1. GERADEN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele:

- Sie sind mit dem *zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem* vertraut.
- Sie besitzen die Fähigkeit, eine analytisch gegebene *Gerade* zu zeichnen.

1.1 Geradengleichung

Ein *zweidimensionales kartesisches Koordinatensystem* besteht aus zwei Richtungsachsen, die senkrecht aufeinander stehen. Man bezeichnet die waagerechte Achse als *Abszissenachse*. Die senkrechte Achse heißt *Ordinatenachse*. Man spricht dann auch von der x-*Achse* statt Abszissenachse und der y-*Achse* statt Ordinatenachse.

Die Variablen x und y werden im Folgenden zur Bezeichnung der *Koordinaten* verwendet, indem jedem Punkt P zwei reelle Zahlen x und y als *Koordinaten* zugeordnet werden. Man schreibt ihn als *Zeilenvektor* $P = (x; y) \in \mathbb{R}^2$. Die x- bzw. y-Koordinate eines Punktes wird als *Abszisse* bzw. *Ordinate* bezeichnet. Jede *Gerade* wird eindeutig durch eine *Geradengleichung* beschrieben. Die Gerade besteht aus all den Punkten, deren x- und y-Koordinaten die Geradengleichung erfüllen.

[video-online-only]

Jede *Gerade* g, die nicht parallel zur y-Achse (also nicht senkrecht) ist, ist der Graph einer linearen Funktion auf $\mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = mx + b$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei m und b reelle Zahlen sind. Jede Wahl von m und b charakterisiert also genau eine Gerade. Die *Gerade* g besteht somit aus allen Punkten $(x; y)$, die die *Geradengleichung* $y = f(x) = mx + b$ erfüllen, d.h.

$$g = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = mx + b\right\}.$$

Statt dieser Mengenschreibweise ist es auch gebräuchlich,

$$g : y = mx + b,\ x \in \mathbb{R}$$

zu schreiben (ähnlich wie in Regel 5.1 in Kapitel X Abschnitt 5). Ist umgekehrt der Graph einer Funktion eine nicht senkrechte Gerade, so ist diese Funktion linear.

"Lineare Funktionen" im Sinne der obigen Definition 1 sind nicht "linear" im Sinne der Hochschulmathematik. Dort bezeichnet man Funktionen der Form $y = mx + b$ als "affin" und nur dann als "linear", falls $b = 0$ ist.

[online-only]

Mit der Zahl m bezeichnen wir die *Steigung der Geraden* und mit b den *Ordinatenabschnitt*, d.h. die Gerade schneidet die y-Achse im Punkt $(0; b)$. Diese Darstellung bezeichnet man auch als *Steigungsform*. Ist $b = 0$, so verläuft die Gerade durch den *Ursprung*, $(0; 0)$, des Koordinatensystems. Dann ist die zu der Geradengleichung $y = mx$ gehörende Funktion eine *Proportionalität*, d.h.

$$f(x) = mx \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Geraden, die parallel zur y-Achse verlaufen, sind nicht Graph einer Funktion, die von x abhängt. Sie lassen sich durch eine Gleichung der Form

$$x = a$$

darstellen, wobei a eine reelle Zahl ist. Eine Gerade g mit der Gleichung $x = a$ schneidet die x-Achse im Punkt $(a;0)$, d.h.

$$g = \{(a;y) \mid y \in \mathbb{R}\} \; .$$

1.2 Zweipunktform

Sind $P_1 = (x_1; y_1)$ und $P_2 = (x_2; y_2)$ zwei beliebige Koordinatenpunkte mit $x_1 \neq x_2$, so gibt es genau eine Gerade g, die durch P_1 und P_2 verläuft. Ihre Steigung m kann folgendermaßen errechnet werden:

$$m = \tfrac{\Delta y}{\Delta x} = \tfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \; .$$

Aus der Geradengleichung $y = mx + b$ erhalten wir

$$b = y - mx \; ,$$

für jeden Punkt $(x;y)$, der auf der Geraden liegt. Setzen wir zum Beispiel P_1 ein, so erhalten wir

$$b = y_1 - mx_1 = y_1 - \tfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 \; .$$

Setzt man die gerade berechneten Werte für m und b in die Gleichung $y = mx + b$ ein, dann erhält man die sogenannte Zweipunktform der Geradengleichung, nämlich

$$y = \tfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \;\text{ für alle } x \in \mathbb{R} \; .$$

Diese kann man sich besonders einfach in der Form

$$\tfrac{y - y_1}{x - x_1} = \tfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \;\text{ für } x \neq x_1$$

merken.

Diese Formeln erlauben, zwischen der Zweipunktform und der Steigungsform einer Geraden hin- und herzuwechseln, nämlich

$$P_1 = (x_1; y_1)\,,\, P_2 = (x_2; y_2)\,,\, x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,,\; b = y_1 - m x_1\,,$$

und für beliebige $x_1 \neq x_2$

$$m, b \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad P_1 = (x_1; y_1)\,,\; P_2 = (x_2; y_2)\,,\; \text{mit}\; y_1 = m x_1 + b\,,\; y_2 = m x_2 + b\,.$$

[online-only]

1.3 Punkt-Steigungs-Form

Eine Gerade durch den Punkt $P = (x_p; y_p)$ mit der Steigung m erfüllt

$$y - y_p = m(x - x_p)\,.$$

Diese Formel kann man nutzen, wenn ein Punkt der Geraden und die Steigung der Geraden bekannt sind.

Auflösen von $y - y_p = m\,(x - x_p)$ nach y ergibt die Geradengleichung

$$y = m\,(x - x_p) + y_p = m\,x + (y_p - m\,x_p)\,.$$

Der Ordinatenabschnitt ist somit

$$b = y_p - m\,x_p\,.$$

[online-only]

1.4 Punkt-Richtungs-Form

Eine weitere Möglichkeit, Geraden zu beschreiben, liefert die *Punkt-Richtungs-Form*:

Zwei reelle Funktionen x und y, definiert durch

$$\begin{aligned} x(t) :=& \quad t\, m_x + b_x \,, \\ y(t) :=& \quad t\, m_y + b_y \,, \end{aligned}$$

mit $m_x, m_y, b_x, b_y \in \mathbb{R}$, definieren eine Gerade g durch

$$g = \left\{ (x(t); y(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R} \right\} .$$

Hierbei werden die Koordinaten x und y durch den Parameter t ausgedrückt, der alle Werte mit $t \in \mathbb{R}$ annehmen kann.
Wir verweisen an dieser Stelle auf Kapitel X Abschnitt 5, dort wird die Punkt-Richtungsform näher erläutert.

1.5 Allgemeine Form

Die Geradengleichung aus Definition 1 und Bemerkung 1 kann man einheitlich in der folgenden Form schreiben:

Die allgemeine Form der Geradengleichung in der Ebene lautet

$$px + qy + c = 0$$

wobei $p \neq 0$ oder $q \neq 0$ (oder p und q sind nicht beide Null).

Für $q \neq 0$ erhält man durch Auflösen der obigen Gleichung nach y die Steigungsform

$$y = -\tfrac{p}{q} x - \tfrac{c}{q}$$

mit der Steigung $m = -\frac{p}{q}$ und dem Ordinatenabschnitt $b = -\frac{c}{q}$.
Falls $q = 0$ ist, verläuft die Gerade parallel zur y-Achse, d.h $x = -\frac{c}{p}$ (für $p \neq 0$).

[online-only]

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

[online-only]

2. KOORDINATENBEREICHE

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele:

- Sie besitzen die Fähigkeit, durch Kurven begrenzte *Koordinatenbereiche* zu zeichnen.

2.1 Koordinatenbereiche

Im vorherigen Abschnitt Geraden haben Sie unter anderem die **allgemeine Form** von Geraden kennengelernt, nämlich

$$px + qy + c = 0\,,$$

wobei $p \neq 0$ oder $q \neq 0$ (oder p und q sind nicht beide 0).
Die Gerade g besteht aus allen Punkten $P = (x; y)$, die diese Gleichung erfüllen, d.h.

$$g = \quad \big\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, px + qy + c = 0\big\}.$$

Ein *Koordinatenbereich* K ist eine Menge von Punkten (*Punktmenge*) in der Ebene, die durch Kurven gegeben oder begrenzt ist.

Somit ist g als Gerade auch ein Beispiel eines Koordinatenbereichs.
Das für uns wichtigste Beispiel für Koordinatenbereiche sind Ungleichungen der Form

$$px + qy + c > 0\,.$$

Das heißt, es gilt

$$K = \quad \big\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, px + qy + c > 0\big\}\,.$$

- Für $q > 0$ ist K, graphisch gesehen, die oberhalb von g liegende Halbebene,
- Für $q < 0$ ist K die unterhalb von g liegende Halbebene:
- Für $q = 0$ ist g senkrecht, und K ist die rechts ($p > 0$) bzw. links ($p < 0$) von g liegende Halbebene.

> [online-only]
>
> 

Auch Punktmengen der Form

$$\begin{aligned} L &= \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left|px + qy + c\right| < e\right\}, \\ M &= \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left|px + qy + c\right| > f\right\}, \end{aligned}$$

wobei $e, f \geq 0$, sind Koordinatenbereiche.

Wir verweisen an dieser Stelle auf Kapitel III Abschnitt 3, dort wird das Lösen von Betragsungleichungen erläutert.
Die Ungleichung $|px + qy + c| < e$ bedeutet, dass sowohl

$$px + qy + c < e \qquad \left(\Leftrightarrow -px - qy + e - c > 0\right)$$

als auch

$$-(px + qy + c) < e \qquad \left(\Leftrightarrow px + qy + e + c > 0\right)$$

gilt. Also ist der in Bemerkung 1 definierte Koordinatenbereich

$$L = K_1 \cap K_2$$

der Durchschnitt der beiden Mengen

$$\begin{aligned} K_1 &= \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -px - qy + e - c > 0\right\}, \\ K_2 &= \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; px + qy + e + c > 0\right\}. \end{aligned}$$

[online-only]

Fall e<0

Beträge sind stets nicht negativ. Das heißt der Koordinatenbereich, der beispielsweise durch

$$|x+3| < -2$$

gegeben ist, ist die leere Menge.

Wegen $f \geq 0$ bedeutet $|px+qy+c| > f$ hingegen, dass mindestens eine der beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} px+qy+c &> f \qquad \big(\Leftrightarrow px+qy+c-f>0\big)\,, \\ -(px+qy+c) &> f \qquad \big(\Leftrightarrow -px-qy-c-f>0\big) \end{aligned}$$

gilt. Also ist der in Bemerkung 1 definierte Koordinatenbereich

$$M = K_3 \cup K_4$$

die Vereinigung der beiden Mengen

$$\begin{aligned} K_3 = &\ \big\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid px+qy+c-f>0\big\}\,, \\ K_4 = &\ \big\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid -px-qy-c-f>0\big\}\,. \end{aligned}$$

[online-only]

Auch eine Menge von Punkten $P = (x;y) \in \mathbb{R}^2$, die der Ungleichung

$$|p_1x+q_1y+c_1| \pm |p_2x+q_2y+c_2| > \quad C$$

mit $p_1, p_2, q_1, q_2, c_1, c_2, C \in \mathbb{R}$, genügen, ist ein Koordinatenbereich (dasselbe gilt für $<$ statt $>$ in der obigen Gleichung).

Zeichnen Sie den Koordinatenbereich, der aus allen Punkten $P = (x; y) \in \mathbb{R}^2$ besteht, die der Gleichung

$$|2x + 2| + |x - y - 1| > 5$$

genügen.
Den Koordinatenbereich erhalten Sie nun durch sukzessives "Auflösen" der Beträge. Sie erhalten die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2x + 2 + |x - y - 1| &> 5 \quad , \\ -(2x + 2) + |x - y - 1| = -2x - 2 + |x - y - 1| &> 5 \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} 2x + 2 + x - y - 1 = 3x - y + 1 &> 5 \quad , \\ -2x - 2 + x - y - 1 = -x - y - 3 &> 5 \quad , \\ 2x + 2 - (x - y - 1) = 2x + 2 - x + y + 1 = x + y + 3 &> 5 \quad , \\ -2x - 2 - (x - y - 1) = -2x - 2 - x + y + 1 = -3x + y - 1 &> 5 \quad . \end{aligned}$$

Durch Äquivalenzumformungen erhalten Sie somit für $x \in \mathbb{R}$ die Bedingungen

$$\begin{aligned} & y < && 3x - 4 \\ \text{oder} \quad & y < && -x - 8 \\ \text{oder} \quad & y > && -x + 2 \\ \text{oder} \quad & y > && 3x + 6\,. \end{aligned}$$

Der Koordinatenbereich entspricht somit den Punkten $P = (x; y) \in \mathbb{R}^2$, die den obigen Ungleichungen genügen, und ist in der folgenden Graphik durch blaue Punkte visualisiert:

[online-only]

2.2 Verallgemeinerung

Ist allgemein f eine Funktion auf $\mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned} G_f &= \left\{(x; f(x)) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = f(x)\right\} \end{aligned}$$

ihr Graph, so ist auch

$$H_f = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y > f(x)\right\}$$

ein Koordinatenbereich, und zwar die Menge aller Punkte, die oberhalb vom Graphen G liegen. Ersetzt man für H in der obigen Gleichung $>$ durch $<$, so bleibt H ein Koordinatenbereich, der dann jedoch aus der Menge aller Punkte, die unterhalb vom Graphen G liegen, besteht.

> [online-only]
>
> 

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

[online-only]

3. KREISE

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele:

- Sie besitzen die Fähigkeit, einen durch eine Gleichung gegebenen *Kreis* zu zeichnen.

3.1 Koordinatengleichung

Jeder *Kreis* hat einen *Mittelpunkt* $P_M = (x_M; y_M) \in \mathbb{R}^2$ und einen *Radius* $r > 0$. Der zugehörige Kreis K ist die Menge aller Punkte P in der Ebene, deren Abstand vom Mittelpunkt P_M genau r beträgt.

Ein Kreis besteht also aus der Menge aller Punkte $P = (x; y) \in \mathbb{R}^2$, die der Gleichung

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2 \,,$$

mit $x, x_M, y, y_M \in \mathbb{R}$ und $r > 0$, genügen.
Eine solche Gleichung nennt man *Kreisgleichung*. Zu gegebenem x_M, y_M und r, ist ein *Kreis* K die Menge

$$K = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2\right\} .$$

[online-only]

Liegt eine Gleichung der Form

$$x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ vor, so erhält man mittels quadratischer Ergänzung (siehe Kapitel II Abschnitt 2.3)

$$x^2 + ax + y^2 + by + c = \quad \left(x + \tfrac{a}{2}\right)^2 - \tfrac{a^2}{4} + \left(y + \tfrac{b}{2}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4} + c = 0\,.$$

Daraus ergibt sich mittels Äquivalenzumformungen (was eine Äquivalenzumformung ist, wird in Kapitel II Abschnitt 1 erläutert):

Die Kreisgleichung lautet für $c < \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$

$$\left(x + \tfrac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \tfrac{b}{2}\right)^2 = \tfrac{a^2}{4} + \tfrac{b^2}{4} - c$$

mit $P_M = (x_M\,; y_M) = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$ als Mittelpunkt und $r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$ als Radius.

Ist der Radikand $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$ negativ, so liegt keine Kreisgleichung vor und man erhält für K die leere Menge.

[online-only]

3.2 Funktionsgleichung

Ein Kreis kann nicht in der Form $y = f(x)$ durch eine (einzige) Funktion f dargestellt werden, wohl aber durch ein Paar f_+, f_- von Funktionen. Dabei wird durch f_+ die obere und durch f_- die untere Kreishälfte dargestellt.

Herleitung

Ausgehend von der Kreisgleichung $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ erhält man

$$
\begin{aligned}
& (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2 \\
\Leftrightarrow \quad & (y - y_M)^2 = r^2 - (x - x_M)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & y - y_M = \sqrt{r^2 - (x - x_M)^2} \; oder \\
& y - y_M = -\sqrt{r^2 - (x - x_M)^2} \\
\Leftrightarrow \quad & y = y_M + \sqrt{r^2 - (x - x_M)^2} \; oder \\
& y = y_M - \sqrt{r^2 - (x - x_M)^2} \; .
\end{aligned}
$$

Die obigen Gleichungen fassen wir als Funktionen in Abhängigkeit von x auf und benennen sie als f_+ bzw. f_-.

Ist $P_M = (x_M; y_M) \in \mathbb{R}^2$ der Mittelpunkt eines Kreises mit Radius $r > 0$, so ist der Kreis zusammengesetzt aus den Graphen der beiden Funktionen f_-, f_+, definiert durch

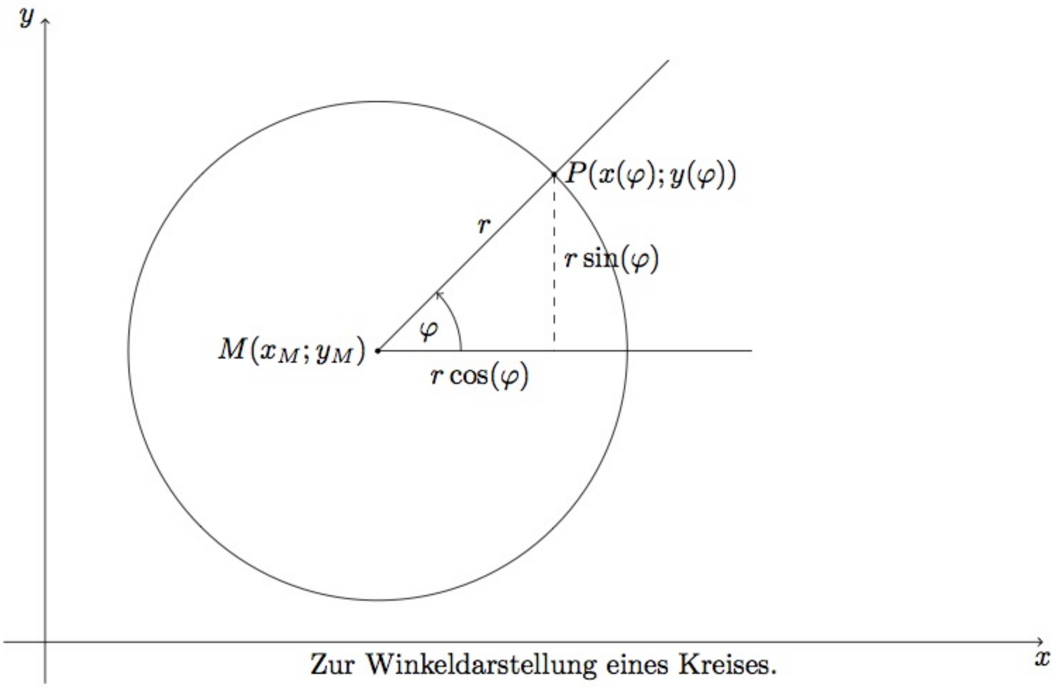
$$
\begin{aligned}
f_+(x) :=& \quad y_M + \sqrt{r^2 - (x - x_M)^2} \; , \; wobei \; x_M - r \leq x \leq x_M + r \; , \\
f_-(x) :=& \quad y_M - \sqrt{r^2 - (x - x_M)^2} \; , \; wobei \; x_M - r < x < x_M + r \; .
\end{aligned}
$$

Der „obere” Halbkreis entspricht der Bildmenge von f_+, wohingegen der „untere” Halbkreis der Bildmenge von f_- entspricht.

[online-only]

3.3 Winkeldarstellung

Eine weitere Möglichkeit, einen Kreis zu beschreiben, ist ihn durch Winkel zu parametrisieren. Das führt auf seine *Winkeldarstellung*.



Zur Winkeldarstellung eines Kreises.

Die Winkeldarstellung eines Kreises K mit Mittelpunkt $P_M = (x_M; y_M) \in \mathbb{R}^2$ und Radius $r > 0$ ist folgendermassen definiert:
Der Kreis K besteht aus allen Punkten in $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten

$$\begin{aligned} x(\varphi) &:= \quad x_M + r\cos(\varphi)\,, \\ y(\varphi) &:= \quad y_M + r\sin(\varphi)\,, \end{aligned}$$

wobei φ folgende Werte annimmt: $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Gleichwertig dazu ist folgende Schreibweise:

$$K = \left\{ \big(x(\varphi); y(\varphi)\big) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{aligned} 0 \leq \varphi < 2\pi\,, \qquad & x(\varphi) = x_M + r\cos(\varphi)\,, \\ & y(\varphi) = y_M + r\sin(\varphi) \end{aligned} \right\}.$$

In der Winkeldarstellung nimmt φ alle Werte zwischen 0 (einschliesslich) und 2π (ausschliesslich) an, d.h. $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Würde man für φ alle reellen Werte zulassen, so würde man keine neuen Punkte erhalten, da $\cos(\varphi + 2\pi) = \cos(\varphi)$ und $\sin(\varphi + 2\pi) = \sin(\varphi)$. Jeder Punkt des Kreises würde dann unendlich oft überstrichen.

> [online-only]

3.4 Schnittpunkte von Kreisen berechnen

Liegen zwei Kreise

$$\begin{aligned} K_1 &:= \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_{M,1})^2+(y-y_{M,1})^2 = r_1^2\right\}, \\ K_2 &:= \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_{M,2})^2+(y-y_{M,2})^2 = r_2^2\right\} \end{aligned}$$

vor, so sind deren Schnittpunkte alle Punkte $P=(x;y) \in K_1 \cap K_2$, d.h. alle Punkte $P=(x;y)$, die sowohl

$$(x-x_{M,1})^2+(y-y_{M,1})^2 = r_1^2$$

als auch

$$(x-x_{M,2})^2+(y-y_{M,2})^2 = r_2^2$$

erfüllen.

Zwei Kreise in der Ebene können sich in

- keinem Punkt schneiden (d.h. sie schneiden sich gar nicht).
- genau einem Punkt schneiden. In diesem Fall sagt man, dass sich die Kreise *berühren* (bzw. *tangieren*).
- zwei Punkten schneiden.
- unendlich vielen Punkten schneiden, die Kreise sind dann identisch.

[online-only]

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Die Gleichung

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y - 11 = 0$$

beschreibt einen Kreis K.

Berechnen Sie die

a) Koordinatengleichung

b) Koordinaten des Zentrums und den Radius des Kreises

c) Funktionsgleichung

d) Winkeldarstellung

a) Koordinatengl.

Die Koordinatengleichung des Kreises K ist

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4^2.$$

Transformieren Sie die Gleichung durch quadratische Ergänzung auf die Form:

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$

Die Methode der quadratischen Ergänzung geht wie folgt:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 + 4y - 11 &= 0 \\ (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 - 11 &= 0 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 - 16 &= 0 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 &= 4^2 \end{aligned}$$

b) Zentrum, Radius

Die Koordinaten des Zentrums M sind $(x_M = 1; y_M = -2)$.
Der Radius des Kreises r ist 4.

In Teilaufgabe a) wurde die Koordinatengleichung hergeleitet.

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4^2$$

Sie sagt aus, dass Punkte auf dem Kreis vom Zentrum M mit den Koordinaten $(x_M = 1; y_M = -2)$ den Abstand $r = 4$ haben.

c) Funktionsgl.

$$\begin{aligned} f_+(x) &= -2 + \sqrt{16-(x-1)^2},\ -3 \le x \le 5, \\ f_-(x) &= -2 - \sqrt{16-(x-1)^2},\ -3 \le x \le 5. \end{aligned}$$

Starten Sie von der Koordinatengleichung (Teilaufgabe a))

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$$

und gehen Sie wie folgt vor:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16 \quad &\Leftrightarrow \quad (y+2)^2 = 16-(x-1)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad y+2 = \sqrt{16-(x-1)^2} \text{ oder} \\ & \quad y+2 = -\sqrt{16-(x-1)^2} \\ &\Leftrightarrow \quad y = -2 + \sqrt{16-(x-1)^2} \text{ oder} \\ & \quad y = -2 - \sqrt{16-(x-1)^2} \end{aligned}$$

Die obigen Gleichungen definieren die beiden Funktionen $f_+(x), f_-(x)$ und sind für alle $-3 \le x \le 5$ definiert.

d) Winkeld.

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= 1 + 4 \cdot \cos(\varphi), \\ y(\varphi) &= -2 + 4 \cdot \sin(\varphi). \end{aligned}$$

Die Winkeldarstellung eines Kreises K mit Mittelpunkt $M = (x_M\,; y_M) \in \mathbb{R}^2$ und Radius $r > 0$ ist folgendermaßen definiert:
Der Kreis K besteht aus allen Punkten in $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten

$$\begin{aligned} x(\varphi) &:= x_M + r\cos(\varphi)\,, \\ y(\varphi) &:= y_M + r\sin(\varphi)\,, \end{aligned}$$

wobei φ folgende Werte annimmt: $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Setzen Sie die Werte $x_M\,, y_M$ und r aus Teilaufgabe a) hier ein.

ÜBUNG 2

Von einem Kreis ist Folgendes bekannt:

1. Der Mittelpunkt liegt auf der x-Achse.
2. Der Ursprung liegt auf dem Kreis.
3. Der Punkt $P = (x_P; y_P)$ liegt auf dem Kreis, er liegt nicht auf der y-Achse.

Berechnen Sie

(a) die Koordinaten des Mittelpunktes

(b) den Radius

(a) Zur Berechnung des Mittelpunktes

Der Mittelpunkt M hat die Koordinaten $(x;0)$. x kennen wir noch nicht. Die y-Koordinate ist Null, weil M auf der x-Achse liegt.

Um x zu berechnen, verwenden wir, dass der Abstand von M zum Ursprung O gleich dem Abstand von M zu P ist (siehe dazu die Einleitung zum Kapitel Geometrie):

$$\begin{aligned} \overline{MO} &= \overline{MP}, \\ \sqrt{(x-0)^2+0^2} &= \sqrt{(x-x_P)^2+y_P^2}. \end{aligned}$$

Wenn wir jetzt beide Seiten quadrieren, erhalten wir eine quadratische Gleichung für die Variable x, in der sich allerdings der quadratische Term weghebt. Dies führt auf die lineare Gleichung

$$0 = -2xx_P + x_P^2 + y_P^2$$

mit der Lösung

$$x = \frac{x_P^2 + y_P^2}{2x_P}.$$

Bemerkung:
Da der Punkt P nach Voraussetzung nicht auf der y-Achse liegt, ist $x_P \neq 0$. Somit darf durch x_P dividiert werden.

(b) Zur Berechnung des Radius

Der Radius des Kreises ist gleich dem Abstand von M vom Ursprung:

$$r = \left| \frac{x_P^2 + y_P^2}{2x_P} \right|.$$

Alternativ zu der hier gezeigten rechnerischen Lösung, gibt es eine geometrische. Sie verwendet die Idee, dass der Mittelpunkt des Kreises der Schnittpunkt der x-Achse mit der Mittelsenkrechten der Strecke OP ist.