschoben, so dass sie praktisch verschwinden, und die neuen Zahlen wie gewohnt multipliziert. Im Ergebnis verschiebt man dann das Komma wieder um so viele Stellen nach links, wie man vorher insgesamt nach rechts geschoben hat. Haben also zum Beispiel der erste Faktor 3 Nachkommastellen und der zweite 2, so verschiebt man insgesamt um $3 + 2 = 5$ Stellen.

Erklärung

Nach Regel 4 zur Kommaverschiebung ist das Verschieben des Kommas nach rechts nichts anderes, als mit einer Zehnerpotenz zu multiplizieren. Haben also zum Beispiel der erste Faktor 3 Nachkommastellen und der zweite 2, so hat man durch Weglassen der Kommas die erste Zahl mit $1{,}000$ und die zweite Zahl mit 100 multipliziert. Das Ergebnis, das man ohne Kommas erhält, muss man also anschließend durch $1{,}000 \cdot 100 = 100000$ teilen. Das heißt man muss das Komma um $3 + 2 = 5$ Stellen nach links verschieben.

$$0{,}04 \cdot 1{,}5 = ?$$

Wir lassen die Kommas weg (d.h. verschieben es um 2 bzw. 1 Stelle nach rechts). Nun ist

$$4 \cdot 15 = 60.$$

In diesem Ergebnis müssen wir das Komma wieder um $2+1=3$ Stellen nach links verschieben und erhalten $0{,}060 = 0{,}06$. Also gilt:

$$0{,}04 \cdot 1{,}5 = 0{,}06.$$

Anmerkung: Normalerweise besitzt das Ergebnis genauso viele Nachkommastellen wie die beiden Faktoren zusammen. Dass es in diesem Fall eine Nachkommastelle weniger ist, liegt einfach daran, dass die letzte Nachkommastelle, welche ja gleich 0 war, weggelassen wurde.

Auch die Division zweier abbrechender Dezimalzahlen lässt sich auf die Division ganzer Zahlen zurückführen. Hier werden die Kommas in beiden Zahlen um die gleiche Anzahl an Stellen nach rechts verschoben, so dass beide verschwinden. Dann werden die neuen Zahlen dividiert. Das Ergebnis der Division ist das gesuchte Resultat.
Wie genau die schriftliche Division von statten geht, wenn keine ganze Zahl herauskommt, wird im Unterabschnitt 5 erläutert.

Erklärung

Nach Regel 4 zur Kommaverschiebung ist das Verschieben des Kommas nach rechts nichts anderes als mit einer Zehnerpotenz zu multiplizieren. Verschiebt man beide Kommas gleich weit nach rechts, hat man also sowohl den Dividenden als auch den Divisor mit der gleichen Zahl multipliziert. Das Ergebnis bleibt dann aber dasselbe.

$$2{,}48 : 0{,}4 = ?$$

Da die erste Dezimalzahl zwei Nachkommastellen und die zweite Dezimalzahl nur eine Nachkommastelle besitzt, verschiebt man das Komma also jeweils um zwei Stellen:

$$248 : 40 = 62 : 10 = \frac{62}{10} = 6{,}2.$$

Also ist

$$2{,}48 : 0{,}4 = 6{,}2.$$

Beim Berechnen von Ausdrücken mit mehreren Rechenoperationen und Klammern geht man genauso vor, wie im vorigen Abschnitt beschrieben.

2.5 Brüche und Dezimalzahlen

Da jeder Bruch, d.h. jede rationale Zahl, auch eine reelle Zahl ist, besitzt jeder Bruch auch eine Dezimaldarstellung. Umgekehrt stellt sich natürlich die Frage, welche Dezimalzahlen rationale Zahlen sind.

Jede rationale Zahl wird durch eine abbrechende oder periodische Dezimalzahl dargestellt, und jede abbrechende oder periodische Dezimalzahl stellt eine rationale Zahl dar.

Diese Aussage ergibt sich direkt aus den Verfahren, wie man einen Bruch in eine (abbrechende oder periodische) Dezimalzahl umrechnet, und wie man aus einer abbrechenden oder periodischen Dezimalzahl einen Bruch erhält.

Ist eine abbrechende Dezimalzahl gegeben, so erhält man den zugehörigen Bruch, indem man die Regel zur Kommaverschiebung anwendet: Das Verschieben des Kommas nach rechts ist nichts anderes als mit einer Zehnerpotenz zu multiplizieren. Also muss man die Zahl ohne Komma wieder durch die entsprechende Zehnerpotenz dividieren, um die ursprüngliche Zahl zu bekommen.

> $1{,}2 \cdot 10 = 12$, also ist $1{,}2 = 12 : 10 = \frac{12}{10}$.
>
> $32{,}177 \cdot 1000 = 32177$, also ist $32{,}177 = 32177 : 1000 = \frac{32177}{1000}$.

Umrechnung einer periodischen Dezimalzahl in einen Bruch

Zur Umrechnung einer periodischen Dezimalzahl in einen Bruch kommt auch die Kommaverschiebung zur Anwendung:
Man verschiebt zunächst das Komma um die Länge der Periode nach rechts. Die so entstandene Zahl hat dann ab einer gewissen Nachkommastelle genau die gleichen Nachkommastellen wie die ursprüngliche Zahl, sodass die Differenz aus neuer Zahl und ursprünglicher Zahl eine abbrechende Dezimalzahl ist. Für letztere wurde die Berechnung des zugehörigen Bruchs eben erklärt.
Die genaue Berechnung des Bruchs zur ursprünglichen Dezimalzahl soll anhand des folgenden Beispiels deutlich werden:

> Um $2{,}2\overline{15}$ als Bruch darzustellen, wird zunächst das Komma um die Länge der Periode, also um 2 Stellen verschoben, wodurch man die Zahl $221{,}5\overline{15} = 100 \cdot 2{,}2\overline{15}$ erhält. Nun subtrahiert man diese zwei Zahlen:
>
> $$\begin{array}{rr} & 221,5\overline{15} \\ - & 2,2\overline{15} \\ \hline & 219,3 \end{array}$$
>
> Das Ergebnis der Subtraktion ist also $219{,}3 = \frac{2193}{10}$.
>
> Daraus ergibt sich die Gleichung
>
> $$\frac{2193}{10} = 100 \cdot 2{,}2\overline{15} - 1 \cdot 2{,}2\overline{15} = 99 \cdot 2{,}2\overline{15}.$$
>
> Mit den Rechenregeln für Brüche erhält man dann
>
> $$2{,}2\overline{15} = \frac{2193}{10} : 99 = \frac{2193}{10} \cdot \frac{1}{99} = \frac{2193}{990}.$$

Für die Umrechnung eines Bruches in eine Dezimalzahl wendet man die schriftliche Division an. Allerdings hört man nicht auf, wenn der Rest kleiner als der Divisor ist, sondern man setzt ein Komma und rechnet nach Anhängen von Nullen weiter bis entweder irgendwann der Rest 0 auftaucht, oder ein Rest auftritt, der schon einmal da war. Im ersten Fall erhält man eine abbrechende Dezimalzahl, im zweiten Fall eine periodische Dezimalzahl.
Die genaue Berechnung der Dezimalzahl soll anhand der folgenden Beispiele deutlich werden:

1. Beispiel

Für den Bruch $\frac{25}{4}$ soll die Dezimaldarstellung gefunden werden.
Zunächst führt man die übliche schriftliche Division durch:

$$\begin{array}{l} 25 : 4 = 6 \\ \underline{24} \\ \ \ 1 \end{array}$$

Anschließend setzt man hinter die Zahl 6 ein Komma und rechnet weiter, indem man immer an den Rest (hier 1) eine 0 anhängt:

$$\begin{array}{l} 25 : 4 = 6{,}25 \\ \underline{24} \\ \ 10 \\ \underline{\ \ 8} \\ \ \ 20 \\ \ \ \underline{20} \\ \ \ \ 0 \end{array}$$

Nun ist der Rest 0 aufgetreten, weshalb die Rechnung fertig ist.
Also ist $\frac{25}{4} = 6{,}25$.

2. Beispiel

Für den Bruch $\frac{233}{11}$ soll die Dezimaldarstellung gefunden werden.
Zunächst führt man die übliche schriftliche Division durch:

$$\begin{array}{l} 233 : 11 = 21 \\ \underline{22} \\ 13 \\ \underline{11} \\ 2 \end{array}$$

Anschließend setzt man hinter die Zahl 21 ein Komma und rechnet weiter, indem man immer an den Rest (hier 2) eine 0 anhängt:

$$\begin{array}{l} 233 : 11 = 21{,}18 \\ \underline{22} \\ 13 \\ \underline{11} \\ \mathbf{2}0 \\ \underline{11} \\ 90 \\ \underline{88} \\ \mathbf{2} \end{array}$$

Nun ist ein Rest aufgetreten, der vorher schon einmal da war, weshalb die Rechnung wie für die letzten zwei Dezimalstellen weitergehen würde.
Also ist $\frac{233}{11} = 21{,}18181818\ldots = 21,\overline{18}$.

3. Beispiel

Für den Bruch $\frac{41}{6}$ soll die Dezimaldarstellung gefunden werden.
Zunächst führt man die übliche schriftliche Division durch:

$$\begin{array}{l} 41 : 6 = 6 \\ \underline{36} \\ 5 \end{array}$$

Anschließend setzt man hinter die Zahl 6 ein Komma und rechnet weiter, indem man immer an den Rest (hier 5) eine 0 anhängt:

$$\begin{array}{l} 41 : 6 = 6{,}83 \\ \underline{36} \\ 50 \\ \underline{48} \\ \mathbf{2}0 \\ \underline{18} \\ \mathbf{2} \end{array}$$

Nun ist ein Rest aufgetreten, der vorher schon einmal da war, weshalb die Rechnung wie für die letzte Dezimalstelle weitergehen würde.
Also ist $\frac{41}{6} = 6{,}8333333\ldots = 6{,}8\overline{3}$.

4. Beispiel

Für den Bruch $\frac{43}{11}$ soll die Dezimaldarstellung gefunden werden.
Zunächst führt man die übliche schriftliche Division durch::

$$\begin{array}{l} 43 : 11 = 3 \\ \underline{33} \\ 10 \end{array}$$

Anschließend setzt man hinter die Zahl 3 ein Komma und rechnet weiter, indem man immer an den Rest (hier 10) eine 0 anhängt:

$$\begin{array}{l} 43 : 11 = 3{,}90 \\ \underline{33} \\ \mathbf{10}0 \\ \ \underline{99} \\ \ \ 10 \\ \ \ \underline{\ 0} \\ \ \ \mathbf{10} \end{array}$$

Nun ist ein Rest aufgetreten, der vorher schon einmal da war, weshalb die Rechnung wie für die letzten zwei Dezimalstellen weitergehen würde.
Also ist $\frac{43}{11} = 3{,}909090\ldots = 3,\overline{90}$.

Die Zahlen π und $\sqrt{3}$ sind irrational, ihre Darstellung als Dezimalzahl ist nicht periodisch.

$$\begin{aligned} \pi &= 3{,}1415926535897932\ldots \\ \sqrt{3} &= 1{,}7320508075688772\ldots \end{aligned}$$

Anzeigen

2.6 Runden von Dezimalzahlen

Mit nicht-abbrechenden nicht-periodischen Dezimalzahlen lässt sich nicht rechnen, weil man nicht alle Nachkommastellen aufschreiben kann. Auch in vielen praktischen Anwendungen der Mathematik, wie etwa beim Überschlagen der Einkaufssumme oder dem Vermessen von Objekten, ist es häufig unpraktisch oder auch unnötig mit langen Dezimalzahlen zu rechnen. Daher werden lange Dezimalzahlen oft auf eine bestimmte Anzahl von Nachkommastellen gerundet, oder bei großen Zahlen auch auf ganze Zehner, Hunderter oder gar Tausender.

Rundung

Zur Rundung einer reellen Zahl auf eine vorgegebene Anzahl von Nachkommastellen (kurz: Stellen) schneidet man die Dezimalzahl an der vorgegebenen Stelle ab und betrachtet die letzte Ziffer in der abgeschnittenen Dezimalzahl. Sie wird unverändert gelassen, wenn die darauf folgende Ziffer in der ursprünglichen Dezimalzahl eine 0, 1, 2, 3 oder 4 ist (man spricht von *Abrunden*). Ist diese jedoch eine 5, 6, 7, 8 oder 9, dann wird die letzte Ziffer in der abgeschnittenen Dezimalzahl um eins erhöht (man spricht von *Aufrunden*).

Das Symbol $\approx$ (sprich: „ungefähr gleich") zeigt an, dass eine Dezimalzahl gerundet ist.

Zum Beispiel ist $2{,}734367$ gerundet auf

- vier Stellen: $2{,}734367 \approx 2{,}7344$,
- drei Stellen: $2{,}734367 \approx 2{,}734$,
- zwei Stellen: $2{,}734367 \approx 2{,}73$,

und $\pi = 3{,}141592\ldots$ gerundet auf

- vier Stellen: $\pi = 3{,}141592\ldots \approx 3{,}1416$,
- drei Stellen: $\pi = 3{,}141592\ldots \approx 3{,}142$,
- zwei Stellen: $\pi = 3{,}141592\ldots \approx 3{,}14$.

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Welche der folgenden Zahlen sind rational, welche (vermutlich) irrational?

a) $0{,}12$

b) $0{,}12121212\ldots$

c) $0{,}121122111222111122222\ldots$

d) $0{,}2221212121212\ldots$

Antwort

a) Die Zahl ist rational.

b) Die Zahl ist rational.

c) Die Zahl ist irrational.

d) Die Zahl ist rational.

Lösung a)

Die Zahl $0{,}12$ lässt sich darstellen als

$$0{,}12 = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} = \frac{10+2}{100} = \frac{12}{100}\,.$$

Dies zeigt, dass $0{,}12$ rational ist.

Lösung b)

Die Zahl $0{,}12121212\ldots$ entspricht $0{,}\overline{12}$ und besitzt somit eine periodische Dezimaldarstellung. Folglich ist sie eine rationale Zahl.

Lösung c)

Die Zahl $0{,}121122111222111122222\ldots$, deren Nachkommastellen aus immer längeren Blöcken von Einsen und Zweien bestehen (zuerst je eine 1 und eine 2, dann zwei Ziffern 1 und zwei Ziffern 2 etc.), ist nicht rational, denn sonst müsste die Dezimaldarstellung entweder abbrechen oder periodisch werden, sich also schließlich wiederholen. Diese Zahl ist also irrational.

(Streng genommen lässt sich die Aussage, dass die Zahl unter c) irrational ist, nicht durch Betrachtung von „nur" endlich vielen Dezimalstellen entscheiden, denn die Dezimaldarstellung könnte auch noch nach der hundertsten Stelle hinter dem Komma abbrechen.)

Lösung d)

Die Zahl $0{,}2221212121212\ldots$ entspricht $0{,}222\overline{12}$. Somit ist sie ab der vierten Nachkommastelle periodisch und daher rational.

ÜBUNG 2

Schreiben Sie die folgenden Dezimalzahlen als Brüche:

a) $1{,}1$

b) $-3{,}2$

c) $-0{,}45$

d) $0{,}\overline{2}$

e) $0{,}2\overline{45}$

Antwort

a) $\frac{11}{10}$

b) $-\frac{32}{10}$

c) $-\frac{45}{100}$

d) $\frac{2}{9}$

e) $\frac{243}{990}$

Lösung a)

Nach der Definition der Dezimaldarstellung ist $1{,}1 = 1 + \frac{1}{10}$. Stellen wir 1 als $\frac{10}{10}$ dar, so erhalten wir eine Darstellung von $1{,}1$ durch nur einen Bruch:

$$1{,}1 = 1 + \frac{1}{10} = \frac{10}{10} + \frac{1}{10} = \frac{10+1}{10} = \frac{11}{10}\,.$$

Lösung b)

Nach Definition der Dezimaldarstellung ist $-3{,}2 = -(3 + \frac{2}{10})$, also gilt:

$$-3{,}2 = -\left(3 + \frac{2}{10}\right) = -\left(\frac{30}{10} + \frac{2}{10}\right) = -\frac{32}{10}\,.$$

Lösung c)

Erneut erhalten wir das Ergebnis direkt aus der Definition der Dezimalzahlen:

$$-0{,}45 = -\left(\frac{4}{10} + \frac{5}{100}\right) = -\frac{45}{100}\,.$$

Lösung d)

Es ist

$$10 \cdot 0{,}\overline{2} = 10 \cdot 0{,}222\ldots = 2{,}222\ldots = 2{,}\overline{2}$$

und daher

$$9 \cdot 0{,}\overline{2} = 10 \cdot 0{,}\overline{2} - 0{,}\overline{2} = 2{,}\overline{2} - 0{,}\overline{2} = 2.$$

Teilen wir auf beiden Seiten dieser Gleichung durch 9, so erhalten wir die Gleichung

$$0{,}\overline{2} = \frac{2}{9}$$

und damit das gewünschte Ergebnis.

Lösung e)

Es ist

$$1000 \cdot 0{,}2\overline{45} = 245{,}454545\ldots = 245{,}\overline{45}$$

sowie

$$10 \cdot 0{,}2\overline{45} = 10 \cdot 0{,}2454545\ldots = 2{,}454545\ldots = 2{,}\overline{45}\,,$$

also

$$990 \cdot 0{,}2\overline{45} = 1000 \cdot 0{,}2\overline{45} - 10 \cdot 0{,}2\overline{45} = 245{,}\overline{45} - 2{,}\overline{45} = 243\,.$$

Teilen wir auf beiden Seiten dieser Gleichung durch 990, so erhalten wir das Ergebnis:

$$0{,}2\overline{45} = \frac{243}{990}\,.$$

ÜBUNG 3

Ordnen Sie die folgenden Zahlen in aufsteigender Reihenfolge, indem Sie sie zunächst als Dezimalzahlen schreiben:

a) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{5}$

b) $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{9}$; $-\frac{35}{7}$; 0

c) $\frac{4}{3}$; $\frac{6}{4}$; $\frac{4}{5}$; $-\frac{7}{6}$

Anmerkung: Zum Vergleichen von rationalen Zahlen gibt es eigentlich eine bessere Methode, welche in Abschnitt I.1.5 (evtl. mit Erweitern) behandelt wird. Die Übung hier dient mehr dazu, Brüche in Dezimalzahlen umzurechnen und Dezimalzahlen zu vergleichen.

Antwort

a) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{5}$

b) $-\frac{35}{7}$; 0; $\frac{2}{9}$; $\frac{1}{4}$

c) $-\frac{7}{6}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{6}{4}$

Lösung a)

Zunächst sollen die Zahlen als Dezimalzahlen geschrieben werden:

$$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots\,, \quad \frac{1}{4} = 0{,}25\,, \quad \frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}\,, \quad \frac{7}{5} = 1{,}4\,.$$

Wegen

$$0{,}25 < 0{,}\overline{3} < 0{,}\overline{6} < 1{,}4$$

ist also

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1 < \frac{7}{5}\,.$$

Lösung b)

Es gilt $\frac{1}{4} = 0{,}25$ und $\frac{2}{9} = 0{,}\bar{2}$. Da $-\frac{35}{7} = -5$ eine negative Zahl ist gilt, außerdem $-\frac{35}{7} < 0$, also

$$-\frac{35}{7} < 0 < 0{,}\bar{2} < 0{,}25$$

und somit

$$-\frac{35}{7} < 0 < \frac{2}{9} < \frac{1}{4}\,.$$

Lösung c)

Wir schreiben die Zahlen erneut als Dezimalzahlen:

$$\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} = 1{,}\bar{3}\,, \quad \frac{6}{4} = 1 + \frac{2}{4} = 1{,}5\,, \quad \frac{4}{5} = 0{,}8\,.$$

Natürlich ist $-\frac{7}{6}$ negativ, also gilt $-\frac{7}{6} < 0$. Wegen $0 < 0{,}8$ folgt daraus insbesondere $-\frac{7}{6} < 0{,}8 = \frac{4}{5}$. Kombiniert mit der Ungleichungskette

$$0{,}8 < 1{,}\bar{3} < 1{,}5$$

ergibt sich

$$-\frac{7}{6} < \frac{4}{5} < \frac{4}{3} < \frac{6}{4}\,.$$

ÜBUNG 4

Berechnen Sie folgende Terme ohne die Verwendung eines Taschenrechners:

a) $19{,}23 + 352{,}4 + 4807{,}721$

b) $3{,}3 - 2{,}3 \cdot 0{,}11$

c) $4{,}41 : 2{,}1 + 6 : 0{,}3 + (-7) \cdot 0{,}3$

Runden Sie das Ergebnis anschließend zu einer ganzen Zahl.

Antwort

a) $5179{,}351 \approx 5179$

b) $3{,}047 \approx 3$

c) 20

Lösung a)

Das schriftliche Addieren von Dezimalzahlen funktioniert genauso wie das Addieren mit natürlichen Zahlen. Die Zahlen müssen natürlich stellenwertrichtig untereinander geschrieben werden, also Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Zehntel unter Zehntel usw., sowie Komma unter Komma. Letztlich müssen die stellenwertrichtig untereinander geschriebenen Zahlen addiert werden. Das Komma im Ergebnis wird genau unter die anderen Kommas gesetzt:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & & 1 & 9 & , & 2 & 3 & \\ & 3 & 5 & 2 & , & 4 & & \\ 4 & 8 & 0 & 7 & , & 7 & 2 & 1 \\ \hline 5 & 1 & 7 & 9 & , & 3 & 5 & 1 \end{array}$$

Das Endergebnis lautet $5179{,}351$. Um dieses Ergebnis zu einer ganzen Zahl zu runden, müssen wir die erste Nachkommastelle betrachten. In diesem Fall lautet das gerundete Ergebnis also 5179.

Lösung b)

Nach der Regel Punkt-Vor-Strich wird zuerst die Multiplikation berechnet, wobei die Regel für die Multiplikation von Dezimalzahlen angewendet wird: Kommas ganz nach rechts, also um 1 bzw. 2 Stellen, verschieben, die ganzen Zahlen multiplizieren, und im Ergebnis das Komma wieder um $1+2=3$ Stellen nach links verschieben.

Wegen $23 \cdot 11 = 253$ ist also $2{,}3 \cdot 0{,}11 = 0{,}253$.

Anschließend wird die Subtraktion wie in Teil a) durchgeführt:

$$\begin{array}{cccccc} & 3 & ,3 & 0 & 0 \\ - & 0 & ,2 & 5 & 3 \\ - & - & - & - & - & - \\ & 3 & ,0 & 4 & 7 \end{array}$$

Insgesamt erhält man also

$$3{,}3 - 2{,}3 \cdot 0{,}11 = 3{,}047 \approx 3.$$

Lösung c)

Wieder werden die Divisionen und die Multiplikationen vor den Additionen ausgewertet.

Für die Berechnung der Division werden in Dividend und Divisor die Kommas gleich weit nach rechts verschoben, sodass beide Kommas verschwinden. Dadurch ändert sich das Ergebnis nicht. Also $4{,}41 : 2{,}1 = 441 : 210$ und $6 : 0{,}3 = 60 : 3$.

Schriftliche Division von 441 durch 210 ergibt:

$$\begin{array}{l} 441 : 210 = 2{,}1 \\ \underline{420} \\ \ \mathbf{21}0 \\ \ \underline{210} \\ \quad 0 \end{array}$$

60 ist sogar durch 3 teilbar und ergibt $60 : 3 = 20$.

Für die Multiplikation $(-7) \cdot 0{,}3$ wird das Komma in $0{,}3$ um eine Stelle nach rechts verschoben, dann -7 mit $10 \cdot 0{,}3 = 3$ multipliziert und im Ergebnis ($(-7) \cdot 3 = -21$) das Komma wieder um eine Stelle nach links verschoben. Also ist $(-7) \cdot 0{,}3 = -2{,}1$.

Anschließend bleibt die Addition $2{,}1 + 20 + (-2{,}1)$ zu berechnen, und man erhält:

$$2{,}1 + 20 + (-2{,}1) = 22{,}1 - 2{,}1 = 20.$$

In diesem Fall ist das exakte Ergebnis bereits eine ganze Zahl. Wir brauchen also nicht mehr zu runden.

3. VORZEICHEN- UND KLAMMERREGELN, BINOMISCHE FORMELN

Inhalt

3.1 Grundlegende Regeln der Algebra
3.2 Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz
3.3 Erste und zweite binomische Formel
3.4 Dritte binomische Formel

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie beherrschen den Umgang mit Klammern.
- Sie können Terme ausmultiplizieren und ausklammern.
- Sie kennen Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz.
- Sie können Terme zielgerichtet umformen.
- Sie sind in der Lage, algebraische Ausdrücke mit Hilfe der binomischen Formeln zu faktorisieren.
- Sie können algebraische Ausdrücke mit Hilfe der binomischen Formeln ausmultiplizieren.

3.1 Grundlegende Regeln der Algebra

Die *Algebra* ist ein Teilgebiet der Mathematik. In Fokus stehen **Terme** und die Regeln, wie damit gerechnet wird. Terme sind Ausdrücke die Zahlen, Variablen, Klammern und verschiedene Rechenoperationen enthalten können. Die Regeln gelten also insbesondere auch für Zahlen.

Die wichtigsten Regeln, die man zur Berechnung von Ausdrücken wie $2 \cdot 4 + 5 \cdot (3 + 2)$ benötigt, wurden schon in Abschnitt I.1 erklärt:

- Klammern zuerst (von innen nach außen),
- Punkt vor Strich,
- von links nach rechts.

Diese Regeln gelten genauso, wenn die Ausdrücke nicht nur Zahlen, sondern auch Variablen enthalten.
In Vorgriff auf Abschnitt I.5 Rechenregeln für Potenzen führen wir die folgenden abkürzenden Schreibweisen (sog. *Potenzen*) ein:

Ist a eine beliebige reelle Zahl oder eine Variable und n eine natürliche Zahl, so wird a^n definiert durch das n-fache Produkt von a mit sich selbst, also

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}.$$

Insbesondere ist

$$a^1 = a\,.$$

In einem Term, in dem auch Potenzen vorkommen, gilt dann die zusätzliche Regel, dass Potenzen noch vor Multiplikation und Division auszuführen sind, jedoch nach Klammern.

richtig	**falsch**
$2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$	$2 \cdot 3^2 = 6^2 = 36$
$3 + 2^3 = 3 + 8 = 11$	$3 + 2^3 = 5^3 = 125$
$(1+3)^2 = 4^2 = 16$	$(1+3)^2 = 1 + 9 = 10$

Bei Potenzen wird die höchstgestellte Potenz zuerst berechnet, es ist also $4^{3^2} = 4^{(3^2)}$ (und nicht $(4^3)^2$).

3.2 Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz

Insbesondere bei Termen, in denen Variablen vorkommen, ist es wichtig, dass man Regeln hat, mit denen man die Terme, ohne etwas „rechnen" zu müssen, so umformen kann, dass man einfachere oder übersichtlichere Terme bekommt. Die Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze für die Addition und Multiplikation sind solche Regeln.

Eine Rechenoperation $*$ auf einer Menge M heißt *kommutativ*, wenn für alle a und b aus M gilt:

$$a * b = b * a.$$

Die Addition und die Multiplikation reeller Zahlen sind kommutativ, d.h. für alle reellen Zahlen a und b gelten

$$a + b = b + a \quad \text{und} \quad a \cdot b = b \cdot a.$$

- $2{,}1 + 12 = 14{,}1$ und $12 + 2{,}1 = 14{,}1$,
- $(-3) \cdot 4 = -12$ und $4 \cdot (-3) = -12$.

Subtraktion und Division dagegen sind nicht kommutativ, denn

$$2 - 3 = -1 \neq 1 = 3 - 2$$

und

$$2 : 10 = \frac{2}{10} = 0{,}2 \neq 5 = \frac{10}{2} = 10 : 2.$$

Eine Rechenoperation $*$ auf einer Menge M heißt *assoziativ*, wenn für alle a, b und c aus M gilt:

$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$

Die Addition und Multiplikation reeller Zahlen sind assoziativ, d.h. für alle reellen Zahlen a, b und c gelten

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{und} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Multipliziert oder addiert man also mehrere Zahlen hintereinander, so spielt es keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Operation ausgeführt wird; bei Division oder Subtraktion schon. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} 2 \cdot 4 \cdot (-5) = -40 \quad &= 2 \cdot (4 \cdot (-5)) \\ &= (2 \cdot 4) \cdot (-5) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 3 + 4 + 5 = 12 \quad &= (3 + 4) + 5 \\ &= 3 + (4 + 5)\,, \end{aligned}$$

aber

$$(24 : 4) : 2 = 6 : 2 = 3 \neq 12 = 24 : 2 = 24 : (4 : 2)$$

und

$$(2 - 4) - 6 = -2 - 6 = -8 \neq 4 = 2 - (-2) = 2 - (4 - 6).$$

- Aufgrund des Assoziativ- und des Kommutativgesetzes für die Addition darf man in Summen mit mehreren Summanden alle Klammern weglassen, die Summanden beliebig vertauschen und die Summation in beliebiger Reihenfolge ausführen, z.B. gilt $2+2\cdot x+1+x=2+1+2\cdot x+x=(2+1)+(2\cdot x+x)=3+3x$.
- Wegen $a-b=a+(-b)$ ist das beliebige Vertauschen auch in Differenzen erlaubt, solange man die Vorzeichen immer „mitnimmt", z.B. gilt $2+2x-3-x=2-3+2x-x=(2-3)+(2x-x)=-1+x$.
- Aufgrund des Assoziativ- und des Kommutativgesetzes für die Multiplikation darf man in Produkten mit mehreren Faktoren die Klammern weglassen, die Faktoren beliebig vertauschen und die Mulitplikation in beliebiger Reihenfolge ausführen, z.B. gilt $(2\cdot x)\cdot((-3)\cdot x)=2\cdot x\cdot(-3)\cdot x=2\cdot(-3)\cdot x\cdot x=-6x^2$.

Treten Addition und Multiplikation zusammen auf, kann das *Distributivgesetz* hilfreich sein.

Für drei beliebige reelle Zahlen a, b und c ist

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$$

und

$$(b+c)\cdot a=(b\cdot a)+(c\cdot a).$$

Zum Beispiel ist

$$3\cdot(5+2)=3\cdot 7=21$$

oder unter Anwendung des Distributivgesetzes

$$3\cdot(5+2)=(3\cdot 5)+(3\cdot 2)=15+6=21.$$

1. Wegen der Regel „Punktrechnung geht vor Strichrechnung" können die Klammern in der obigen Rechnung bei $(3 \cdot 5) + (3 \cdot 2)$ entfallen.

2. Der Übergang von der linken Seite zur rechten Seite im obigen Beispiel wird oft *Ausmultiplizieren* genannt, der Übergang von der rechten zur linken Seite *Ausklammern*.

3. Da $b - c = b + (-c)$ ist, und $a \cdot (-c) = -a \cdot c$ gilt das Distributivgesetz auch für Multiplikation und Subtraktion, d.h. für drei beliebige reellen Zahlen a, b und c gelten

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

und

$$(b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a.$$

4. Durch sukzessive Anwendung des Distributivgesetzes erhält man das Gesetz auch für mehr als zwei Summanden. Zum Beispiel gilt für alle reellen Zahlen a, b, c und d:

$$a \cdot (b - c + d) = a \cdot b - a \cdot c + a \cdot d.$$

Für beliebige reelle Zahlen a, b gilt:

- $4 \cdot (a - 2b) = 4a - 4 \cdot (2b) = 4a - 8b,$
- $(3 + 2b) \cdot 5 = 5 \cdot (3 + 2b) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 2b = 15 + 10b.$
- $(2 + a) \cdot (a + 1) = 2 \cdot (a + 1) + a \cdot (a + 1) = 2a + 2 + a \cdot a + a = a^2 + 3a + 2.$

Anmerkung: Wie in den obigen Ausdrücken wird der Malpunkt zwischen Zahlen und Variablen und auch zwischen mehreren Buchstaben oft weggelassen, d.h. statt $2 \cdot b$ schreibt man auch $2b$.

Das Distributivgesetz erklärt auch, wie ein Minuszeichen vor der Klammer interpretiert werden muss.

Steht ein Minuszeichen vor einer Klammer, so müssen die Vorzeichen *aller* Summanden in der Klammer umgedreht werden.

Erklärung

Es ist stets $-x = (-1) \cdot x$ und daher gilt für alle reellen Zahlen a und b

$$-(a + b) = (-1) \cdot (a + b) = (-1) \cdot a + (-1) \cdot b = (-a) + (-b) = -a - b.$$

Zum Beispiel ist also

$$6-(3a+4) \quad = 6-3a-4 = 6-4-3a = 2-3a$$

oder auch

$$5-(y^2+y-4) \quad = 5-y^2-y+4 = 9-y^2-y\,.$$

> Für beliebige reelle Zahlen x, y gilt:
>
> - $-(x+2)+x = -x-2+x = -2$,
> - $3\cdot(x-(2+y))+4y = 3\cdot(x-2-y)+4y = 3x-6-3y+4y = 3x+y-6$.

Manchmal möchte man lange, unübersichtliche Terme zu kürzeren, kompakteren Termen zusammenfassen. Dazu kann man das Distributivgesetz auch umgekehrt zum Ausklammern anwenden. Zum Beispiel ist

$$3b+9ab = 3b\cdot 1+3b\cdot 3a = 3b\cdot(1+3a)$$

und

$$\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}y+\frac{3}{8}z = \frac{1}{8}\cdot 2x-\frac{1}{8}\cdot 4y+\frac{1}{8}\cdot 3z = \frac{1}{8}\cdot\Big(2x-4y+3z\Big).$$

> Für beliebige reelle Zahlen x, y, z gilt:
>
> 1. $xy+y^2 = x\cdot y+y\cdot y = (x+y)\cdot y$,
> 2. $4x^2y-3xyz+y^2x = xy\cdot 4x-xy\cdot 3z+xy\cdot y = xy\cdot(4x-3z+y)$,
> 3. $-3x^2+6x-18 = -3\cdot x^2+(-3)\cdot(-2x)+(-3)\cdot 6 = -3(x^2-2x+6)$,
> 4. $2x^3-4x^2-8x = 2x\cdot x^2-2x\cdot(2x)-2x\cdot 4 = 2x(x^2-2x-4)$.

3.3 Erste und zweite binomische Formel

Mit Hilfe des Distributivgesetzes lassen sich die sogenannten *binomischen Formeln* herleiten.

Für alle reellen Zahlen a und b gelten

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \qquad \text{und} \qquad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2.$$

Herleitung

Betrachtet man den Ausdruck

$$(a+b)(c+d)$$

und fasst $(a+b)$ als einen Faktor auf, der mit der Klammer $(c+d)$ multipliziert wird, erhält man

$$(a+b)(c+d) = (a+b)c + (a+b)d.$$

Eine erneute Anwendung des Distributivgesetzes und Multiplikation von c und d mit ihren jeweiligen Klammern führt dann auf

$$(a+b)(c+d) = (a+b)c + (a+b)d = ac + bc + ad + bd.$$

Für $c = a$ und $d = b$ folgen aus dieser Gleichung nun zwei wichtige Spezialfälle dieser Regel, nämlich

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ba + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

und nach Ersetzung von b durch $-b$ weiter

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 + (-b)a + a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Zum Beispiel ist also

$$(x+2)^2 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 = x^2 + 4x + 4$$

und

$$(x-2)^2 = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 = x^2 - 4x + 4.$$

1. $32^2 = (30+2)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 2 + 2^2 = 900 + 120 + 4 = 1024$,
2. $39^2 = (40-1)^2 = 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot 1 + 1^2 = 1600 - 80 + 1 = 1521$,
3. $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$,
4. $$\begin{aligned}(x+1)^2 - (x-1)^2 &= (x^2+2x+1) - (x^2-2x+1) \\ &= x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 \\ &= 2x + 2x = 4x,\end{aligned}$$
5. $$\begin{aligned}(x+y+4)^2 &= ((x+y)+4)^2 \\ &= (x+y)^2 + 2 \cdot (x+y) \cdot 4 + 4^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + 8(x+y) + 16 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + 8x + 8y + 16.\end{aligned}$$

Die binomischen Formeln können auch rückwärts verwendet werden, um eine Summe in ein Produkt umzuwandeln. Weil die Bestandteile eines Produktes Faktoren heißen, sagt man dazu auch *„einen Ausdruck faktorisieren"*.

1. $4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = (2x+1)^2$,
2. $x^6 - 4x^3 + 4 = (x^3)^2 - 2 \cdot x^3 \cdot 2 + 2^2 = (x^3 - 2)^2$,
3. $4x^4 - 12x^2 + 15 = 4x^4 - 12x^2 + 9 + 6 = (2x^2)^2 - 2 \cdot (2x^2) \cdot 3 + 3^2 + 6 = (2x^2 - 3)^2 + 6$.

3.4 Dritte binomische Formel

Auch die *dritte binomische Formel* kann mit Hilfe des Distributivgesetzes leicht hergeleitet werden.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Herleitung

Aus der oben abgeleiteten Formel

$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$$

erhält man mit $c=a$ und $d=-b$ den Spezialfall:

$$(a+b)(a-b)=a\cdot a+b\cdot a+a\cdot(-b)+b\cdot(-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2.$$

Es ist also

$$(3x-4)(3x+4)=(3x)^2-4^2=9x^2-16$$

oder

$$(5+y)(5-y)=5^2-y^2=25-y^2.$$

1. $32\cdot 28=(30+2)\cdot(30-2)=30^2-2^2=900-4=896,$
2. $(2x+4)(2x-4)=(2x)^2-4^2=4x^2-16,$
3. $(a-b+c)(a+b-c)=(a-(b-c))(a+(b-c))$

$$=a^2-(b-c)^2=a^2-(b^2-2bc+c^2)=a^2-b^2+2bc-c^2.$$

Auch die dritte binomische Formel wird oft dazu benutzt, um Terme zu faktorisieren. Dies wird insbesondere beim Kürzen von Brüchen wichtig.

1. $26^2-4^2=(26+4)\cdot(26-4)=30\cdot 22=660,$
2. $1-(x+2)^2=1^2-(x+2)^2=\big(1+(x+2)\big)\big(1-(x+2)\big)=(x+3)(-x-1)=-(x+3)(x+1),$
3. $(x+1)^2-(x-1)^2=\big((x+1)+(x-1)\big)\big((x+1)-(x-1)\big)=2x\cdot 2=4x,$
4. $\dfrac{9}{25}-\left(x-\dfrac{1}{5}\right)^2=\left(\dfrac{3}{5}\right)^2-\left(x-\dfrac{1}{5}\right)^2$

$$=\left(\tfrac{3}{5}+\left(x-\tfrac{1}{5}\right)\right)\cdot\left(\tfrac{3}{5}-\left(x-\tfrac{1}{5}\right)\right)=\left(\tfrac{2}{5}+x\right)\cdot\left(\tfrac{4}{5}-x\right).$$

[video-online-only]

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich:

a) $x \cdot 4 + 3 + 2 \cdot x \cdot 3 - 1$

b) $2 \cdot x - x \cdot 3 \cdot x + 2 \cdot x^2 - 1$

Antwort

a) $10x + 2$

b) $-x^2 + 2x - 1$

Lösung a)

Mit Hilfe des Kommutativgesetzes werden zunächst in allen Produkten die Faktoren so vertauscht, dass die Faktoren x ganz rechts stehen:

$$x \cdot 4 + 3 + 2 \cdot x \cdot 3 - 1 = 4 \cdot x + 3 + 2 \cdot 3 \cdot x - 1 = 4x + 3 + 6x - 1\,.$$

Anschließend werden die Summanden nach Potenzen von x sortiert und gleiche Potenzen addiert:

$$4x + 3 + 6x - 1 = 4x + 6x + 3 - 1 = 10x + 2\,.$$

Lösung b)

Wieder werden die Faktoren in allen Produkten so vertauscht, dass die Faktoren x ganz rechts stehen:

$$2 \cdot x - x \cdot 3 \cdot x + 2 \cdot x^2 - 1 = 2 \cdot x - 3 \cdot x \cdot x + 2 \cdot x^2 - 1 = 2x - 3x^2 + 2x^2 - 1\,.$$

Anschließend werden die Summanden nach Potenzen von x sortiert und gleiche Potenzen addiert:

$$2x - 3x^2 + 2x^2 - 1 = -3x^2 + 2x^2 + 2x - 1 = -x^2 + 2x - 1\,.$$

ÜBUNG 2

Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich:

a) $2x(1-x)-(2-x)$

b) $(x-1)(2-x)-(3x+x^2)+x\cdot 3$

c) $(5+x)(5-x)+(3-x)^2$

d) $(x+y)^2-(x-1)^2-(y-1)^2$

Antwort

a) $-2x^2+3x-2$

b) $-2x^2+3x-2$

c) $-6x+34$

d) $2(xy+x+y-1)=2xy+2x+2y-2$ (Welcher der beiden Ausdrücke nun einfacher ist, ist Ansichtssache.)

Lösung a)

Zunächst werden alle Terme mit dem Distributivgesetz ausmultipliziert:

$$2x(1-x)-(2-x)=2x\cdot 1-2x\cdot x-2-(-x)=2x-2x^2-2+x.$$

Dann werden die Summanden nach x-Potenzen sortiert und zusammengefasst:

$$2x-2x^2-2+x=-2x^2+2x+x-2=-2x^2+3x-2.$$

Lösung b)

Zunächst werden alle Terme mit dem Distributivgesetz ausmultipliziert:

$$\begin{aligned}(x-1)(2-x)-(3x+x^2)+x\cdot 3 &= x\cdot(2-x)-1\cdot(2-x)-3x-x^2+3x\\ &= x\cdot 2-x\cdot x-2-(-x)-3x-x^2+3x\\ &= 2x-x^2-2+x-3x-x^2+3x.\end{aligned}$$

Dann werden die Summanden nach x-Potenzen sortiert und zusammengefasst:

$$2x-x^2-2+x-3x-x^2+3x=-x^2-x^2+2x+x-3x+3x-2=-2x^2+3x-2.$$

Lösung c)

Unter Verwendung der zweiten und dritten binomischen Formel vereinfacht sich der Term zu:

$$\begin{aligned}(5+x)(5-x)+(3-x)^2 &= 5^2-x^2+3^2-2\cdot 3\cdot x+x^2\\ &= 25-x^2+9-6x+x^2=-6x+34\end{aligned}$$

Lösung d)

Unter Verwendung der ersten und zweiten binomischen Formel vereinfacht sich der Term zu:

$$\begin{aligned}(x+y)^2-(x-1)^2-(y-1)^2 &= x^2+2xy+y^2-(x^2-2x+1)-(y^2-2y+1)\\ &= x^2+2xy+y^2-x^2+2x-1-y^2+2y-1\\ &= x^2-x^2+2xy+2x+y^2-y^2+2y-1-1\\ &= 2xy+2x+2y-2=2(xy+x+y-1)\end{aligned}$$

ÜBUNG 3

Berechnen Sie folgende Terme mit Hilfe der binomischen Formeln ohne die Verwendung eines Taschenrechners:

a) 103^2

b) 98^2

c) $104 \cdot 96$

d) $107 \cdot 95$

Antwort

a) $10\,609$

b) $9\,604$

a) $9\,984$

b) $10\,165$

Lösung a)

Wegen $103 = 100 + 3$ verwendet man am besten die erste binomische Formel, um einfacher rechnen zu können:

$$103^2 = (100 + 3)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 3 + 3^2 = 10\,000 + 600 + 9 = 10\,609.$$

Lösung b)

Auch hier könnte man $98 = 90 + 8$ schreiben und die erste binomische Formel verwenden. Deutlich einfacher zu rechnen ist es aber, wenn man 98 als $98 = 100 - 2$ schreibt, und die zweite binomische Formel verwendet:

$$98^2 = (100 - 2)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 2 + 2^2 = 10\,000 - 400 + 4 = 9\,604\,.$$

Lösung c)

Mithilfe der dritten binomischen Formel kann man Produkte auf die Berechnung von Quadraten zurückführen. In diesem Fall ist

$$104 \cdot 96 = (100+4)(100-4) = 100^2 - 4^2 = 10\,000 - 16 = 9\,984\,.$$

Die Berechnung des Produkts lässt sich so deutlich vereinfachen.

Lösung d)

Auch hier lässt sich zur Berechnung des Produkts die dritte binomische Formel anwenden:

$$107 \cdot 95 = (101+6)(101-6) = 101^2 - 6^2\,.$$

Die Quadratzahl 101^2 kann nun mithilfe der ersten binomischen Formel berechnet werden:

$$101^2 = (100+1)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10\,000 + 200 + 1 = 10\,201\,.$$

Das gesuchte Ergebnis ist also

$$107 \cdot 95 = (101+6)(101-6) = 101^2 - 6^2 = 10\,201 - 36 = 10\,165\,.$$

ÜBUNG 4

Faktorisieren Sie die folgenden Ausdrücke, indem Sie die binomischen Formeln "rückwärts" anwenden:

a) $4x^2 + 12x + 9$

b) $9x^2 - 12xy + 4y^2$

c) $25x^2 - z^2$

Antwort

a) $(2x + 3)^2$

b) $(3x - 2y)^2$

c) $(5x - z)(5x + z)$

Lösung a)

Die erste binomische Formel lautet

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a + b)^2 .$$

Wenden wir diese mit $a = 2x$ und $b = 3$ an, so erhalten wir

$$4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = (2x + 3)^2 .$$

Lösung b)

Wir verwenden die zweite binomische Formel,

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a - b)^2 ,$$

mit $a = 3x$ und $b = 2y$ und erhalten

$$9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = (3x - 2y)^2 .$$

Lösung c)

In diesem Fall lässt sich die dritte binomische Formel anwenden:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)\,.$$

Mit $a = 5x$ und $b = z$ ergibt sich

$$25x^2 - z^2 = (5x)^2 - z^2 = (5x + z)(5x - z)\,.$$

4. BRUCHRECHNUNG

Inhalt

- 4.1 Erweitern und Kürzen von Brüchen
- 4.2 Addition und Subtraktion von Brüchen
- 4.3 Multiplikation und Division von Brüchen

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie beherrschen das Erweitern und Kürzen von Brüchen.
- Sie beherrschen das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren von Brüchen.

4.1 Erweitern und Kürzen von Brüchen

Die Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$$

haben Sie bereits im Abschnitt über die Zahlenmengen kennengelernt. Sie besteht aus allen Brüchen der Form $\frac{p}{q}$, wobei p eine beliebige und q eine von Null verschiedene ganze Zahl sein darf. Man nennt p den **Zähler** und q den **Nenner** des Bruches.

Da ein Bruch das Ergebnis einer Division ist, kann man ein und dieselbe rationale Zahl auf verschiedene Arten schreiben; zum Beispiel ist

$$\frac{8}{14} = \frac{4}{7} = \frac{12}{21}.$$

Dabei wurde zunächst mit 2 *„gekürzt"* und anschließend mit 3 *„erweitert"*, d.h.

$$\frac{8}{14} = \frac{4 \cdot \cancel{2}}{7 \cdot \cancel{2}} = \frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{12}{21}.$$

Im Allgemeinen können **Zähler und Nenner von Brüchen** nicht nur ganze Zahlen sondern beliebige reelle

Zahlen oder Terme mit Variablen enthalten.

Beim Erweitern und Kürzen von Brüchen bleibt ihr Wert unverändert.
Brüche werden *erweitert*, indem Zähler und Nenner mit derselben, von Null verschiedenen reellen Zahl multipliziert werden.
Brüche werden *gekürzt*, indem Zähler und Nenner durch dieselbe, von Null verschiedene Zahl dividiert werden.

1. $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{15}{35}$,
2. $\frac{3}{11} = \frac{3 \cdot (-4)}{11 \cdot (-4)} = \frac{-12}{-44}$,
3. $-\frac{42}{12} = -\frac{7 \cdot \cancel{6}}{2 \cdot \cancel{6}} = -\frac{7}{2}$,
4. $\frac{99}{72} = \frac{11 \cdot \cancel{9}}{8 \cdot \cancel{9}} = \frac{11}{8}$,
5. $\frac{4\pi^2}{3\pi} = \frac{4\pi \cdot \cancel{\pi}}{3 \cdot \cancel{\pi}} = \frac{4\pi}{3}$,
6. $\frac{24y - 72x^2}{28} = \frac{(6y - 18x^2) \cdot \cancel{4}}{7 \cdot \cancel{4}} = \frac{6y - 18x^2}{7} = \frac{6(y - 3x^2)}{7}$.

Beim Erweitern und Kürzen ist es wichtig, dass Zähler und Nenner mit **derselben** Zahl multipliziert bzw. durch **dieselbe** Zahl dividiert werden.
Beim **Kürzen rationaler Zahlen** (Zähler und Nenner des Bruches ganzzahlig) wird i.A. nur durch ganze Zahlen (gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner) gekürzt.

Gekürzt werden kann auch ein Bruch, der im Zähler und Nenner denselben Term als Faktor enthält:

$$\frac{(x-3)(1+x)}{2(x-3)} = \frac{\cancel{(x-3)} \cdot (1+x)}{2 \cdot \cancel{(x-3)}} = \frac{1+x}{2}$$

Beachten Sie dabei:

Wenn in einem Bruch durch Terme gekürzt wird, dann gelten die Gleichungen nur für diejenigen Werte der Variablen, für die alle Ausdrücke auf beiden Seiten der Gleichung definiert sind (insbesondere alle Nenner ungleich Null sind).
Entsprechendes gilt beim Erweitern.

Die obige Gleichung gilt also nur für $x \neq 3$. Wir verabreden, dass in allen weiteren Beispielen die Gleichheit von Brüchen mit Termen im Sinne dieser Regel verstanden wird.

1. $$\frac{4ab-7a}{a^2+ab} = \frac{(4b-7)a}{(a+b)a} = \frac{(4b-7)\cancel{a}}{(a+b)\cancel{a}} = \frac{4b-7}{a+b},$$
2. $$\frac{x^2-4}{3x+6} = \frac{(x-2)(x+2)}{3(x+2)} = \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{3\cancel{(x+2)}} = \frac{x-2}{3},$$
3. $$\frac{2-\frac{4}{x}}{3} = \frac{\left(2-\frac{4}{x}\right)\cdot x}{3\cdot x} = \frac{2x-4}{3x}.$$

Natürlich kann man einen Bruch auch *schrittweise* kürzen bzw. erweitern.

$$\frac{36x}{24x} = \frac{\cancel{3}\cdot 12x}{\cancel{3}\cdot 8x} = \frac{12x}{8x} = \frac{12\cdot\cancel{x}}{8\cdot\cancel{x}} = \frac{12}{8} = \frac{3\cdot\cancel{4}}{2\cdot\cancel{4}} = \frac{3}{2}$$

führt auf dasselbe Ergebnis wie

$$\frac{36x}{24x} = \frac{3\cdot\cancel{12x}}{2\cdot\cancel{12x}} = \frac{3}{2},$$

und

$$\frac{5}{7} = \frac{5\cdot 6}{7\cdot 6} = \frac{30}{42} = \frac{30\cdot 5}{42\cdot 5} = \frac{150}{210}$$

auf dasselbe Ergebnis wie

$$\frac{5}{7} = \frac{5\cdot 30}{7\cdot 30} = \frac{150}{210}.$$

Wenn man einen Bruch $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ kürzen möchte, reicht es aus, bei der Suche nach gemeinsamen Teilern des Zählers und des Nenners *Primzahlen* zu betrachten. Primzahlen sind solche natürlichen Zahlen größer als 1,

die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind. Die kleinsten Primzahlen sind:
$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ \ldots$

Bei Brüchen mit sehr grossen Zählern und Nennern wie z.B. $\frac{255}{119}$ oder $\frac{1023}{217}$, ist das Suchen nach gemeinsamen Teilern mühsam, selbst wenn man nur nach Primzahlen sucht.
In diesen Fällen hilft ein Algorithmus, mit dem man, ohne zu suchen, einen gemeinsamen Teiler findet, und nicht nur irgendeinen, sondern sogar den größten gemeinsamen Teiler (kurz den ggT). Dieser Algorithmus heißt *Euklidischer Algorithmus* und wird hier der Vollständigkeit halber angeführt. Für den weiteren Kurs wird er jedoch nicht benötigt.

Anzeigen

Dieselbe rationale Zahl ist in der Form $\frac{2}{3}$ leichter zu erfassen als in der Form $\frac{24}{36}$. Deshalb ist es in der Regel zweckmässig Brüche *vollständig zu kürzen*. Ein Ausdruck oder eine ganze Rechnung wird dadurch fast immer übersichtlicher.

Ein Bruch mit ganzzahligem Zähler und Nenner heißt *vollständig gekürzt*, wenn Zähler und Nenner durch keine ganze Zahl (außer durch 1 und -1) gekürzt werden können.

Außerdem ist es üblich, bei positiven Brüchen Zähler und Nenner positiv zu wählen, bei negativen Brüchen das negative Vorzeichen vor den Bruch oder in den Zähler zu schreiben. Dazu muss unter Umständen der Bruch mit -1 erweitert werden.

Bruch	vollständig gekürzter Bruch
$\frac{9}{12}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{2}{-6}$	$-\frac{1}{3} = \frac{-1}{3}$
$\frac{-84}{-144}$	$\frac{7}{12}$

4.2 Addition und Subtraktion von Brüchen

In diesem und dem nächsten Abschnitt erklären wir die Grundrechenarten für Brüche.

Zwei Brüche können leicht addiert oder subtrahiert werden, wenn sie den gleichen Nenner haben. Dann ist der Zähler die Summe bzw. die Differenz der Zähler, und der Nenner ist der gemeinsame Nenner der beiden Brüche.

Besitzen die Brüche nicht den gleichen Nenner, dann müssen zunächst die beide Brüche so erweitert werden, dass sie denselben Nenner haben. Die einfachste Möglichkeit, dies zu erreichen, ist es, die beiden Brüche „übers Kreuz ” mit dem Nenner des jeweils anderen Bruches zu erweitern.

Will man also die Summe der beiden Brüche $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$ ermitteln, so kann man zunächst den ersten Bruch mit q_2, den zweiten mit q_1 erweitern und dann die neuen Zähler addieren:

$$\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_1q_2}{q_1q_2}+\frac{p_2q_1}{q_1q_2}=\frac{p_1q_2+p_2q_1}{q_1q_2}.$$

Analog erhält man bei der Subtraktion:

$$\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_1q_2}{q_1q_2}-\frac{p_2q_1}{q_1q_2}=\frac{p_1q_2-p_2q_1}{q_1q_2}.$$

[video-online-only]

Mit diesen Regeln berechnet man zum Beispiel

1. $$\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 4}{5\cdot 4}+\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{8+15}{20}=\frac{23}{20},$$
2. $$\frac{14}{9}-\frac{-7}{5}=\frac{14\cdot 5}{9\cdot 5}-\frac{-7\cdot 9}{5\cdot 9}=\frac{70-(-63)}{45}=\frac{70+63}{45}=\frac{133}{45},$$
3. $$\frac{5}{8}+\frac{2}{3}-\frac{4}{5}=\frac{5\cdot 3\cdot 5}{8\cdot 3\cdot 5}+\frac{2\cdot 8\cdot 5}{3\cdot 8\cdot 5}-\frac{4\cdot 8\cdot 3}{5\cdot 8\cdot 3}=\frac{75+80-96}{120}=\frac{59}{120},$$
4. $$\frac{2a+3b+4}{5+b}-\frac{3}{7}=\frac{(2a+3b+4)\cdot 7}{(5+b)\cdot 7}-\frac{3\cdot(5+b)}{7\cdot(5+b)}$$
$$=\frac{14a+21b+28-15-3b}{35+7b}=\frac{14a+18b+13}{35+7b},$$
5. $$\frac{x-2y}{x+2y}-\frac{x+2y}{x-2y}=\frac{(x-2y)^2}{(x+2y)(x-2y)}-\frac{(x+2y)^2}{(x-2y)(x+2y)}$$
$$=\frac{(x-2y)^2-(x+2y)^2}{x^2-4y^2}=-\frac{8xy}{x^2-4y^2}.$$

Oft führt die obige Methode, die beiden Brüche „übers Kreuz " zu erweitern, zu unnötig grossen Zahlen. Bei der Addition $\frac{1}{16}+\frac{3}{8}$ zum Beispiel, erhielte man

$$\frac{1}{16}+\frac{3}{8}=\frac{8}{16\cdot 8}+\frac{16\cdot 3}{16\cdot 8}=\frac{56}{128},$$

was wiederum mit der Zahl 8 gekürzt werden kann

$$\frac{56}{128}=\frac{7\cdot 8}{16\cdot 8}=\frac{7}{16}.$$

Schneller und einfacher wäre in diesem Fall gewesen, als gemeinsamen Nenner gleich die Zahl 16 zu wählen:

$$\frac{1}{16}+\frac{3}{8}=\frac{1}{16}+\frac{3\cdot 2}{8\cdot 2}=\frac{1}{16}+\frac{6}{16}=\frac{7}{16}.$$

Hinter dieser vereinfachten Rechnung steckt Folgendes: Immer wenn die beiden Nenner einen gemeinsamen Teiler ungleich 1 haben, gibt es auch ein gemeinsames Vielfaches der beiden Nenner, welches kleiner als ihr Produkt ist. Dies soll am Beispiel $\frac{5}{12}-\frac{3}{8}$ illustriert werden: Die Nenner sind $12=4\cdot 3$ und $8=4\cdot 2$. Um ein gemeinsames Vielfaches zu erhalten, reicht es daher, die 12 mit 2 und die 8 mit 3 zu multiplizieren. Also:

$$\frac{5}{12}-\frac{3}{8}=\frac{5\cdot 2}{12\cdot 2}-\frac{3\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{10}{24}-\frac{9}{24}=\frac{1}{24}.$$

1. $\frac{5}{6}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}+\frac{4}{6}=\frac{5+4}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}.$

2. $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{4}{8}-\frac{2}{8}-\frac{1}{8}=\frac{4-2-1}{8}=\frac{1}{8}.$

3. $\frac{2-y}{xy}+\frac{x-1}{x^2}=\frac{(2-y)\cdot x}{x^2y}+\frac{(x-1)\cdot y}{x^2y}=\frac{2x-yx+xy-y}{x^2y}=\frac{2x-y}{x^2y}.$

Brüche bei denen der Zähler größer als der Nenner ist können wir auch als *„gemischte Brüche"* schreiben. So ist

$$\frac{23}{9}=\frac{18+5}{9}=\frac{18}{9}+\frac{5}{9}=2+\frac{5}{9},$$

die Zahl $\frac{23}{9}$ also zwei Ganze und $\frac{5}{9}$. Dafür schreibt man auch abkürzend:

$$\frac{23}{9}=2+\frac{5}{9}=2\frac{5}{9}.$$

Wegen der Verwechslungsgefahr mit dem Produkt $2\cdot\frac{5}{9}$ ist diese früher verbreitete Schreibweise nur mit großer Vorsicht zu benutzen oder besser zu vermeiden.

4.3 Multiplikation und Division von Brüchen

Die Multiplikation und die Division von Brüchen ist einfacher als die Addition und Subtraktion. Der Zähler des Produktes von zwei Brüchen ist das Produkt der beiden Zähler. Der Nenner ist das Produkt der beiden Nenner.
Somit ist das Produkt der beiden Brüche $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$:

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2}.$$

1. $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$
2. $\frac{25}{36} \cdot \left(-\frac{81}{35}\right) = -\frac{25 \cdot 81}{36 \cdot 35} = -\frac{5 \cdot \cancel{5} \cdot 9 \cdot \cancel{9}}{4 \cdot \cancel{9} \cdot 7 \cdot \cancel{5}} = -\frac{45}{28},$
3. $-\frac{a}{b} \cdot \frac{3b-a}{3b+a} \cdot \left(-\frac{4b}{7}\right) = \frac{a \cdot (3b-a) \cdot 4\cancel{b}}{7 \cdot \cancel{b} \cdot (3b+a)} = \frac{12ab - 4a^2}{21b + 7a}.$

Wie bei 2. im obigen Beispiel 4.12, sollte man beim Multiplizieren von Brüchen zunächst prüfen, ob gekürzt werden kann, bevor man die Multiplikationen im Zähler und im Nenner ausführt; dadurch wird die Rechnung deutlich übersichtlicher und einfacher.

Um die Divisionsvorschrift für Brüche formulieren zu können, benötigen wir aber den Begriff des *„Kehrwerts"* (manche sagen auch *„Kehrbruch"*).

Der Kehrwert des Bruches $\frac{p}{q}$ ist der Bruch $\frac{q}{p}$, wobei natürlich p und q nicht Null sein dürfen.

Man erhält also den Kehrwert eines Bruches, indem man Zähler und Nenner vertauscht.

	Bruch	Kehrwert
1.	$\frac{32}{117}$	$\frac{117}{32}$
2.	$-\frac{6}{3}$	$-\frac{3}{6}$
3.	$\frac{(a-2b+c)(3a-4)}{7a^2-4ab^3+b}$	$\frac{7a^2-4ab^3+b}{(a-2b+c)(3a-4)}$

Zwei Brüche werden dividiert indem man den ersten (den Dividenden) mit dem Kehrwert des zweiten (des Divisors) multipliziert. In Formeln :

$$\frac{p_1}{q_1} : \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{q_2}{p_2} = \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot p_2}.$$

1. $\frac{13}{15}\Big/\frac{2}{7} = \frac{13}{15}\cdot\frac{7}{2} = \frac{13\cdot 7}{15\cdot 2} = \frac{91}{30},$

2. $\frac{256}{325}\Big/\left(-\frac{192}{13}\right) = \frac{256}{325}\cdot\left(-\frac{13}{192}\right) = -\frac{4\cdot\cancel{64}\cdot\cancel{13}}{25\cdot\cancel{13}\cdot 3\cdot\cancel{64}} = -\frac{4}{25\cdot 3} = -\frac{4}{75},$

3. $$\left(\frac{7}{5}+\frac{4}{3}\right)\Big/\frac{7}{10} = \left(\frac{7\cdot 3+4\cdot 5}{3\cdot 5}\right)\cdot\frac{10}{7}$$
$$= \frac{41}{3\cdot 5}\cdot\frac{2\cdot 5}{7} = \frac{41\cdot 2\cdot\cancel{5}}{3\cdot\cancel{5}\cdot 7} = \frac{82}{21},$$

4. $$\frac{4a^2-b^2}{5+b}\Big/\frac{2a+b}{25+10b+b^2} = \frac{(2a-b)\cdot(2a+b)}{5+b}\cdot\frac{5^2+2\cdot 5\cdot b+b^2}{2a+b}$$
$$= \frac{(2a-b)\cdot\cancel{(2a+b)}\cdot(5+b)^2}{(5+b)\cdot\cancel{(2a+b)}}$$
$$= \frac{(2a-b)\cdot(5+b)\cdot\cancel{(5+b)}}{\cancel{5+b}} = (2a-b)(5+b).$$

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Erweitern Sie die Brüche mit den angegebenen Faktoren.

a) $\frac{2}{3}$ mit 2

b) $\frac{3}{2}$ mit 5

Kürzen Sie die Brüche

c) $\frac{10}{20}$ durch 2

d) $\frac{x^2-1}{x-1}$ durch $x-1$

Antwort

a) $\frac{4}{6}$

b) $\frac{15}{10}$

c) $\frac{5}{10}$

d) $x+1$

Lösung a)

Um einen Bruch mit einer Zahl $a \neq 0$ zu erweitern, multipliziert man Zähler und Nenner des Bruchs mit a. Man erweitert also $\frac{2}{3}$ mit 2 wie folgt:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6}.$$

Lösung b)

Multipliziert man den Zähler und den Nenner des Bruches mit 5, so ergibt sich

$$\frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{15}{10}.$$

Lösung c)

Um einen Bruch durch eine Zahl $b \neq 0$ zu kürzen, dividiert man Zähler und Nenner des Bruchs durch b. Dividiert man den Zähler und den Nenner des Bruches durch 2, ergibt sich

$$\frac{10}{20} = \frac{10 : 2}{20 : 2} = \frac{5}{10}\,.$$

Lösung d)

Um den Bruch durch $x-1$ zu kürzen, teilen wir einfach Zähler und Nenner des Bruchs durch $x-1$. Dazu hilft es, die dritte binomische Formel zu verwenden und x^2-1 als $(x+1)(x-1)$ zu schreiben:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x^2-1):(x-1)}{(x-1):(x-1)} = \frac{(x+1)(x-1):(x-1)}{1} = \frac{x+1}{1} = x+1\,.$$

Da die Division durch eine Zahl b nur für $b \neq 0$ definiert ist, müssen wir für diese Rechnung natürlich voraussetzen, dass $x-1 \neq 0$, also $x \neq 1$ ist.

ÜBUNG 2

Kürzen Sie die folgenden Brüche so weit wie möglich:

a) $\frac{42}{56}$ b) $\frac{512}{768}$ c) $\frac{(x^2-4x+4)(x+2)}{(x^2-4)(x+1)}$

Antwort

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{x-2}{x+1}$

Lösung a)

Um den gegebenen Bruch zu kürzen, sucht man nach gemeinsamen Teilern des Zählers und des Nenners:

$$\frac{42}{56} = \frac{2 \cdot 21}{2 \cdot 28} = \frac{21}{28} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{3}{4}\,.$$

Lösung b)

Wir kürzen den Bruch Schritt für Schritt und erhalten

$$\frac{512}{768} = \frac{2 \cdot 256}{2 \cdot 384} = \frac{256}{384} = \frac{2 \cdot 128}{2 \cdot 192} = \frac{128}{192} = \frac{2 \cdot 64}{2 \cdot 96} = \frac{64}{96} = \frac{8 \cdot 8}{8 \cdot 12} = \frac{8}{12} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{2}{3}\,.$$

Lösung c)

Um gemeinsame Faktoren des Zählers und des Nenners zu finden, muss man im Zähler und Nenner weitere Faktoren finden. Mit Hilfe der binomischen Formeln sieht man $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ und $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. Damit gilt:

$$\frac{(x^2-4x+4)(x+2)}{(x^2-4)(x+1)} = \frac{(x-2)^2(x+2)}{(x-2)(x+2)(x+1)} = \frac{(x-2)\cancel{(x-2)}\ \cancel{(x+2)}}{\cancel{(x-2)}\ \cancel{(x+2)}\ (x+1)} = \frac{x-2}{x+1}.$$

Da die Division durch eine Zahl b nur für $b \neq 0$ definiert ist, müssen wir für diese Rechnung natürlich voraussetzen, dass $x+1 \neq 0$, $x-2 \neq 0$ und $x+2 \neq 0$, also $x \neq -1$, $x \neq 2$ und $x \neq -2$ ist.

ÜBUNG 3

Berechnen Sie folgende Terme ohne Verwendung eines Taschenrechners:

a) $\frac{5}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$

b) $\left(\frac{6}{5} + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{2}$

c) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$

d) $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) : \frac{1}{x}$

Antwort

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{14}{5}$

c) $\frac{1}{5}$

d) $\frac{x+1}{x}$

Lösung a)

Wegen der Punkt-vor-Strich-Regel wird zunächst multipliziert und anschließend subtrahiert. Beim Multiplizieren müssen einfach die jeweiligen Zähler miteinander multipliziert werden und die jeweiligen Nenner:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{1 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{6}.$$

Also gilt:

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}.$$

Da beide Brüche schon die gleichen Nenner haben, müssen bei der Subtraktion lediglich die Zähler subtrahiert werden, also

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6}.$$

Kürzt man nun noch mit dem Faktor 2, erhält man als Ergebnis $\frac{2}{3}$.

Lösung b)

Wegen der Klammer wird die Addition zuerst ausgeführt. Hierzu müssen zunächst die Brüche auf den gleichen Nenner gebracht werden und dann die neuen Zähler addiert werden:

$$\frac{6}{5}+\frac{2}{3}=\frac{6\cdot 3}{5\cdot 3}+\frac{5\cdot 2}{5\cdot 3}=\frac{18+10}{15}=\frac{28}{15}$$

Anschließend sind die zwei Brüche zu multiplizieren und das Ergebnis zu kürzen:

$$\frac{28}{15}\cdot\frac{3}{2}=\frac{28\cdot 3}{15\cdot 2}=\frac{14\cdot 1}{5\cdot 1}=\frac{14}{5}.$$

Lösung b) weitere Möglichkeit

Anstatt zuerst die Addition auszuführen, könnte man auch mit dem Distributivgesetz ausmultiplizieren und anschließend die einzelnen Produkte berechnen:

$$\left(\frac{6}{5}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{2}=\frac{6}{5}\cdot\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{6\cdot 3}{5\cdot 2}+\frac{2\cdot 3}{3\cdot 2}=\frac{3\cdot 3}{5\cdot 1}+1=\frac{9}{5}+1.$$

Für die Summe schließlich müssen die Brüche auf den gleichen Nenner gebracht werden und dann die neuen Zähler addiert werden:

$$\frac{9}{5}+1=\frac{9}{5}+\frac{5}{5}=\frac{9+5}{5}=\frac{14}{5}.$$

Anmerkung: Im Vergleich mit der anderen Lösung sieht man, dass die Rechnungen hier einfacher waren, weil sich durch das Multiplizieren einiges kürzen ließ. Es war also durchaus sinnvoll, das Distributivgesetz anzuwenden. Im Allgemeinen ist es jedoch besser, zuerst die Addition auszuführen und anschließend zu multiplizieren.

Lösung c)

Auch wenn man versucht sein könnte, die dritte binomische Formel anzuwenden, so gilt diese nur bei Produkten, nicht aber bei Quotienten! Es müssen also zunächst die Differenz und die Summe berechnet werden:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}.$$

Durch einen Bruch wird nun dividiert, indem man mit dem Kehrbruch multipliziert. Daher gilt

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}:\frac{5}{6}=\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{5}=\frac{1\cdot\cancel{6}}{\cancel{6}\cdot 5}=\frac{1}{5}.$$

Lösung d)

Man geht wie bei den anderen Aufgaben vor, und berechnet zuerst die Summe in der Klammer, wofür die beiden Brüche erst auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden müssen:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{x+1}{x^2}.$$

Nun wird durch einen Bruch dividiert, indem mit dem Kehrbruch multipliziert wird:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right):\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{1}=\frac{(x+1)x}{x^2\cdot 1}=\frac{(x+1)\cdot\cancel{x}}{x\cdot\cancel{x}\cdot 1}=\frac{x+1}{x}.$$

ÜBUNG 4

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

a) Claudia hat 12 Flaschen Limonade für ihre Geburtstagsfeier gekauft. Jede Flasche enthält $\frac{3}{4}$ Liter Limonade. Sie füllt je $\frac{1}{5}$ Liter in die Gläser ihrer Gäste. Wie viele Gläser kann Claudia füllen?

b) Leon und Max schwimmen 1000 m um die Wette. Leon hat bereits $\frac{3}{8}$ und Max $\frac{2}{5}$ der Strecke zurückgelegt. Wieviele Meter müssen Leon und Max jeweils noch schwimmen? Wer liegt in Führung?

Antwort

a) 45

b) Leon muss noch 625 m schwimmen, Max muss noch 600 m schwimmen. Max liegt in Führung.

Lösung a)

Wir können leicht die Gesamtmenge der Limonade, die Claudia gekauft hat, berechnen:

$$12 \cdot \frac{3}{4} \,\text{Liter} = \frac{12 \cdot 3}{4} \,\text{Liter} = 3 \cdot 3 \;\text{Liter} = 9 \;\text{Liter}.$$

Anschließend berechnen wir die Anzahl der Gläser zu je $\frac{1}{5}$ Liter, auf die sich diese Menge aufteilen lässt:

$$9 \,\text{Liter} : \frac{1}{5} \,\text{Liter} = 9 \cdot 5 = 45.$$

Claudia kann also 45 Gläser füllen.

Lösung b)

Wir berechnen zuerst die Strecke, die Leon zurückgelegt hat:

$$\frac{3}{8} \cdot 1000\,\mathrm{m} = \frac{3 \cdot 1000}{8}\,\mathrm{m} = \frac{3 \cdot 125}{1}\,\mathrm{m} = 375\,\mathrm{m}\,.$$

Die von Max zurückgelegte Strecke ist

$$\frac{2}{5} \cdot 1000\,\mathrm{m} = \frac{2 \cdot 1000}{5}\,\mathrm{m} = \frac{2 \cdot 200}{1}\,\mathrm{m} = 400\,\mathrm{m}\,.$$

Die verbleibende Strecke für Leon ist also

$$1000\,\mathrm{m} - 375\,\mathrm{m} = 625\,\mathrm{m}\,,$$

Max hingegen muss nur noch

$$1000\,\mathrm{m} - 400\,\mathrm{m} = 600\,\mathrm{m}$$

schwimmen. Insbesondere liegt Max also in Führung.

5. RECHENREGELN FÜR POTENZEN

Inhalt

5.1 Potenzen mit natürlichen Zahlen als Exponenten
5.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie verstehen die Begriffe „Basis” und „Exponent”.
- Sie sind in der Lage, die Potenzgesetze anzuwenden, um Ausdrücke zu vereinfachen.

5.1 Potenzen mit natürlichen Zahlen als Exponenten

Der Flächeninhalt eines Quadrats mit der Seitenlänge a ist gleich $a \cdot a$ (vgl. auch Kapitel V, Abschnitt 5). Kommt noch die dritte Dimension hinzu und betrachtet man einen Würfel der Kantenlänge a, so berechnet sich dessen Volumen zu $a \cdot a \cdot a$ (vgl. auch Kapitel V, Abschnitt 6).

Für derartige sich wiederholende Multiplikationen mit immer derselben Zahl führt man eine abkürzende Schreibweise ein: die sogenannten *Potenzen*.
So schreibt man zum Beispiel statt $a \cdot a$ auch a^2 (gesprochen: „a hoch zwei” oder auch „a-Quadrat”).

Das n-fache Produkt einer reellen Zahl a mit sich selbst nennt man die n*-te Potenz* von a, geschrieben

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}.$$

Insbesondere ist also

$$a^1 = a.$$

Man nennt a die *Basis* und n den *Exponenten* von a^n.

Es ist

1. $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81.$
2. $1^{2234556567} = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{2234556567\text{-mal}} = 1.$
3. $\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + x^2 = \frac{1}{4} - x + x^2.$
4. $\left(-\frac{4}{3}\right)^3 = \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{(-4)^3}{3^3} = -\frac{64}{27}.$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b \cdot b} = \frac{a^4}{b^4}.$

Die nächsten Beispiele zeigen, dass Potenzen bei Alltagsproblemen nützlich sind.

Springender Fußball

Ein Fußball fällt aus der Höhe $H_0 = 3$ m auf einen harten Boden. Nach jeder Bodenberührung erreicht er nur noch $\frac{3}{5}$ $(60\ \%)$ der Höhe, die er zuvor erreicht hat. Wie hoch springt der Ball noch nach fünf Bodenkontakten?

Da der Ball nach jedem Bodenkontakt nur noch auf $\frac{3}{5}$ seiner jeweiligen Ausgangshöhe gelangt, springt er nach dem ersten Kontakt nur noch auf

$$H_1 = \frac{3}{5} \cdot H_0,$$

nach dem zweiten Bodenkontakt auf

$$H_2 = \frac{3}{5} \cdot H_1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot H_0 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot H_0$$

usw. Nach dem fünften Bodenkontakt springt er somit nur noch auf eine Höhe von

$$H_5 = \underbrace{\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}}_{5\text{-mal}} H_0 = \left(\frac{3}{5}\right)^5 \cdot 3\,\mathrm{m} \approx 23{,}3\,\mathrm{cm}.$$

Bakterienwachstum

In einer Speichelprobe liegt die Anzahl einer bestimmten Bakterienart bei gerade einmal 12 Bakterien. Aus klinischen Studien ist bekannt, dass sich ihre Anzahl alle 15 Minuten verdoppelt. Wie viele Bakterien sind nach 6 Stunden und 30 Minuten vorhanden?

In 6 Stunden und 30 Minuten verdoppeln sich die Bakterien

$$(6\,\mathrm{h} \cdot 60\,\frac{\mathrm{min}}{h} + 30\,\mathrm{min}) : 15\,\mathrm{min} = 390\,\mathrm{min} : 15\,\mathrm{min} = 26$$

mal. Somit ist am Ende die riesige Zahl von

$$12 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{\text{26-mal}} = 12 \cdot 2^{26} = 805\,306\,368$$

Bakterien in der Probe vorhanden.

Diese Rechnung geht natürlich davon aus, dass das Wachstum über den ganzen Zeitraum hinweg so verläuft („exponentielles Wachstum"). Diese Annahme setzt neben ausreichendem Platz für die Bakterienkultur auch eine ausreichende Nahrungsmenge voraus; in der Praxis liegt ein derartiges Wachstum daher nur für kurze Zeiträume vor.

Legende zum Schachspiel

Einer Legende zufolge tyrannisierte im dritten Jahrhundert n. Chr. der indische Herrscher Shihram seine Untertanen und stürzte sein Land in Not und Elend. Um die Aufmerksamkeit des Königs auf seine Fehler zu lenken, ohne dabei seinen Zorn zu entfachen, schuf Dahirs Sohn, der weise Brahmane Sissa, ein Spiel, in dem der König als wichtigste Figur ohne Hilfe anderer Figuren und Bauern nichts ausrichten kann; das Schachspiel. Der Unterricht im Schachspiel machte auf Shihram einen so starken Eindruck, dass er sanfter wurde und das Schachspiel überall verbreiten ließ, damit alle davon Kenntnis nähmen. Um sich für die Lehre und zugleich Unterhaltung zu bedanken, gewährte er dem Brahmanen einen Wunsch. Dieser wünschte sich nun, dass das Schachbrett mit Reiskörnern gefüllt werden solle, und zwar wie folgt:

Ein Korn solle auf das erste Feld gelegt werden, zwei auf das zweite, vier auf das dritte, usw. (d.h. auf ein Feld immer doppelt so viele Reiskörner wie auf das vorangehende), bis das gesamte Brett gefüllt sei.

Der König, der sich über diesen vermeintlich bescheidenen Wunsch wunderte, versprach, der Bitte nachzukommen. War das eine kluge Entscheidung?

Ein Schachbrett hat bekanntlich 64 Felder. Dem Wunsch entsprechend wird nun beginnend mit dem zweiten Feld die Anzahl der Reiskörner auf jedem neuen Feld verdoppelt. Das bedeutet, dass auf dem vierten Feld bereits

$$2^{4-1} = 2^3 = 8$$

Reiskörner und auf dem 25. Feld schon

$$2^{25-1} = 2^{24} = 16\,777\,216$$

Reiskörner „liegen". Auf dem 64. Feld sind es dann

$$2^{64-1} = 2^{63} = 9\,223\,372\,036\,854\,775\,808$$

(also ungefähr 9 Trillionen) Reiskörner . Rechnet man nun all diese Körner zusammen, so muss man die Summe

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}$$

berechnen. Dazu benutzen wir einen Trick. Wir nennen diese Summe S und berechnen

$$\begin{aligned} S &= 2S - S \\ &= 2 \cdot (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}) - (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}) \\ &= 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} + 2^{64} - 1 - 2 - 2^2 - \ldots - 2^{62} - 2^{63} \end{aligned}$$

Nun heben sich alle Terme bis auf die -1 und die 2^{64} gegenseitig auf, sodass sich in Summe die riesengroße Zahl von

$$S = 2S - S = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \approx 18{,}4\,\text{Trillionen}$$

Reiskörnern ergibt. Das sind so viele, dass man damit die gesamte Erdoberfläche bedecken könnte und somit weit mehr, als dem König zur Verfügung stehen dürfte. Das Versprechen ist also der Ruin des Königs.

5.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Im Folgenden sollen Potenzen a^k auch für Exponenten $k \leq 0$ definiert werden.
Eine sinnvolle Definition gibt es jedoch nur für Basen a, die verschieden von Null sind:

Für $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^0 = 1 \quad \text{und} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Begründung der Definition

Für Potenzen a^n und a^m mit positiven Exponenten n und m gilt stets

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{-mal}} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{(n+m)\text{-mal}} = a^{n+m}.$$

Soll dieses Potenzgesetz weiterhin für ganzzahlige Exponenten gelten, so wäre

$$a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n$$

für alle positiven n. Für $a \neq 0$ muss also $a^0 = 1$ sein. (Für $a = 0$ wäre die Bedingung $0^0 \cdot 0 = 0$ erfüllt, ganz unabhängig davon, welchen Wert man für 0^0 vorschreiben würde.)

Für $a \neq 0$ erhält man dann

$$a^{-n} \cdot a^n = a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^{n-n} = a^0 = 1$$

und somit

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Im Allgemeinen ist 0^0 nicht definiert. Wird jedoch mit Variablen gerechnet und taucht dabei ein Ausdruck wie x^0 auf, so wird $x^0 = 1$ für *alle* reellen Zahlen x festgelegt (und entsprechend $(4x-3)^0 = 1$ etc.). In diesem Zusammenhang wählt man also $0^0 = 1$ (vgl. auch die Definition von Monomen in Abschnitt VI.2).

Für $a, x \neq 0$ gilt:

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}, \quad 4a^{-3} = \frac{4}{a^3}, \quad (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}, \quad x^{-2} = \frac{1}{x^2}.$$

Für die Multiplikation und Division von Potenzen gelten folgende Regeln:

Für zwei von Null verschiedene, reelle Zahlen a und b und zwei ganze Zahlen k und m, gelten die folgenden Regeln:

$$a^k \cdot a^m = a^{k+m}$$

(*Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert.*)

$$\frac{a^k}{a^m} = a^{k-m}$$

(*Potenzen mit gleichen Basen werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert.*)

$$a^k \cdot b^k = (a \cdot b)^k$$

(*Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert.*)

$$\frac{a^k}{b^k} = \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

(*Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man die Basen dividiert.*)

$$(a^k)^m = a^{k \cdot m}$$

(*Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.*)

Jedes dieser Gesetze gilt auch für $a = 0$ oder $b = 0$, sofern alle darin auftretenden Ausdrücke definiert sind. Dann sind aber zumeist beide Seiten der entsprechenden Gleichung sowieso gleich 0.

1. $(-5)^2 \cdot (-5)^{-3} = (-5)^{2-3} = (-5)^{-1} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}.$
2. $\frac{(13^2)^{-6}}{13^9 \cdot 13^{-3}} = \frac{13^{-12}}{13^6} = \frac{1}{13^{12} \cdot 13^6} = \frac{1}{13^{18}}.$
3. $0,000027^{-1} = \left(\frac{27}{1000000}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{27}{1000000}} = \frac{1000000}{27}.$
4. $\frac{4^6}{(2^2 \cdot 3^2)^3} = \frac{4^6}{(6^2)^3} = \frac{4^6}{6^6} = \left(\frac{4}{6}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6.$
5. $3^2 \cdot 3^{-4} \cdot 2^8 \cdot 2^{-5} = 3^{2-4} \cdot 2^{8-5} = 3^{-2} \cdot 2^3 = \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9}.$
6. $(x^{-2} \cdot y^{-3})^{-3} \cdot x = (x^{(-2)\cdot(-3)} \cdot y^{(-3)\cdot(-3)}) \cdot x = x^6 \cdot y^9 \cdot x = x^6 \cdot x^1 \cdot y^9 = x^7 \cdot y^9,\ x, y \neq 0.$
7. $\left(\frac{5}{7}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{5}{x-y}\right)^2 = \frac{5^{-1}}{7^{-1}} \cdot \frac{5^2}{(x-y)^2} = \frac{7}{5} \cdot \frac{5^2}{(x-y)^2} = \frac{35}{(x-y)^2},\ x - y \neq 0.$

Bei der Addition und Subtraktion von Potenzen ist zu beachten, dass nur Potenzen mit gleicher Basis **und** gleichem Exponenten zusammengefasst werden können. So ist etwa

$$2^3 + 4 \cdot 2^3 - \frac{1}{5} \cdot 2^3 = 2^3 \cdot \left(1 + 4 - \frac{1}{5}\right) = 2^3 \cdot \frac{24}{5} = 8 \cdot \frac{24}{5} = \frac{192}{5},$$

aber

$$5^3 - 6^3 \neq (5-6)^3 = (-1)^3 = -1 \qquad \text{und} \qquad 4^7 - 4^4 \neq 4^{7-4} = 4^3 = 64.$$

Im folgenden und in einem späteren Abschnitt werden auch Potenzen mit rationalen Exponenten und mit reellen Exponenten behandelt.

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Berechnen Sie:

a) $2^2 \cdot 5^2$

b) $5^5 \cdot 25^{-2}$

c) $(-3)^3$

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$

Antwort

a) 100

b) 5

c) -27

d) $\frac{125}{8}$

Lösung a)

Wir berechnen zuerst 2^2 und 5^2 getrennt:

$$\begin{aligned} 2^2 &= 2 \cdot 2 = 4\,, \\ 5^2 &= 5 \cdot 5 = 25\,. \end{aligned}$$

Daher ist

$$2^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 25 = 100\,.$$

Lösung b)

Wir schreiben 25 als 5^2, um die Rechenregeln für Potenzen anwenden zu können. Dadurch ergibt sich

$$5^5 \cdot 25^{-2} = 5^5 \cdot (5^2)^{-2} = 5^5 \cdot 5^{2\cdot(-2)} = 5^5 \cdot 5^{-4} = 5^{5-4} = 5^1 = 5\,.$$

Lösung c)

Wir berechnen den Ausdruck direkt mithilfe der Definition der Potenz:

$$(-3)^3 = {\color{red}(-3)\cdot(-3)}\cdot(-3) = {\color{red}9}\cdot(-3) = -27\,.$$

Lösung d)

Der Ausdruck lässt sich mit Hilfe der Rechenregeln für Potenzen umformen:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left[{\color{blue}\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}}\right]^3 = \left({\color{blue}\frac{5}{2}}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} = \frac{5\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{125}{8}\,.$$

ÜBUNG 2

Schreiben Sie folgende Ausdrücke als Potenz mit der Basis 2:

a) $32 \cdot 64$

b) $0{,}125$

c) $\frac{2^9}{8^2}$

d) 1

Antwort

a) 2^{11}

b) 2^{-3}

c) 2^3

d) 2^0

Lösung a)

Wir schreiben die einzelnen Faktoren des Produkts als Zweierpotenzen, bevor wir sie multiplizieren. Dadurch ergibt sich

$$32 \cdot 64 = 2^5 \cdot 2^6 = 2^{11}\,.$$

Lösung b)

Es ist

$$0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{125}{125 \cdot 8} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}\,.$$

Lösung c)

Mithilfe der Rechenregeln für Potenzen können wir den Ausdruck umschreiben:

$$\frac{2^9}{8^2} = \frac{2^9}{(2^3)^2} = \frac{2^9}{2^{3\cdot 2}} = \frac{2^9}{2^6} = 2^9 \cdot \frac{1}{2^6} = 2^9 \cdot 2^{-6} = 2^{9-6} = 2^3\,.$$

Lösung d)

Es gilt $x^0 = 1$ für alle reellen Zahlen x, eine Potenz mit dem Exponenten 0 ergibt also immer 1. Die Anwort ist daher $1 = 2^0$.

ÜBUNG 3

Berechnen Sie:

a) $2^{12} \cdot 2^{-11}$

b) $4^3 \cdot 16^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

c) $\frac{3^{11}}{3^{-5}} \cdot (3^3)^{-5}$

d) $\frac{3^{(3^3)}}{(3^3)^3}$

Antwort

a) 2

b) 1

c) 3

d) 3^{18}

Lösung a)

Das Produkt zweier Potenzen mit gleicher Basis lässt sich zu einer Potenz vereinfachen:

$$2^{12} \cdot 2^{-11} = 2^{12-11} = 2^1 = 2\,.$$

Lösung b)

Wir schreiben zuerst die drei Faktoren als Potenzen mit der gemeinsamen Basis 2 und erhalten

$$4^3 = (2^2)^3 = 2^{2\cdot 3} = 2^6\,, \quad 16^{-2} = (2^4)^{-2} = 2^{-8}\,, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = (2^{-1})^{-2} = 2^{(-1)(-2)} = 2^2\,.$$

Das Produkt kann nun vereinfacht werden:

$$4^3 \cdot 16^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^6 \cdot 2^{-8} \cdot 2^2 = 2^{6-8+2} = 2^0 = 1\,.$$

Lösung c)

Erneut vereinfachen wir den Term zuerst durch die Anwendung der Rechenregeln für Potenzen:

$$\frac{3^{11}}{3^{-5}} \cdot (3^3)^{-5} = \frac{3^{11}}{3^{-5}} \cdot 3^{3\cdot(-5)} = \frac{3^{11}}{3^{-5}} \cdot 3^{-15} = \frac{3^{11} \cdot 3^{-15}}{3^{-5}} = \frac{3^{-4}}{3^{-5}} = 3^{-4-(-5)} = 3^1 = 3\,.$$

Lösung d)

Wir berechnen:

$$\frac{3^{(3^3)}}{(3^3)^3} = \frac{3^{27}}{3^{3\cdot 3}} = \frac{3^{27}}{3^9} = 3^{18} = 387\,420\,489\,.$$

ÜBUNG 4

Berechnen Sie:

$$\left(\frac{3^{(3^3)}}{(3^3)^3 \cdot 9^9}\right)^{(9^3)}$$

Antwort

$$1$$

Lösung

Wir berechnen

$$3^{(3^3)} = 3^{3\cdot 3\cdot 3} = 3^{27}$$

sowie

$$(3^3)^3 = 3^{3\cdot 3} = 3^9$$

und

$$9^9 = (3^2)^9 = 3^{2\cdot 9} = 3^{18}\,.$$

Zusammen ergibt sich

$$\frac{3^{(3^3)}}{(3^3)^3 \cdot 9^9} = \frac{3^{27}}{3^9 \cdot 3^{18}} = 3^{27-9-18} = 3^0 = 1\,.$$

Schließlich erhalten wir

$$\left(\frac{3^{(3^3)}}{(3^3)^3 \cdot 9^9}\right)^{(9^3)} = 1^{(9^3)} = 1\,,$$

denn $1^z = 1$ für jede ganze Zahl z.

6. WURZELN UND RATIONALE POTENZEN

Inhalt

6.1 Die Quadratwurzel
6.2 Der Betrag
6.3 Allgemeine Wurzeln
6.4 Potenzen mit rationalen Exponenten

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie kennen die Quadratwurzel und die n. Wurzel.
- Sie kennen den Betrag einer reellen Zahl.
- Sie können mit rationalen Exponenten umgehen.
- Sie beherrschen die Wurzel- und Potenzgesetze und können Wurzel- und Potenzausdrücke vereinfachen.

6.1 Die Quadratwurzel

Im fünften Jahrhundert v. Chr. stellte Hippasos von Metapont die Frage, wie die Fläche eines Quadrats verdoppelt werden könne. Das führte auf die Frage nach einer Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist. Die Antwort löste eine mathematische Revolution aus, denn eine einfache Betrachtung zeigt, dass es unter den rationalen Zahlen keine solche Zahl gibt. Die Entdeckung bedeutet, dass es auf dem Zahlenstrahl mehr Zahlen gibt als die rationalen.

Anzeigen

Man kann zeigen, dass es zu jeder positiven Zahl a genau eine positive reelle Zahl gibt, deren Quadrat a ist. Ferner ist Null die einzige Zahl, die mit sich selbst multipliziert Null ergibt. Dies gibt Anlass zum Begriff der *Quadratwurzel*.

Für jede nichtnegative Zahl $a \geq 0$ ist $\sqrt{a} \geq 0$ als diejenige nichtnegative reelle Zahl definiert, die mit sich selbst multipliziert a ergibt: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$. Man bezeichnet $\sqrt{a}$ als *Quadratwurzel* oder *zweite Wurzel* oder einfach als *Wurzel* aus a. Man nennt a *Radikand* oder *Wurzelbasis*.

1. $\sqrt{4} = 2$, da $2 \cdot 2 = 4$.

2. Ist b die Kantenlänge eines Quadrates und d die Länge der Diagonalen, so gilt

$$d = \sqrt{2}b.$$

3. $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$, da $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

4. Die positive Lösung der Gleichung

$$x^2 - 5 = 0$$

   ist $x = \sqrt{5}$, da $(\sqrt{5})^2 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$.

Bei der Multiplikation und Division gelten die folgenden *Wurzelgesetze*.

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0$, $c > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt{ab} &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \\ \sqrt{\tfrac{a}{c}} &= \tfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}. \end{aligned}$$

Beachten Sie bei allen Beispielen, dass die Werte für a, b, x und y so eingeschränkt werden müssen, dass *alle* Ausdrücke in einer Gleichung definiert sind.

1. $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$,

2. $\sqrt{64 \cdot 81} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{81} = 8 \cdot 9 = 72$,

3. $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$.

Wie schon die einfache, aber unsinnige Gleichung

$$-1 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1 \quad \text{(falsch)}$$

zeigt, ist es sehr wichtig darauf zu achten, dass die Wurzel nur für positive Basen definiert ist und auch die Rechenregeln nur dann gelten, wenn a und b größer oder gleich Null sind.

$\sqrt{a}$ ist nur für $a \geq 0$ definiert und es gilt stets $\sqrt{a} \geq 0$. Somit ist $\sqrt{4} = 2$, aber $\sqrt{4} \neq -2$. Die Schreibweise „$\sqrt{4} = \pm 2$" **ist unzulässig**, auch wenn sowohl $2^2 = 4$ als auch $(-2)^2 = 4$ gelten.
Die Menge *aller* Lösungen der Gleichung $x^2 = 5$ ist $\left\{\sqrt{5}; -\sqrt{5}\right\}$. Die Zahl $\sqrt{5}$ ist nur eine der beiden Lösungen.

Wie schon bei Potenzen ist bei der Addition und Subtraktion von Wurzeln zu beachten, dass nur gleichartige Wurzeln zusammengefasst werden können. So ist etwa

$$\sqrt{3} + 4 \cdot \sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) + 4 \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{3}\sqrt{3} + 4 \cdot \sqrt{2}$$

aber

$$\sqrt{4+9} = \sqrt{13} \neq 5 = \sqrt{4} + \sqrt{9} \qquad \text{und} \qquad \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4 \neq 2 = \sqrt{25} - \sqrt{9}.$$

Für $a > 0$ und $b > 0$ ist stets $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

6.2 Der Betrag

Die Wurzel $\sqrt{a^2}$ aus a^2 ist gleich a für nichtnegative Zahlen $a \geq 0$ aber $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a > 0$ für negative Zahlen $a < 0$; $|a| = \sqrt{a^2}$ wird „a Betrag" genannt. Geometrisch beschreibt $|a|$ den Abstand auf dem Zahlenstrahl zwischen der Zahl a und der Null und $|a - b|$ den Abstand zweier reeller Zahlen a und b.

Für eine reelle Zahl a ist der *Betrag von* a

$$\begin{aligned} |a| = \sqrt{a^2} &= a && \text{für } a \geq 0 \quad \text{und} \\ |a| = \sqrt{a^2} &= -a && \text{für } a < 0. \end{aligned}$$

Beispielsweise ist

$$|-7| = \sqrt{(-7) \cdot (-7)} = \sqrt{49} = \sqrt{7 \cdot 7} = 7 = \sqrt{(7) \cdot (7)} = |7|$$

und auch

$$|x + y| = |-(x+y)|, \quad |x - y| = |-(x-y)| = |y - x|,$$

denn $(x+y)^2 = (-(x+y))^2$ und $(x-y)^2 = (y-x)^2$.

6.3 Allgemeine Wurzeln

Wie im Fall der quadratischen Gleichung $x^2 = a$ mit $a \geq 0$ hat auch die allgemeinere Gleichung $x^n = a$ mit $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ genau eine reelle Lösung größer oder gleich Null, welche n. Wurzel von a (sprich n-te Wurzel von a) genannt wird.

Für $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ wird die n. Wurzel $\sqrt[n]{a}$ aus a definiert als eindeutige Lösung der Gleichung

$$x^n = a,$$

die größer gleich Null ist. Speziell gilt:

$$\sqrt[1]{a} = a.$$

Man nennt a *„Radikand"* (oder *„Wurzelbasis"*) und n *„Wurzelexponent"*.

$$\sqrt[3]{0{,}027} = 0{,}3\,, \qquad \sqrt[4]{\frac{16}{625}} = \frac{2}{5}\,, \qquad \sqrt[6]{4096} = 4\,, \qquad \sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}.$$

Tatsächlich gelten die Wurzelgesetze, wie sie oben formuliert wurden, auch für die n. Wurzel, werden aber um eine zusätzliche Regel erweitert.

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0,\ c > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \\ \sqrt[n]{\frac{a}{c}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}}\,, \\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &= \sqrt[n \cdot m]{a}\,. \end{aligned}$$

1. $3\sqrt[4]{256} + 4\sqrt{49} - 7\sqrt[3]{27} - 2\sqrt[5]{32} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 7 - 7 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 15,$
2. $\sqrt[3]{\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{b}} = \sqrt[3]{\sqrt{a}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{b}} = \sqrt[3 \cdot 2]{a} \cdot \sqrt[3 \cdot 4]{b} = \sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[12]{b},$
3. $$\begin{aligned} \frac{\sqrt{(1+a^2) \cdot (a-b)^2}}{\sqrt[4]{16\,(1+a^2)^2}} &= \sqrt{\frac{(1+a^2) \cdot (a-b)^2}{\sqrt{16\,(1+a^2)^2}}} = \sqrt{\frac{(1+a^2) \cdot (a-b)^2}{4\,(1+a^2)}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2} = \frac{|a-b|}{2}. \end{aligned}$$

Im letzten Beispiel wurde benutzt, dass $(1 + a^2)$ immer positiv ist und daher $\sqrt{(1+a^2)^2} = |1 + a^2| = (1 + a^2)$.

Auch die n. Wurzel $\sqrt[n]{a}$ ist nur für $a \geq 0$ definiert. Folglich sind Terme wie $\sqrt[3]{-1}$ oder $\sqrt[5]{-32}$ unsinnig. Insbesondere sind also

$$\sqrt[3]{-1} \neq -1 \qquad \text{und} \qquad \sqrt[5]{-32} \neq -2,$$

auch wenn $(-1)^3 = -1$ und $(-2)^5 = -32$.

6.4 Potenzen mit rationalen Exponenten

Im Abschnitt Rechenregeln für Potenzen werden Potenzen nur für ganzzahlige Exponenten erklärt. In diesem Abschnitt führen wir Potenzen mit rationalen Zahlen als Exponenten ein und zwar so, dass die Potenzgesetze weiterhin ihre Gültigkeit behalten.

Anzeigen

Für $a > 0$ und jede rationale Zahl $\frac{p}{q}$ (mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q > 0$) ist

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Speziell für $\frac{p}{q} = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist also

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Für $\frac{p}{q} > 0$ gilt auch $0^{\frac{p}{q}} = 0$.

$$7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}, \qquad \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}, \qquad 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4, \qquad \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{5}}.$$

Für negative Zahlen sind Potenzen mit nicht ganzzahligen Exponenten nicht definiert. Daher sind Ausdrücke wie

$$(-8)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{oder} \qquad \left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$$

sinnlos.

Die Rechenregeln für Potenzen gelten unverändert auch für rationale Exponenten.

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

(Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert.)

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

(Potenzen mit gleichen Basen werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert.)

$$a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$$

(Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert.)

$$\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$$

(Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man die Basen dividiert.)

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

(Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.)

Aufgrund dieser Rechenregeln gilt insbesondere:

$$\sqrt[q]{a^p} = (a^p)^{\frac{1}{q}} = a^{p \cdot \frac{1}{q}} = a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{1}{q} \cdot p} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = (\sqrt[q]{a})^p.$$

Es spielt also keine Rolle, ob erst die die $p.$ Potenz von a gebildet wird und dann die $q.$ Wurzel gezogen, oder umgekehrt.

Für alle positiven Zahlen $a \in \mathbb{R}$ und alle rationalen Exponenten $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p.$$

Zum Beispiel ist also

$$\sqrt[4]{4}^2 = \sqrt[4]{4^2} = \sqrt[4]{16} = 2 \quad \text{oder} \quad \sqrt[3]{0{,}09} = \sqrt[3]{\frac{9}{100}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{10}\right)^2} = \left(\sqrt[3]{\frac{3}{10}}\right)^2.$$

1. $256^{\frac{5}{8}} = \left(256^{\frac{1}{8}}\right)^5 = (\sqrt[8]{256})^5 = 2^5 = 32$,
2. $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3}} = \left(\sqrt[3]{\frac{27}{125}}\right)^{-2} = \left(\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$,
3. $(\sqrt[6]{x+y})^4 = \left((x+y)^{\frac{1}{6}}\right)^4 = (x+y)^{\frac{1}{6}\cdot 4} = (x+y)^{\frac{4}{6}} = (x+y)^{\frac{2}{3}}$,
4. $(2a+b)^{-\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{2a+b}\right)^{-4} = \frac{1}{\sqrt[3]{2a+b}^4}$,
5. $\left(a^2 \cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(a^{\frac{8}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}} = a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a}^2 = \sqrt[3]{a^2}$.

Die Potenzgesetze sind nur gültig, solange alle Ausdrücke definiert sind. Sie gelten für alle Basen $a, b \neq 0$, wenn alle Exponenten ganzzahlig sind (siehe hier) und sie gelten für beliebige rationale Exponenten, wenn die Basen auf positive Werte $a, b > 0$ stärker eingeschränkt werden. In speziellen Fällen gelten sie auch für Basen Null.

Als abschließende Bemerkung wollen wir noch festhalten, dass sich Potenzen a^x auch für reelle Exponenten $x \in \mathbb{R}$ (und Basis $a > 0$) erklären lassen. Ausdrücke wie $a^{\sqrt{2}}$ oder 4^π sind daher sinnvoll und wohldefiniert.
Auch mit reellen Exponenten $x, y \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ gelten dann die Potenzgesetze, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ und $a^x \cdot b^x = (ab)^x$, falls auch $b > 0$ ist.

Die präzise Einführung von a^x für allgemeine reelle Exponenten $x \in \mathbb{R}$ benötigt jedoch den Begriff der Stetigkeit, was den Rahmen des Kurses sprengen würde und wovon wir deswegen hier absehen.
In Kapitel VI, Abschnitt 4 wird jedoch der Funktionsgraph der Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ beschrieben, aus welchem man die Werte im Prinzip ablesen kann.

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke als Potenzen:

a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{7^5}$

c) $(\sqrt[3]{3})^4$

d) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$

Antwort

a) $2^{\frac{1}{2}}$

b) $7^{\frac{5}{2}}$

c) $3^{\frac{4}{3}}$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{9}{2}}$

Lösung a)

Nach Definition ist

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} .$$

Lösung b)

Der Ausdruck $\sqrt{7^5}$ kann als $(7^5)^{\frac{1}{2}}$ geschrieben werden. Wir erhalten mit den Rechenregeln für Potenzen: $7^{5 \cdot \frac{1}{2}} = 7^{\frac{5}{2}}$.

Lösung c)

$\sqrt[3]{3}$ ist per Definition $3^{\frac{1}{3}}$. Also ist $(\sqrt[3]{3})^4 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{3}}$.

Lösung d)

Wir schreiben $\sqrt{\frac{2}{3}}$ als $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ und berechnen

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}+4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{8}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{9}{2}}.$$

ÜBUNG 2

Schreiben Sie die folgenden Terme als Wurzel:

a) $3^{\frac{1}{5}}$

b) $3^{-\frac{1}{5}}$

c) $15^{-\frac{5}{6}}$

d) $25^{-0{,}75}$

Antwort

a) $\sqrt[5]{3}$

b) $\sqrt[5]{\frac{1}{3}}$

c) $\sqrt[6]{\frac{1}{15^5}}$

d) $\sqrt[4]{\frac{1}{25^3}}$

Lösung a)

Nach Definition ist

$$3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3}.$$

Lösung b)

Es gilt

$$3^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3}} = \sqrt[5]{\frac{1}{3}}\,.$$

Lösung c)

$15^{-\frac{5}{6}}$ lässt sich mit Hilfe der Potenzgesetze darstellen als

$$15^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{15^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{15^5}} = \sqrt[6]{\frac{1}{15^5}}\,.$$

Lösung d)

Zunächst ist $0{,}75 = \frac{3}{4}$, somit erhalten wir $25^{-0{,}75} = 25^{-\frac{3}{4}}$.

Nun wenden wir die Potenzgesetze an und erhalten

$$25^{-0{,}75} = 25^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{25^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{25^3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{25^3}}\,.$$

ÜBUNG 3

Es seien $a, b, u > 0$. Vereinfachen Sie die folgenden Terme und fassen Sie sie soweit wie möglich zusammen:

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot 5$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{125}}$

c) $\sqrt[m+2]{u^{5m+10}}$

d) $\sqrt{\frac{4\,a^2}{9\,b^2}}$

Antwort

a) $5^{\frac{11}{6}}$

b) $\sqrt{5}$

c) u^5

d) $\frac{2a}{3b}$

Lösung a)

Wir schreiben den Ausdruck als Produkt von Potenzen und erhalten so

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot 5 = 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5 = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+1} = 5^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{6}{6}} = 5^{\frac{11}{6}}\ .$$

Lösung b)

Zunächst stellen wir $\sqrt{125}$ dar als $\sqrt{125} = 125^{\frac{1}{2}}$. Nun stellen wir die dritte Wurzel mit einer Potenz dar und erhalten

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}} = \sqrt[3]{125^{\frac{1}{2}}} = \left(125^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 125^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 125^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \left(125^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5},$$

denn aus $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ folgt $5 = 125^{\frac{1}{3}}$.

Lösung c)

Als erstes schreiben wir die $m+2$-te Wurzel als Potenz und wenden danach die Potenzgesetze für eine vereinfachte Darstellung an:

$$\sqrt[m+2]{u^{5m+10}} = \left(u^{5m+10}\right)^{\frac{1}{m+2}} = u^{\frac{5m+10}{m+2}}\,.$$

Der Exponent lässt sich wie folgt vereinfachen:

$$\frac{5m+10}{m+2} = \frac{5(m+2)}{m+2} = 5\,.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$u^{\frac{5m+10}{m+2}} = u^5\,.$$

Lösung d)

Wir wenden die Potenzgesetze an:

$$\sqrt{\frac{4\,a^2}{9\,b^2}} = \left(\frac{4\,a^2}{9\,b^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(4\,a^2)^{\frac{1}{2}}}{(9\,b^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{4^{\frac{1}{2}}\cdot(a^2)^{\frac{1}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}\cdot(b^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2|a|}{3|b|} = \frac{2a}{3b}\,.$$

ÜBUNG 4

Vereinfachen Sie folgende Terme:

a) $\sqrt{x^2-1}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ für $x>1$

b) $\sqrt{5\,a^2-5\,b^2}\sqrt{\frac{5\,a+5\,b}{a-b}}$ für $a>b>0$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{x^4\,y^6}}$ für $x,y>0$

d) $\sqrt[n]{\frac{c^{n+1}b^n}{a^{-n}c\,a^n}}$ für $a,b,c>0$ und $n\in\mathbb{N}$

Antwort

a) $x+1$

b) $5(a+b)$

c) $\sqrt[3]{x^2}\cdot y$

d) $b\cdot c$

Lösung a)

Wir schreiben den Term um zu

$$\sqrt{\frac{(x^2-1)(x+1)}{x-1}}\,.$$

Mit der dritten binomischen Formel erhalten wir $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Dadurch lässt sich der Radikand vereinfacht darstellen als

$$\sqrt{\frac{(x^2-1)(x+1)}{x-1}}=\sqrt{\frac{(x-1)(x+1)(x+1)}{x-1}}=\sqrt{(x+1)^2}=x+1\,.$$

Lösung b)

Zunächst fassen wir das Produkt zu einer Wurzel zusammen. Anschliessend fassen wir den Radikanden durch die Anwendung der dritten binomischen Formel zusammen und wenden die Potenzgesetze an:

$$\begin{aligned}\sqrt{5\,a^2-5\,b^2}\cdot\sqrt{\tfrac{5\,a+5\,b}{a-b}} &= \sqrt{\tfrac{(5\,a^2-5\,b^2)\cdot(5\,a+5\,b)}{a-b}}\\ &= \sqrt{\tfrac{25(a^2-b^2)(a+b)}{a-b}}\\ &= \sqrt{\tfrac{25(a-b)(a+b)(a+b)}{a-b}}\\ &= \sqrt{25(a+b)^2} = 5\cdot(a+b)\,.\end{aligned}$$

Lösung c)

Wir schreiben die Wurzeln der Reihe nach in Potenzen um und wenden die Potenzgesetze an:

$$\sqrt[3]{\sqrt{x^4y^6}} = \sqrt[3]{(x^4y^6)^{\frac{1}{2}}} = \left[(x^4y^6)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} = (x^4)^{\frac{1}{6}}\cdot(y^6)^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{2}{3}}\cdot y\,.$$

Lösung d)

Wir schreiben zuerst den Nenner mithilfe des Kommutativgesetzes und der Potenzgesetze um zu

$$a^{-n}c\,a^n = a^{-n}a^n c = a^{n+(-n)}c = a^0 c = 1\cdot c = c\,.$$

Wir erhalten dadurch:

$$\sqrt[n]{\frac{c^{n+1}b^n}{a^{-n}c\,a^n}} = \sqrt[n]{\frac{c^{n+1}b^n}{c}} = \sqrt[n]{b^n\cdot\frac{c^n\cdot c}{c}} = \sqrt[n]{b^n}\cdot\sqrt[n]{\frac{c^n\cdot c}{c}} = b\cdot\sqrt[n]{c^n} = b\cdot c\,.$$

7. RECHNEN MIT WURZELN UND POTENZEN

Inhalt

7.1 Vereinfachen von Termen mit Wurzeln
7.2 Abschätzen von Potenzen und Wurzeln

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie können Bruchausdrücke umformen, sodass deren Nenner keine Wurzeln enthalten.
- Sie können Ausdrücke mit Wurzeln vereinfachen.
- Sie sind in der Lage, verschiedene Potenzausdrücke zu vergleichen.
- Sie sind in der Lage, Wurzeln und Potenzen rationaler Zahlen grob durch ganze Zahlen abzuschätzen.

7.1 Vereinfachen von Termen mit Wurzeln

Bei der Addition und Subtraktion von Brüchen ist es oft störend, wenn im Nenner der Brüche Wurzeln stehen. Deshalb werden hier Umformungen von Brüchen betrachtet, mit denen Wurzeln im Nenner beseitigt werden können. Um $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}$ zu berechnen, kann der erste Bruch mit $\sqrt{2}$ erweitert werden. Damit kann die Summe leicht zusammengefasst werden.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

Auch wenn anstelle einer einfachen Wurzel die Summe oder Differenz von Wurzeln im Nenner stehen, können diese Brüche umgeformt werden.

Mit den folgenden Regeln werden Wurzeln aus dem Nenner eines Bruchs entfernt (sofern die Voraussetzungen dafür erfüllt sind):

1. Besteht der Nenner nur aus einer Quadratwurzel, so erweitert man den Bruch mit dieser Wurzel.
2. Besteht der Nenner aus der Summe oder der Differenz zweier Quadratwurzeln (oder einer Quadratwurzel und einer rationalen Zahl), so erweitert man mit der Differenz bzw. der Summe der beiden Zahlen.

Bei 1. enthält der Nenner keine Wurzel mehr, weil $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$ für alle positiven Zahlen a gilt.
Bei 2. findet die dritte binomische Formel Anwendung: Ist nämlich der Nenner gegeben durch $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ erhält man nach Erweitern mit $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ als neuen Nenner den Ausdruck

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b.$$

Entsprechend, wenn man einen Bruch mit dem Nenner $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ mit $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ erweitert.

Wenn a und b rationale Zahlen sind, ist der Nenner nach der Umformung rational. Deshalb wird diese Umformung auch „Rational-Machen des Nenners" genannt.

> 1. $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
> 2. $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \frac{2 \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{2 \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{5})}{3-5} = -(\sqrt{3}+\sqrt{5}) = -\sqrt{3}-\sqrt{5}$,
> 3. $\frac{1}{4+\sqrt{3}} = \frac{4-\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3}) \cdot (4-\sqrt{3})} = \frac{4-\sqrt{3}}{16-3} = \frac{1}{13}(4-\sqrt{3})$.

Die Umformumg ist auch möglich, wenn der Nenner ein Produkt ist, dessen Faktoren eine der beiden Bedingungen aus Regel 1 erfüllen. Dann wird die Regel zum Erweitern einfach für jeden Faktor ausgeführt.

> $$\frac{1}{\sqrt{7}(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{7} \cdot (\sqrt{2}+1)}{\sqrt{7}(\sqrt{2}-1) \cdot \sqrt{7} \cdot (\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{7}(\sqrt{2}+1)}{7 \cdot (\sqrt{2}^2-1^2)} = \frac{\sqrt{7}(\sqrt{2}+1)}{7 \cdot (2-1)} = \frac{1}{7}\sqrt{7}(\sqrt{2}+1).$$

Mit dieser Methode lassen sich viele komplizierte Ausdrücke vereinfachen.

> 1. Vereinfachen Sie den Ausdruck $\sqrt{2}+\frac{2}{2\sqrt{2}+3}$ so weit wie möglich.
>
> Um dies zu bewerkstelligen, wird zunächst der Nenner des zweiten Bruchs rational gemacht und anschließend mit den üblichen Regeln möglichst viele Terme zusammengefasst:
>
> $$\begin{aligned} \sqrt{2}+\tfrac{2}{2\sqrt{2}+3} &= \sqrt{2}+\tfrac{2\cdot(2\sqrt{2}-3)}{(2\sqrt{2}+3)\cdot(2\sqrt{2}-3)} \\ &= \sqrt{2}+\tfrac{4\sqrt{2}-6}{(2\sqrt{2})^2-3^2} \\ &= \sqrt{2}+\tfrac{4\sqrt{2}-6}{-1} \\ &= \sqrt{2}-4\sqrt{2}+6 = 6-3\sqrt{2}. \end{aligned}$$
>
> 2. Vereinfachen Sie den Ausdruck $\frac{1}{2-\sqrt{x}}+\frac{1}{2+\sqrt{x}}$ so weit wie möglich.
>
> $$\begin{aligned} \tfrac{1}{2-\sqrt{x}}+\tfrac{1}{2+\sqrt{x}} &= \tfrac{2+\sqrt{x}}{(2-\sqrt{x})\cdot(2+\sqrt{x})}+\tfrac{2-\sqrt{x}}{(2+\sqrt{x})\cdot(2-\sqrt{x})} \\ &= \tfrac{2+\sqrt{x}+2-\sqrt{x}}{4-x} = \tfrac{4}{4-x}\,. \end{aligned}$$
>
> 3. Vereinfachen Sie den Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}$ so weit wie möglich.
>
> $$\begin{aligned} \tfrac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}-\tfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} &= \tfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{(\sqrt{1+x^2}-1)\cdot(\sqrt{1+x^2}+1)}-\tfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{(\sqrt{1+x^2}+1)\cdot(\sqrt{1+x^2}-1)} \\ &= \tfrac{(\sqrt{1+x^2}+1)-(\sqrt{1+x^2}-1)}{1+x^2-1} = \tfrac{2}{x^2}\,. \end{aligned}$$

7.2 Abschätzen von Potenzen und Wurzeln

Wenn man Potenzen ohne Taschenrechner vergleichen möchte, kann man dies durch das Vergleichen von Basen oder Exponenten

machen.
In allen Fällen betrachten wir nur Potenzen, bei denen die Basis positiv ist.

Ist a eine positive reelle Zahl, so gilt für Potenzen a^r von a:

- Wenn die Basis a größer als 1 ist, wird die Potenz größer, je größer der Exponent wird.
- Wenn die Basis a kleiner als 1 (und größer als 0) ist, wird die Potenz kleiner, je größer der Exponent wird.

Dies gilt unabhängig vom Vorzeichen des Exponenten.

Da man eine n. Wurzel auch als Potenz mit Exponent $\frac{1}{n}$ schreiben kann, erhält man entsprechende Regeln für Wurzeln:

Ist a eine positive reelle Zahl und m, n natürliche Zahlen mit $m > n > 1$, so gilt:

- $1 < \sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a} < a$, wenn der Radikand a größer als 1 ist.
- $1 > \sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{a} > a$, wenn der Radikand a kleiner als 1 (und größer als 0) ist.

> 1. $3^{\frac{5}{4}} > 3^{\frac{3}{4}}$, weil die Basis 3 größer als 1 und der erste Exponent $\frac{5}{4}$ größer als der zweite Exponent $\frac{3}{4}$ ist.
> 2. $0{,}3^5 < 0{,}3^4$, da die Basis $0{,}3$ zwischen 0 und 1 ist, und $5 > 4$.
> 3. $\sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$, da der Radikand 2 größer als 1 ist und $3 > 2$.

Eine ähnliche Vergleichsmöglichkeit gibt es im Fall, dass die Exponenten zweier Potenzen gleich sind.

Für Potenzen mit gleichem Exponenten gilt:

- Wenn der Exponent positiv ist, dann wird die Potenz größer, je größer die Basis wird.
- Wenn der Exponent negativ ist, dann wird die Potenz kleiner, je größer die Basis wird.

Die erste Regel gilt auch für Wurzeln, da man eine n. Wurzel ja auch als Potenz mit Exponent $\frac{1}{n}$ schreiben kann.

> 1. $5^{\frac{3}{2}} > 4^{\frac{3}{2}}$, weil die Basis 5 größer als die Basis 4 ist und beide Potenzen denselben positiven Exponenten $\frac{3}{2}$ haben.
> 2. $2^{\frac{-5}{3}} > 3^{\frac{-5}{3}}$, weil für die Basen gilt, dass $2 < 3$, und die Potenzen den negativen Exponenten $\frac{-5}{3}$ haben.
> 3. $\sqrt{14} < \sqrt{17}$, da $14 < 17$ ist.

Eine Hauptanwendung dieser Regeln liegt in der Abschätzung der Wurzeln natürlicher Zahlen und ganzzahliger Potenzen rationaler Zahlen.

1. Zwischen welchen beiden ganzen Zahlen liegt $\sqrt{14}$?
   Wegen $9 < 14 < 16$ gilt nach Regel 2

   $$3 = \sqrt{9} < \sqrt{14} < \sqrt{16} = 4.$$

   Also liegt die Zahl $\sqrt{14}$ zwischen 3 und 4.

2. In welchem der folgenden Bereiche liegt die Zahl $\left(\frac{4}{3}\right)^3$?

   a) zwischen 0 und 1 b) zwischen 1 und 10 c) zwischen 10 und 100

   Da der Bruch $\frac{4}{3}$ zwischen 1 und 2 liegt, liegt nach Regel 2 die Zahl $\left(\frac{4}{3}\right)^3$ zwischen $1^3 = 1$ und $2^3 = 8$. Also ist der Bereich b) der richtige.

3. Ist die Zahl $a = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$ größer oder kleiner als $1{,}5$?
   Es ist $1{,}5 = \frac{3}{2} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$. Da $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} < \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ist, ist nach Regel 2 die Zahl $1{,}5$ kleiner als a, also a größer als $1{,}5$.

4. Näherungswert für $\sqrt{2}$: Da $1{,}4^2 = 1{,}96 < 2$ und $1{,}5^2 = 2{,}25 > 2$ gilt, muss nach Regel 2 $\sqrt{2}$ zwischen $1{,}4$ und $1{,}5$ liegen, $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$. Wir probieren die nächste Dezimalstelle und beobachten, dass $1{,}41^2 = 1{,}9881 < 2$ und $1{,}42^2 = 2{,}0164 > 2$ gilt. Daraus folgt $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$. So können immer bessere Näherungswerte von $\sqrt{2}$, schrittweise berechnet werden.

ÜBUNG 1

Bestimmen Sie zu jedem der Zahlenpaare, welche Zahl die größere ist:

a) $3^{\frac{5}{6}}$ und $3^{\frac{3}{4}}$

b) $3^{-\frac{3}{4}}$ und $3^{\frac{3}{4}}$

c) $0{,}3^4$ und $0{,}3^{4{,}2}$

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^8$ und $\left(\frac{2}{5}\right)^0$

Antwort

a) $3^{\frac{5}{6}} > 3^{\frac{3}{4}}$

b) $3^{-\frac{3}{4}} < 3^{\frac{3}{4}}$

c) $0{,}3^4 > 0{,}3^{4{,}2}$

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^8 < \left(\frac{2}{5}\right)^0$

Lösung a)

In diesem Fall ist die gemeinsame Basis größer als 1. Die größere Potenz ist deshalb diejenige mit dem größeren Exponenten; aus

$$\frac{5}{6} = \frac{20}{24} > \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

folgt daher direkt

$$3^{\frac{5}{6}} > 3^{\frac{3}{4}}.$$

Lösung b)

Die Basis 3 ist größer als 1, die größere Zahl wird also durch den größeren Exponenten bestimmt. Es gilt

$$-\frac{3}{4} < \frac{3}{4}$$

und deshalb

$$3^{-\frac{3}{4}} < 3^{\frac{3}{4}}.$$

Lösung c)

Die gemeinsame Basis $0{,}3$ liegt zwischen 0 und 1, daher ist die größere Zahl diejenige mit dem kleineren Exponenten. Aus

$$4 < 4{,}2$$

folgt also

$$0{,}3^{4} > 0{,}3^{4{,}2}\,.$$

Lösung d)

Erneut liegt die Basis zwischen 0 und 1, also gilt: Aus

$$8 > 0$$

folgt

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{8} < \left(\frac{2}{5}\right)^{0}.$$

ÜBUNG 2

Vereinfachen Sie so weit wie möglich

a) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$

b) $\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{18}}$

c) $\sqrt{16+\sqrt{16}}$

d) $\sqrt{\frac{2}{3}}(\sqrt{6}-\sqrt{3})$

Antwort

a) 3

b) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

c) $2\sqrt{5}$

d) $2-\sqrt{2}$

Lösung a)

Mit der dritten binomischen Formel $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ schreiben wir den Ausdruck als

$$(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2=5-2=3.$$

Lösung b)

Wir zerlegen alle Zahlen im Ausdruck in ihre Primfaktoren, um den Ausdruck zu vereinfachen.

Durch mehrfache Division mit 2 und 3 erhalten wir

$$96=2^5\cdot 3\,,\qquad 18=2\cdot 3^2\,.$$

Also ist

$$\begin{aligned}\sqrt{96}&=\sqrt{2^5\cdot 3}=\sqrt{2^2\cdot 2^2\cdot 2\cdot 3}=2\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\,,\\ \sqrt{18}&=\sqrt{2\cdot 3^2}=3\cdot\sqrt{2}\,.\end{aligned}$$

Für den Bruch gilt also

$$\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{18}}=\frac{2\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Lösung c)

Wir betrachten zuerst die Wurzel $\sqrt{16}$. Aus $16 = 4 \cdot 4 = 4^2$ folgt direkt $\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$ und der Ausdruck vereinfacht sich zu

$$\sqrt{16 + \sqrt{16}} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}\,.$$

Um zu testen, ob $\sqrt{20}$ vereinfacht werden kann, schreiben wir 20 in Primfaktoren:

$$20 = 2^2 \cdot 5.$$

Wir sehen, dass 20 den Faktor 2^2 enthält, also können wir die Wurzel weiter vereinfachen:

$$\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}\,.$$

Lösung d)

Wir multiplizieren beide Terme in der Klammer mit $\sqrt{\frac{2}{3}}$ und benutzen die Regel $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, um den Ausdruck zu vereinfachen:

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{6} - \sqrt{3}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{6} - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6}{3}} - \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{3}} = \sqrt{2 \cdot 2} - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}\,.$$

ÜBUNG 3

Bestimmen Sie zu jedem der Zahlenpaare, welche Zahl die größere ist:

a) $64^{0{,}5}$ und $128^{\frac{1}{4}}$

b) $\sqrt{49}$ und $4^{1{,}5}$

c) 4^3 und $\sqrt{512}$

d) $\sqrt[3]{81}$ und $3^{\frac{3}{4}}$

Antwort

a) $64^{0{,}5} > 128^{\frac{1}{4}}$

b) $\sqrt{49} < 4^{1{,}5}$

c) $4^3 > \sqrt{512}$

d) $\sqrt[3]{81} > 3^{\frac{3}{4}}$

Lösung a)

Wir schreiben 64 und 128 als Potenzen mit Basis 2 und erhalten

$$64 = 2^6\,, \quad 128 = 2^7\,.$$

Dadurch können wir die zu vergleichenden Ausdrücke umschreiben zu

$$64^{0{,}5} = 64^{\frac{1}{2}} = (2^6)^{\frac{1}{2}} = 2^{6\cdot\frac{1}{2}} = 2^3, \quad 128^{\frac{1}{4}} = (2^7)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{7}{4}}\,.$$

Die gemeinsame Basis der beiden Terme ist $2 > 1$, also ist die größere Zahl diejenige mit dem größeren Exponenten; deshalb gilt wegen $3 = \frac{12}{4} > \frac{7}{4}$ auch

$$64^{0{,}5} = 64^{\frac{1}{2}} = 2^3 > 2^{\frac{7}{4}} = 128^{\frac{1}{4}}\,.$$

Lösung b)

Wir formen die Terme zunächst um:

$$\sqrt{49} = \sqrt{7 \cdot 7} = 7\,, \quad 4^{1,5} = 4^{\frac{3}{2}} = (4^{\frac{1}{2}})^3 = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8\,.$$

Da offensichtlich $7 < 8$ ist, gilt also auch

$$\sqrt{49} < 4^{\frac{3}{2}} = 4^{1,5}\,.$$

Lösung c)

Es gilt

$$\color{blue}{4^3} = (2^2)^3 = 2^{2\cdot 3} = \color{blue}{2^6}$$

sowie

$$\color{red}{\sqrt{512}} = 512^{\frac{1}{2}} = (2^9)^{\frac{1}{2}} = \color{red}{2^{\frac{9}{2}}}\,.$$

Für die beiden Potenzen mit gemeinsamer Basis $2 > 1$ gilt nun, dass der Term mit dem größeren Exponenten der größere ist. Aus

$$6 = \frac{12}{2} > \frac{9}{2}$$

folgt daher

$$\color{blue}{4^3} = \color{blue}{2^6} > \color{red}{2^{\frac{9}{2}}} = \color{red}{\sqrt{512}}\,.$$

Lösung d)

Durch Umformen erhalten wir

$$\sqrt[3]{81} = (9^2)^{\frac{1}{3}} = ((3^2)^2)^{\frac{1}{3}} = 3^{2\cdot 2\cdot \frac{1}{3}} = 3^{\frac{4}{3}} \,.$$

Wegen $\frac{4}{3} = \frac{16}{12} > \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ gilt also

$$\sqrt[3]{81} = 3^{\frac{4}{3}} > 3^{\frac{3}{4}} \,,$$

denn die größere der beiden Potenzen mit Basis $3 > 1$ ist diejenige mit dem größeren Exponenten.

ÜBUNG 4

Machen Sie in folgenden Ausdrücken den Nenner rational und vereinfachen Sie so weit wie möglich:

a) $\frac{2}{\sqrt{12}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$

c) $\frac{2}{3+\sqrt{7}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{17}-\sqrt{13}}$

Antwort

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{\sqrt[3]{7}^2}{7}$

c) $3-\sqrt{7}$

d) $\frac{\sqrt{17}+\sqrt{13}}{4}$

Lösung a)

Der Bruch wird mit $\sqrt{12}$ erweitert, sodass man den Nenner $\sqrt{12}\cdot\sqrt{12}=12$ erhält:

$$\frac{2}{\sqrt{12}}=\frac{2}{\sqrt{12}}\cdot\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}}=\frac{2\sqrt{12}}{12}=\frac{2\sqrt{12}}{2\cdot 6}=\frac{\sqrt{12}}{6}\,.$$

Dieser Ausdruck kann weiter vereinfacht werden, indem man 12 als $12=2\cdot 6=2\cdot 2\cdot 3=2^2\cdot 3$ schreibt:

$$\frac{\sqrt{12}}{6}=\frac{\sqrt{2^2\cdot 3}}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

Lösung b)

Erweitert man den Bruch mit $\sqrt[3]{7}^2$, erhält man

$$\frac{1}{\sqrt[3]{7}}=\frac{1}{\sqrt[3]{7}}\cdot\frac{\sqrt[3]{7}^2}{\sqrt[3]{7}^2}=\frac{\sqrt[3]{7}^2}{\sqrt[3]{7}^3}=\frac{\sqrt[3]{7}^2}{7}\,.$$

Lösung c)

Aus der dritten binomischen Formel

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

folgt mit $a=3$ und $b=\sqrt{7}$, dass

$$(3+\sqrt{7})\cdot(3-\sqrt{7})=3^2-\left(\sqrt{7}\right)^2=9-7=2$$

ist. Um die Wurzel aus dem Nenner zu entfernen, sollte man den Bruch daher mit $3-\sqrt{7}$ erweitern und erhält

$$\frac{2}{3+\sqrt{7}}=\frac{2}{3+\sqrt{7}}\cdot\frac{3-\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}=\frac{2(3-\sqrt{7})}{(3+\sqrt{7})\cdot(3-\sqrt{7})}=\frac{2(3-\sqrt{7})}{2}=3-\sqrt{7}.$$

Lösung d)

Wir erweitern den Bruch mit $\sqrt{17}+\sqrt{13}$ und erhalten mit der dritten binomischen Formel

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{17}-\sqrt{13}} &= \frac{1}{\sqrt{17}-\sqrt{13}}\cdot\frac{\sqrt{17}+\sqrt{13}}{\sqrt{17}+\sqrt{13}}\\ &= \frac{\sqrt{17}+\sqrt{13}}{(\sqrt{17}-\sqrt{13})(\sqrt{17}+\sqrt{13})}\\ &= \frac{\sqrt{17}+\sqrt{13}}{(\sqrt{17})^2-(\sqrt{13})^2}\\ &= \frac{\sqrt{17}+\sqrt{13}}{17-13}\\ &= \frac{\sqrt{17}+\sqrt{13}}{4}.\end{aligned}$$

8. PROPORTIONALITÄT UND DREISATZ

Inhalt

8.1 Proportionalität
8.2 Umgekehrte Proportionalität

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie verstehen den Begriff der „Proportionalität" und sind in der Lage, Verhältnisse bzw. Verhältnisgleichungen aufzustellen und zu interpretieren.
- Sie können Verhältnisgleichungen mit Hilfe des Dreisatzes lösen.
- Sie verstehen den Begriff der „umgekehrten Proportionalität" (Antiproportionalität), und können damit umgehen.

8.1 Proportionalität

Im Alltag hängen oft verschiedene Größen voneinander ab. Die *Proportionalität* ist eine besonders einfache Form der Abhängigkeit.

Auf dem Markt werden Äpfel zu 3 Euro pro Kilogramm verkauft, d.h.

1 kg Äpfel kosten 3 Euro,
2 kg Äpfel kosten 6 Euro,
4 kg Äpfel kosten 12 Euro
und allgemein:
x kg Äpfel kosten $y = 3x$ Euro.

Das Verhältnis von Preis zu Gewicht ist konstant. Man sagt, die beiden Größen seien *proportional*.

Wenn zwei variable Größen x und y immer in demselben Verhältnis zueinander stehen, wenn also

$$\frac{y}{x} = k, \qquad k \neq 0$$

für eine feste Zahl $k \neq 0$ und für alle zulässigen Werte von x und y gilt, so nennt man y *proportional* (oder *direkt proportional*) zu x. Dabei heißt k *Proportionalitätsfaktor* oder auch *Proportionalitätskonstante*.

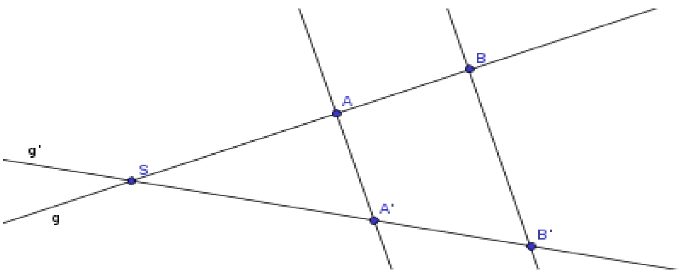
Die Gleichung $\frac{y}{x} = k = \frac{k}{1}$ nennt man auch *Proportion* oder *Verhältnisgleichung* (gelesen: „y verhält sich zu x wie k zu 1").

Ist y proportional zu x, so führt eine Verdopplung (Verdreifachung, Halbierung,...) der Größe x zu einer Verdopplung (Verdreifachung, Halbierung,...) der Größe y.

Wenn y zu x proportional ist, ist natürlich auch x zu y proportional. Der Proportionalitätsfaktor von x zu y ist dabei der Kehrwert des Proportionalitätsfaktors von y zu x, denn

$$\frac{y}{x} = \frac{k}{1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{k}.$$

Im Folgenden sehen Sie noch ein antikes Beispiel aus der Geometrie (welches auf Thales von Milet zurückgeht, 6.Jh. v.Chr.):

> Betrachtet man ein Dreieck $SB'B$ und eine zur Seite $B'B$ parallele Gerade, so schneidet diese Parallele die beiden anderen Seiten bzw. deren Verlängerungen in zwei Punkten A und A' (vgl. Skizze).
>
> 
>
>
> Für die Streckenabschnitte SA und SA' gilt dann stets
>
> $$\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SB'}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{SA} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SB'}} \cdot \overline{SB} = \frac{\overline{SB}}{\overline{SB'}} \cdot \overline{SA'}$$
>
> (vgl. 1. Strahlensatz im Abschnitt V.3 Kongruenz und Ähnlichkeit). Die Länge des Streckenabschnitts SA verhält sich also proportional zur Länge von SA'. Der Proportionalitätsfaktor ist $\frac{\overline{SB}}{\overline{SB'}}$.

Sollen mehrere Paare von x und y-Werten berechnet werden, ist es zweckmäßig, die Verhältnisgleichung $\frac{y}{x} = k$ mit x zu multiplizieren:

$$y = k \cdot x.$$

Man berechnet zunächst nur einmal den Quotienten k und dann für die verschiedenen x-Werte das Produkt. Eine typische Aufgabe ist folgende:

2 kg Orangen kosten 5 Euro. Wieviel kosten x kg?

Hier ist $k = \frac{5}{2} = 2{,}5$. Damit lässt sich bequem die folgende Tabelle berechnen:

Gewicht x in kg	1	2	3	4	5	...
Preis y in Euro	$2{,}5$	5	$7{,}5$	10	$12{,}5$	...

Gesucht ist der y-Wert für verschiedene x-Werte, z.B. $x = 4$. Der zughörige y-Wert kann leicht aus der Tabelle abgelesen werden.

Im folgenden Beispiel werden die zwei gängigsten Methoden aufgeführt, mit denen man derartige Aufgaben lösen kann.

Ein Behälter, der $600\,\ell$ Wasser aufnehmen kann, wird bei geöffnetem Hahn in 12 min gefüllt. Wieviel Wasser war nach 9 min in dem Behälter?

Die Füllmenge an Wasser (Größe y in Litern) ist offensichtlich proportional zur Zeit (Größe x in Minuten), in der der Hahn geöffnet ist.

1. Methode: Dreisatz

1. Satz: In 12 min fließen $600\,\ell$ Wasser.
2. Satz: In 1 min fließen $\frac{600\,\ell}{12} = 50\,\ell$ Wasser.
3. Satz: In 9 min fließen $50\,\ell \cdot 9 = 450\,\ell$ Wasser.

Dies wird meistens kürzer schematisch dargestellt (das Zeichen $\mathrel{\widehat{=}}$ bedeutet „entspricht"):

$$\begin{aligned} 12\,\mathrm{min} &\mathrel{\widehat{=}} 600\,\ell, \\ 1\,\mathrm{min} &\mathrel{\widehat{=}} \tfrac{600\,\ell}{12} = 50\,\ell, \\ 9\,\mathrm{min} &\mathrel{\widehat{=}} 50\,\ell \cdot 9 = 450\,\ell. \end{aligned}$$

In dem Behälter sind also nach 9 min $450\,\ell$ Wasser.

2. Methode: Verhältnisgleichung

Mit der Verhältnisgleichung in der Form $y = k \cdot x$ und $k = \frac{600}{12}$ erhalten wir für $x = 9$

$$y = \frac{600}{12} \cdot 9 = 600 \cdot \frac{9}{12} = 600 \cdot \frac{3}{4} = 150 \cdot 3 = 450.$$

In dem Behälter sind also nach 9 min $450\,\ell$ Wasser.

8.2 Umgekehrte Proportionalität

Eine weitere einfache Abhängigkeit variabler Größen ist die *umgekehrte Proportionalität* (oder *Antiproportionalität*).
Im Gegensatz zur Proportionalität ist bei der *umgekehrten Proportionalität* eine Größe proportional zum Kehrwert der anderen Größe. Statt des Verhältnisses $\frac{y}{x}$ ist hierbei das Produkt $y \cdot x$ konstant, d.h.

$$y \cdot x = k$$

für alle zulässigen Werte von x und y.

Wenn eine variable Größe y proportional zum Kehrwert einer Größe x ist, wenn also

$$y = k \cdot \frac{1}{x} \quad \text{(oder gleichbedeutend } y \cdot x = k, \text{ Produktform)}$$

für eine feste Zahl $k \neq 0$ und für alle zulässigen Werte von x und y gilt, so nennt man y *umgekehrt proportional* (oder *antiproportional*) zu x.

Anschaulich gesprochen sind zwei Größen x und y umgekehrt proportional, wenn eine Verdopplung (Verdreifachung, Halbierung,...) der Größe x stets zu einer Halbierung (Drittelung, Verdopplung,...) der Größe y führt.

Wenn y umgekehrt proportional zu x ist, ist natürlich auch x umgekehrt proportional zu y.

Ein typisches Beispiel für umgekehrt proportionale Größen sind *Geschwindigkeit* und *Fahrzeit* (wenn die Geschwindigkeit verdoppelt wird, halbiert sich die Fahrzeit).

> Mehrere Personen fahren eine Strecke von 60 km.
> Der Autofahrer fährt mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h und braucht daher für die Strecke 1 Stunde.
> Der Fahrradfahrer fährt mit einer Geschwindigkeit von 20 km/h und braucht daher für die Strecke 3 Stunden.
> Der Mopedfahrer fährt mit einer Geschwindigkeit von 40 km/h und braucht daher für die Strecke $1{,}5$ Stunden.
>
> Allgemein benötigt ein Fahrzeug, das mit der Geschwindigkeit x km/h fährt, für diese Strecke $y = \frac{60}{x} = 60 \cdot \frac{1}{x}$ Stunden, da das Produkt aus Geschwindigkeit (Größe x) und benötigter Zeit (Größe y) stets die gefahrene Strecke ergibt, welche in diesem Beispiel konstant 60 km sind. Die benötigte Zeit y ist also umgekehrt proportional zur Geschwindigkeit x.

Analog zu den Aufgaben zur Proportionalität, gibt es für Aufgaben zur umgekehrten Proportionalität zwei typische Methoden; in der ersten spielt der *Dreisatz* die zentrale Rolle, in der zweiten die *Produktform*.

> *Um ein Rasengrundstück von 4250 qm zu mähen, brauchen zwei Rasenmäher 6 Stunden. Wie lange dauert es, wenn statt zwei Rasenmähern drei eingesetzt werden?*
>
> Offensichtlich ist die Zeit (Größe y in Stunden) umgekehrt proportional zur Anzahl der Rasenmäher (Größe x), da eine Verdoppelung der Rasenmäher zu einer Halbierung der Zeit führt.

1. Methode: Dreisatz

1. Satz: Mit 2 Rasenmähern benötigt man 6 Stunden.

2. Satz: Mit 1 Rasenmäher benötigt man $6 \cdot 2 = 12$ Stunden.

3. Satz: Mit 3 Rasenmähern benötigt man $12 : 3 = 4$ Stunden.

Dies wird meistens kürzer schematisch dargestellt (das Zeichen $\hat{=}$ bedeutet „entspricht"):

$$\begin{aligned} 2 \quad &\hat{=} \quad 6\,\mathrm{h}, \\ 1 \quad &\hat{=} \quad 6\,\mathrm{h} \cdot 2 = 12\,\mathrm{h}, \\ 3 \quad &\hat{=} \quad \tfrac{12\,\mathrm{h}}{3} = 4\,\mathrm{h}. \end{aligned}$$

Mit 3 Rasenmähern werden 4 Stunden benötigt.

Zu beachten ist, dass im Vergleich zur linken Seite auf der rechten Seite immer die *umgekehrte* Operation (Multiplikation statt Division bzw. Division statt Multiplikation) durchgeführt wird, da die beiden Größen *umgekehrt* proportional sind.

2. Methode: Produktform

Wenn die Zahl der Rasenmäher um den Faktor f geändert wird (z.B. verdoppelt für $f = 2$ oder verdreifacht für $f = 3$), ändert sich die benötigte Zeit um den Kehrwert des Faktors, also um $\frac{1}{f}$ (z.B. halbiert für $f = 2$ oder gedrittelt für $f = 3$). Werden nun 3 statt 2 Rasenmäher verwendet, wird die Anzahl also um den Faktor $f = \frac{3}{2}$ erhöht, und somit die benötigte Zeit auf das $\frac{2}{3}$-fache verringert:

$$y = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$$

d.h. mit 3 Rasenmähern werden 4 Stunden benötigt.

Die Gleichung $y = 6 \cdot \frac{2}{3}$ ist eine unmittelbare Folge der Produktform . Das konstante Produkt beider Größen ist hier

$$k = y \cdot x = 6 \cdot 2 = 12 = 4 \cdot 3.$$

ÜBUNG 1

Ist die Größe X direkt proportional zu Y ? Bestimmen Sie ggf. die Proportionalitätskonstante.

X	4	8	12	16
Y	6	12	18	24

Lösung

Es gilt

$$4 = \frac{2}{3} \cdot 6\,, \quad 8 = \frac{2}{3} \cdot 12\,, \quad 12 = \frac{2}{3} \cdot 18\,, \quad 16 = \frac{2}{3} \cdot 24\,.$$

Die Größe X ist also immer das Produkt aus dem konstanten Faktor $\frac{2}{3}$ und der Größe Y. Die Größe X ist daher direkt proportional zu Y und der Proportionalitätsfaktor ist $\frac{2}{3}$.

ÜBUNG 2

Ein Pkw verbraucht auf $100\,\mathrm{km}$ $9{,}6$ Liter Benzin. Mit einer Tankfüllung kommt er $540\,\mathrm{km}$ weit. Wie viele Liter Benzin fasst der Tank? Das Ergebnis ist auf ganze Liter zu runden.

Antwort

52 Liter Benzin

Lösung

Der Zusammenhang zwischen der zurückgelegten Strecke und dem Benzinverbrauch ist proportional und es gelten die folgenden Entsprechungen: (Das Zeichen $\triangleq$ bedeutet: entspricht.)

$$\begin{aligned} 100\,\mathrm{km} &\triangleq 9{,}6\,\ell \\ 1\,\mathrm{km} &\triangleq \tfrac{9{,}6}{100}\,\ell \\ 540\,\mathrm{km} &\triangleq 540 \cdot \tfrac{9{,}6}{100}\,\ell. \end{aligned}$$

Um $540\,\mathrm{km}$ weit fahren zu können, benötigt man also

$$\frac{540 \cdot 9{,}6}{100} = 51{,}84 \approx 52$$

Liter Benzin.

Der Tank fasst also etwa 52 Liter.

ÜBUNG 3

Drei Pflasterer benötigen für eine Hofeinfahrt $11{,}5$ Stunden. Wie lange brauchen 5 Pflasterer?

Antwort

$6{,}9$ Stunden

Lösung

Der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Pflasterer und der Arbeitsdauer ist umgekehrt proportional. Daher gelten die folgenden Entsprechungen:

$$\begin{aligned} {\color{red}3}\ \text{Pflasterer} \quad &\triangleq \quad {\color{red}11{,}5}\,\text{h} \\ 1\ \text{Pflasterer} \quad &\triangleq \quad 11{,}5 \cdot 3 = 34{,}5\,\text{h} \\ {\color{blue}5}\ \text{Pflasterer} \quad &\triangleq \quad 34{,}5 : 5 = 6{,}9\,\text{h}\,, \end{aligned}$$

5 Pflasterer benötigen also $6{,}9$ Stunden für die Hofeinfahrt.

Die Grenzen der Modellierung mit Proportionalität oder umgekehrter Proportionalität werden z.B. daran deutlich, dass nach dieser Rechnung 1000 Pflasterer nur etwa 2 Minuten benötigten!

ÜBUNG 4

Für ein Rasengrundstück von 4250 qm brauchen zwei Rasenmäher 6 Stunden. Wie lange brauchen 3 Rasenmäher für die doppelte Rasenfläche?

Antwort

8 Stunden

Lösung

Die benötigte Zeit y (in Stunden gemessen) ist bei fester Anzahl von Rasenmähern x offenbar proportional zur Grundstücksfläche z (in qm gemessen).

Für die doppelte Rasenfläche (8500 qm) brauchen zwei Rasenmäher also die doppelte Zeit, d.h.

$$2 \cdot 6 = 12$$

Stunden.

Bei gleichbleibender Rasenfläche ist die benötigte Zeit y umgekehrt proportional zur Anzahl der Rasenmäher x. Mit dem Dreisatz erhält man daher für die Fläche von 8500 qm:

$$\begin{aligned} 2 \text{ Rasenmäher} \quad &\triangleq \quad 12\,\text{h} \\ 1 \text{ Rasenmäher} \quad &\triangleq \quad 12 \cdot 2 = 24\,\text{h} \\ 3 \text{ Rasenmäher} \quad &\triangleq \quad 24 : 3 = 8\,\text{h}\,. \end{aligned}$$

Drei Rasenmäher brauchen also für die doppelte Rasenfläche 8 Stunden.

9. PROZENTRECHNUNG UND ZINSRECHNUNG

Inhalt

9.1 Prozentrechnung
9.2 Zinsrechnung

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie sind sicher im Umgang mit den Begriffen Prozentsatz und Grundwert.
- Sie können die Prozentrechnung in Alltagsproblemen anwenden.
- Sie beherrschen die Zins- und Zinseszinsrechnung.

9.1 Prozentrechnung

Der Begriff „Prozent” kommt aus dem Lateinischen und bedeutet wörtlich übersetzt „von” (=pro) „Hundert” (=centum) und wird mit dem Zeichen % abgekürzt.

Trifft ein Fußballspieler das Tor in 65 von 100 Schüssen, so ist seine Trefferquote 65% oder 65 Hundertstel.

Die folgenden Beispiele repräsentieren drei wesentliche Typen von Aufgaben in der Prozentrechnung und erklären am Beispiel die Begriffe **Prozentsatz** und **Grundwert**:

1. Typ: Wieviel ist 5% von 120 €?

Lösung: 5% von 120€ sind $\frac{5}{100} \cdot 120\,€ = 6$ €.

5% ist der *Prozentsatz* und 120 € der *Grundwert*.

2. Typ: Wieviel Prozent von 120 € ist 6 €?

Ausführliche Lösung (mit Dreisatz):
120 € sind 100% des Grundwertes.
$1{,}2$ € sind 1% des Grundwertes.
6 € sind $\frac{6€}{1{,}2€}\% = \frac{60€}{12€}\% = 5\%$ des Grundwertes;

oder kürzer (die ersten beiden Schritte können leicht im Kopf gemacht werden):
$\frac{6}{1{,}20}\% = \frac{60}{12}\% = 5\%$.

3. Typ: 150% des Grundwertes ist 180 €. Wieviel Euro ist der Grundwert?

Bevor Sie die untenstehende Lösung studieren, machen Sie sich klar, daß 100% des Grundwertes der Grundwert selbst ist; denn Hundert Hundertstel ist Eins.

Ausführliche Lösung (mit Dreisatz):
150%(Prozentsatz) des Grundwertes sind 180 €,
1% des Grundwertes sind $\frac{180\text{ €}}{150} = 1{,}20$ €,
100% des Grundwertes - d.h. der Grundwert selbst - sind 120 € ;

oder kürzer (die ersten beiden Schritte werden wieder im Kopf gemacht.):
$\frac{180\text{ €}}{150} \cdot 100 = 1{,}2€ \cdot 100 = 120$ € .

1. Beispiel

25% von 60 € sind $\frac{25}{100} \cdot 60\,€ = 15\,€$.

2. Beispiel

48% von $600\,\ell$ sind $\frac{48}{100} \cdot 600\,\ell = 288\,\ell$.

3. Beispiel

80% von $420\,\mathrm{m}^2$ sind $\frac{80}{100} \cdot 420\,\mathrm{m}^2 = 336\,\mathrm{m}^2$.

1. Beispiel

Wieviel % von $420\,\mathrm{m}^2$ sind $336\,\mathrm{m}^2$?

Ausführliche Lösung:

- $420\,\mathrm{m}^2$ ist 100% von $420\,\mathrm{m}^2$,
- $4{,}20\,\mathrm{m}^2$ ist 1% von $420\,\mathrm{m}^2$,
- $336\,\mathrm{m}^2$ ist $\frac{336\,\mathrm{m}^2}{4{,}20\,\mathrm{m}^2}\% = 80\%$ von $420\,\mathrm{m}^2$;

oder kürzer:
$\frac{336}{4{,}20}\% = 80\%$.

2. Beispiel

Wieviel % von $600\,\ell$ sind $288\,\ell$?

Ausführliche Lösung:

- $600\,\ell$ ist 100% von $600\,\ell$,
- $6\,\ell$ ist 1% von $600\,\ell$,
- $288\,\ell$ ist $\frac{288\ell}{6\ell}\% = 48\%$ von $600\,\ell$;

oder kürzer:
$\frac{288}{6}\% = 48\%$.

3. Beispiel

Wieviel % von 60 ist 15?

Kurze Lösung:
$\frac{15}{0{,}6}\% = \frac{150}{6}\% = 25\%$.

1. Beispiel

120% des Grundwertes ist 72. Was ist der Grundwert?

Ausführliche Lösung:

- 120% des Grundwertes ist 72,
- 10% des Grundwertes ist 6,
- 100% des Grundwertes - d.h. der Grundwert selbst - ist 60 ;

oder kürzer:
$\frac{72}{120} \cdot 100 = 0{,}6 \cdot 100 = 60.$

2. Beispiel

110% des Grundwertes sind $330\,\ell$. Was ist der Grundwert?

Ausführliche Lösung:

- 110% des Grundwertes ist $330\,\ell$,
- 10% des Grundwertes ist $30\,\ell$,
- 100% des Grundwertes ist $300\,\ell$;

oder kürzer:
$\frac{330\,\ell}{110} \cdot 100 = 3\,\ell \cdot 100 = 300\,\ell$.

3. Beispiel

140% des Grundwertes sind $420\,\mathrm{m}^2$. Was ist der Grundwert?

Kurze Lösung:
$\frac{420\,\mathrm{m}^2}{140} \cdot 100 = 3\,\mathrm{m}^2 \cdot 100 = 300\,\mathrm{m}^2.$

Ein Kaufmann verkauft einen Teil seiner Ware für $1\,320\,€$*. Wie hoch war der Einkaufspreis, wenn er die Ware mit* 20% *Aufschlag (bezogen auf den Einkaufspreis) verkauft?*

Wenn er die Ware mit 20% Aufschlag verkauft entspricht der Verkaufspreis einem Prozentsatz von 120% des Einkaufspreises. Der Einkaufspreis G (Grundwert) ist dann:

$$G = \frac{100}{120} \cdot 1\,320€ = 1\,100\,€.$$

Sie investieren $3\,000\,€$ *an der Börse und verlieren bei einem riskanten Spekulationsgeschäft auf einen Schlag 56% ihres Geldes. Glücklicherweise erholen sich Ihre Aktien aber wieder und legen in den nächsten zwei Wochen um 75% zu, bevor Sie sie dann verkaufen. Hat sich die Investition gelohnt?*

Zunächst einmal bestimmt man den Wert der Aktien nach dem Einbruch. Da der Aktienwert um 56% fällt, bleiben 44% der $3\,000\,€$ als Rest erhalten:

$$\text{Restwert} = \frac{44}{100} \cdot 3\,000\,€ = 1\,320\,€.$$

Dieser Rest legt in den nächsten Tagen um 75% zu und wächst somit auf 175% der noch vorhandenen $1\,320\,€$ an. Folglich steigt der Wert der Aktien bis zum Verkauf auf einen Gesamtwert von

$$\text{Verkaufswert} = \frac{175}{100} \cdot 1\,320\,€ = \frac{7}{4} \cdot 1\,320\,€ = 2\,310\,€.$$

Offensichtlich hat sich Ihre Investition nicht gelohnt, da Sie einen Verlust von $3\,000\,€ - 2\,310\,€ = 690\,€$ haben.

Ein Kreissektor füllt 30% der Fläche einer Kreisscheibe aus. Welchem Mittelpunktswinkel (Zentriwinkel) entspricht das?

Lösung:
Die Fläche eines Kreissektors ist proportional zum Mittelpunktswinkel α:

$$\text{Fläche des Kreissektors} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \text{Fläche der Kreisscheibe}$$

Jetzt suchen wir den Winkel α so, dass der zughörige Kreissektor 30% der Fläche der Kreisscheibe ist. Dies ergibt die folgende Gleichung für α:

$$\begin{aligned} \tfrac{\alpha}{360^\circ} \cdot \text{Fläche der Kreisscheibe} &= \tfrac{30}{100} \cdot \text{Fläche der Kreisscheibe}, \\ \alpha = 360^\circ \cdot \tfrac{30}{100} &= 108^\circ. \end{aligned}$$

9.2 Zinsrechnung

Zins ist Geld, das ein Schuldner einem Gläubiger für ein vorübergehend überlassenes Kapital zahlt. Wieviel Geld zu zahlen ist, wird meistens durch den sogenannten Zinssatz in Prozenten angegeben. Der Zins ist in diesen Fällen proportional zum Kapital.

Leihen Sie sich beispielsweise von der Bank $5\,000$€ zu einem Zinsatz $p = 3\%$ aus, dann müssen Sie dafür 150 € Zins zahlen.

Leihen Sie sich Geld von einer Bank über längere Zeit aus, dann ist der Zins meistens einmal pro Jahr zu zahlen. Die Bank verlangt beispielsweise 4% Zins pro Jahr (wird oft mit *p.a.* abgekürzt; *p.a.* bedeutet per annum=pro Jahr). (Bei Kreditkarten werden die Zinsen oft täglich berechnet.)

> *Frau Markoni nimmt bei ihrer Bank einen Kredit über $20\,000$ € auf und muss der Bank dafür $2{,}4\,\%$ pro Jahr Zins zahlen. Wieviel Zins zahlt sie am Ende des Jahres?*
>
> Lösung: Frau Markoni zahlt am Ende des Jahres den
>
> $$\text{Zins} = \frac{2{,}4}{100} \cdot 20\,000\,€ = 480\,€.$$

> *Sie zahlen zu Beginn des Jahres 2020 den Betrag von $32\,000$ € auf ihr Sparkonto ein. Das Guthaben wird mit einem Zinssatz von 5% pro Jahr verzinst und die Zinsen am Ende jeden Jahres dem Guthaben zugeschlagen.*
>
> Wie groß ist ihr Guthaben am Ende des Jahres 2024?
>
> Um das Guthaben am Ende des Jahres 2024 zu berechnen gehen wir schrittweise vor (Beträge in Euro und Cent). Das Guthaben beträgt am Ende der Jahre eins bis fünf:
>
> $$\begin{array}{lrcl} \text{1. Jahr} & 32\,000{,}00 + \frac{5}{100} \cdot 32\,000{,}00 = 32\,000{,}00 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right) & = & 33\,600{,}00 \\ \text{2. Jahr} & 33\,600{,}00 + \frac{5}{100} \cdot 33\,600{,}00 = 32\,000{,}00 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 & = & 35\,280{,}00 \\ \text{3. Jahr} & 35\,280{,}00 + \frac{5}{100} \cdot 35\,280{,}00 = 32\,000{,}00 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^3 & = & 37\,044{,}00 \\ \text{4. Jahr} & 37\,044{,}00 + \frac{5}{100} \cdot 37\,044{,}00 = 32\,000{,}00 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^4 & = & 38\,896{,}20 \\ \text{5. Jahr} & 38\,896{,}20 + \frac{5}{100} \cdot 38\,896{,}20 = 32\,000{,}00 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5 & = & 40\,841{,}01 \end{array}$$

Wie das Beispiel zeigt, gilt für mehrjährige Anlagen die „Zinseszinsformel". Der Name beschreibt, dass ab dem zweiten Jahr auch die Zinsen der Vorjahre verzinst werden.

Wird ein Anfangskapital K_0 pro Jahr mit $p\,\%$ verzinst, so wächst das Kapital nach n Jahren auf einen Betrag von

$$K_n = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

an.
In dem obigen Beispiel ist $K_0 = 32\,000{,}00\,€,\ p = 5$ und $n = 1,\ldots,5$.

Zu Beginn eines Jahres werden auf ein Sparbuch $5\,000$ € einbezahlt. Das Guthaben wird mit einem Zinssatz von 4% pro Jahr verzinst und am Ende jeden Jahres dem Guthaben zugeschlagen.

a) Schätzen Sie, welcher der folgenden Werte dem Guthaben am Ende des 4. Jahres am nächsten kommt.

$$5\,000€, \quad 5\,160€, \quad 5740€, \quad 5\,860€, \quad 6\,250€.$$

Begründen Sie Ihre Wahl, ohne das Ergebnis genau zu berechnen.

b) Berechnen Sie das Ergebnis am Ende des zweiten und vierten Jahres genau in Euro und Cent (gerundet).

Lösung a)

Die Zinsen auf die Einlage von $5\,000$€ sind am Ende des 1. Jahres 200€, am Ende des 2. Jahres 400 €, am Ende des 3. Jahres 600€ und am Ende des 4. Jahres 800€. Insgesamt sind dies 800€ an Zinsen. Zusammen mit den eingezahlten $5\,000$€ ergibt dies $5\,800$€. Das tatsächliche Guthaben am Ende des 4. Jahres ist größer als dieser Betrag, da wir bei der Berechnung der Zinsen in einem Jahr den Zuwachs durch die Zinsen der vorangegangenen Jahre nicht berücksichtigt haben. Allerdings ist der Fehler gering, weil die Zinsbeträge deutlich kleiner sind als das eingezahlte Kapital. Somit ist die beste Schätzung $5\,860$€.

Lösung b)

Das Guthaben am Ende des 2. und 4. Jahres wird mit der Zinseszinsformel berechnet (Beträge in Euro und Cent, auf ganze Cent gerundet).

$$\begin{array}{lll} \text{Ende 2. Jahr} & 5\,000{,}00 \cdot \left(1+\frac{4}{100}\right)^2 & = & 5\,408{,}00€ \\ \text{Ende 4. Jahr} & 5\,000{,}00 \cdot \left(1+\frac{4}{100}\right)^4 & = & 5\,849{,}2928 \approx 5\,849{,}29€ \end{array}$$

Bemerkung: Wenn am Ende jeden Jahres die Zinsen vom Konto abgehoben werden, ist der Ertrag in vier Jahren nur 800€ anstelle der fast 850€ bei der Anlage mit Zinseszins.

Eine andere typische Aufgabe fragt nach der nötigen Einlage am Anfang, wenn bei gegebener Verzinsung und Dauer ein festes Sparziel erreicht werden soll. Oder bei gegebener Wertsteigerung und Dauer einer Anlage wird nach dem Zinssatz gefragt, der zu dieser Wertsteigerung führt. Dafür muss die Zinseszinsformel nach dem Anfangskapital K_0 bzw. nach dem Zinssatz p aufgelöst werden.

Einlage für Sparziel gesucht

Herr Meier möchte den nötigen Betrag zurücklegen, um in fünf Jahren für die Sanierung des Daches seines Hauses einen Betrag in Höhe von $10\,000$ € zur Verfügung zu haben. Eine Bausparkasse sagt ihm für diese Zeit einen festen Zins von 3% zu.
Welche Summe muss er jetzt einzahlen, um sein Sparziel zu errichen?

Nach der Zinseszinsformel gilt (in Euro)

$$K_5 = 10\,000 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^5 = K_0 \cdot 1{,}159274074$$

$$K_0 = \frac{10\,000\,€}{1{,}159274074} \approx 8\,626{,}09\,€$$

Wenn Herr Meier jetzt $8\,626$€ so anlegt, hat er in fünf Jahren den gewünschten Betrag zur Verfügung.

Zinssatz zu Wertsteigerung gesucht

Ein Finanzberater bietet Frau Schulze eine Anlage von $8\,000$€ an, bei der nach vier Jahren der Wert um $1\,150$€ steigt. Er gibt an, dass das einer besseren Verzinzung als $3{,}5\%$ *p.a.* entspricht. Stimmt die Behauptung?

$$K_4 = 8\,000 + 1\,150 = 9\,150 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^4 = 8\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^4$$

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^4 = \frac{9\,150}{8\,000} \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 + \frac{p}{100}\right) = \sqrt[4]{\frac{9\,150}{8\,000}} \approx 1{,}034148$$

$$p \approx 100 \cdot (1{,}034148 - 1) \approx 3{,}41$$

Die Anlage hat mit rund $3{,}41\%$ einen geringeren Ertrag als versprochen.

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Berechnen Sie folgende Ausdrücke, ohne einen Taschenrechner zu verwenden:

a) 2% von 20 b) 25% von 990 c) 200% von 15

Antwort

a) $0{,}4$ b) $247{,}5$ c) 30

Lösung a)

$$2\,\%\text{ von }20=\frac{2}{100}\cdot 20=\frac{2\cdot 20}{100}=\frac{4}{10}=0{,}4\,.$$

Lösung b)

$$25\,\%\text{ von }990=\frac{25}{100}\cdot 990=\frac{25\cdot 990}{100}=\frac{990}{4}=247{,}5\,.$$

Lösung c)

$$200\,\%\text{ von }15=\frac{200}{100}\cdot 15=\frac{200\cdot 15}{100}=\frac{2\cdot 15}{1}=30\,.$$

ÜBUNG 2

Ein Kapital von $4000\,€$ wird bei einer Verzinsung von 10% pro Jahr für 3 Jahre angelegt. Wie hoch sind die Zinsen (inklusive Zinseszins)?

Antwort

Die Zinsen nach 3 Jahren betragen $1324\,€$.

Lösung

Die allgemeine Zinseszinsformel lautet

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n, \quad K_n = \text{Kapital nach } n \text{ Jahren}, \quad K_0 = \text{Startkapital}\,.$$

Nach 3 Jahren ergibt sich also, bei einem Startkapital von $4000\,€$ und einem Zinssatz von 10%, ein Kapital von

$$\begin{aligned} K_3 &= 4000 \cdot \left(1 + \tfrac{10}{100}\right)^3 \\ &= 4000 \cdot \left(\tfrac{110}{100}\right)^3 \\ &= 4000 \cdot \left(\tfrac{11}{10}\right)^3 \\ &= 4000 \cdot \tfrac{11^3}{10^3} \\ &= 4000 \cdot \tfrac{1331}{1000} \\ &= \tfrac{4 \cdot 1000 \cdot 1331}{1000} = \tfrac{4 \cdot 1331}{1} = 5324 \quad (€)\,. \end{aligned}$$

Um die reinen Zinsen zu erhalten, muss man nun das ursprüngliche Kapital wieder abziehen:

$$Z = K_3 - K_0 = 5324 - 4000 = 1324 \quad (€)\,.$$

Die Zinsen nach 3 Jahren betragen also $1324\,€$.

ÜBUNG 3

Karl leiht sich $128\,€$ zu einem jährlichen Zinssatz von 50%. Wieviel Geld muss Karl nach 6 Jahren zurückzahlen?

Antwort

Nach 6 Jahren muss Karl $1458\,€$ zurückzahlen.

Lösung

Wir verwenden die allgemeine Zinseszinsformel

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n, \quad K_n = \text{Kapital nach } n \text{ Jahren}, \quad K_0 = \text{Startkapital}\,.$$

Nach 6 Jahren ergibt sich also, bei einem Kapital von $128\,€$ und einem Zinssatz von 50%, ein Kapital von

$$\begin{aligned} K_6 &= 128 \cdot \left(1 + \tfrac{50}{100}\right)^6 \\ &= 128 \cdot \left(\tfrac{150}{100}\right)^6 \\ &= 128 \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^6 \\ &= 128 \cdot \tfrac{3^6}{2^6} \\ &= 128 \cdot \tfrac{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2} \\ &= \tfrac{128\cdot729}{64} = 2 \cdot 729 = 1458 \quad (€)\,. \end{aligned}$$

ÜBUNG 4

Welches Kapital legte Sylvia vor einem Jahr zu einem Zinssatz von $4{,}5\%$ an, wenn sie nach Ablauf dieser Zeit $22{,}50$ € Zinsen erhält?

Antwort

500 €

Lösung

Wir lösen die allgemeine Formel für die Zinsen nach einem Jahr,

$$Z = K \cdot \frac{p}{100}, \quad Z = \text{Zinsen}, \quad K = \text{Kapital}, \quad p = \text{Zinssatz}\,,$$

nach dem Startkapital K auf:

$$Z = K \cdot \frac{p}{100} \;\Leftrightarrow\; K = Z \div \frac{p}{100} \;\Leftrightarrow\; K = Z \cdot \frac{100}{p}.$$

Wir setzen die bekannten Werte Z und p ein um zu berechnen, dass Sylvia vor einem Jahr ein Kapital in Höhe von

$$K = 22{,}5 \cdot \frac{100}{4{,}5} = 500\ (€)$$

anlegte.