1. DAS ADDITIONSVERFAHREN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie kennen die Bedeutung der Begriffe lineares Gleichungssystem sowie Lösung.
- Sie können überprüfen, ob ein Zahlentupel Lösung eines vorgegebenen linearen Gleichungssystems ist.
- Sie können das Additionsverfahren anwenden, um eindeutig lösbare lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten zu lösen.

1.1 Lineare Gleichungssysteme

Im Kapitel II " Gleichungen in einer Unbekannten " lernen Sie lineare Gleichungen der Form $ax = b$ kennen, wobei a und b reelle Zahlen sind. Linear nennt man die Gleichung, da die Variable x nur in der ersten Potenz vorkommt. Beispielsweise sind Gleichungen der Form $ax^2 = b$ oder $ae^x = b$ nichtlinear. Mehrere Gleichungen, die zugleich erfüllt werden sollen, werden als *System von Gleichungen* oder *Gleichungssystem* bezeichnet.

Im Folgenden werden die Begriffe "Variable" und "Unbekannte" synonym verwendet.

Ein System von linearen Gleichungen mit mehr als einer Variablen wird *lineares Gleichungssystem (LGS)* genannt.

Wir nummerieren die Gleichungen in einem LGS, um den Bezug auf einzelne Gleichungen zu erleichtern.

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{(I)} & 3x & - & 4y & = & 2 \\ \text{(II)} & 2x & + & 3y & = & 7 \end{array}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten x und y.

Eine *Lösung* eines linearen Gleichungssystems mit n Unbekannten ist ein n-Tupel $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ bestehend aus n reellen Zahlen x_1, x_2, ..., x_n, die alle Gleichungen des Systems erfüllen.

Erläuterung

Zwei Zahlen $(x_1; x_2)$ bezeichnet man als Paar, drei Zahlen $(x_1; x_2; x_3)$ als Tripel, vier Zahlen $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ als Quadrupel, fünf Zahlen $(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5)$ als Quintupel u. s. w. Ist die Anzahl der Zahlen durch eine natürliche Zahl n gegeben, die nicht konkret bekannt ist, so spricht man bei $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ von einem n-*Tupel*.

Das Zahlenpaar $(2; 1)$ ist eine Lösung des linearen Gleichungssystems in Beispiel 1, da für die Wahl $x = 2$, $y = 1$ beide Gleichungen erfüllt sind.

Bei der Angabe der Lösung als n-Tupel richtet man sich nach der alphabetischen Reihenfolge (falls die Variablen etwa x, y und z heißen) oder der Nummerierung der Variablen (falls diese x_1, x_2, x_3 u. s. w. heißen).

$$\begin{array}{lrrcrcrcr} \text{(I)} & & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ \text{(II)} & & x_1 & - & x_2 & + & \frac{3}{2}x_3 & = & -7 \\ \text{(III)} & - & 4x_1 & + & 2x_2 & & & = & -2 \end{array}$$

Es handelt sich um ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten. Das Zahlentripel $(2; 3; -4)$ ist eine Lösung des linearen Gleichungssystems, da für $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ und $x_3 = -4$ alle drei Gleichungen erfüllt sind.

1.2 Das Additionsverfahren

Zum Lösen (d. h. zum Auffinden aller Lösungen bzw. zur Bestimmung der Lösungsmenge $\mathbb{L}$) eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten kann man das *Additionsverfahren* anwenden. Dabei werden die Gleichungen, ggf. nach geeigneter Umformung, addiert, so dass die resultierende Gleichung (wenigstens) eine Variable weniger enthält. Anhand des LGS aus Beispiel 1 wird im Folgenden das Additionsverfahren erläutert.

1. Eine oder beide Gleichungen werden jeweils mit einer Zahl $c \neq 0$ so multipliziert, dass nach anschließender Addition der beiden Gleichungen (mindestens) eine Variable nicht mehr vorkommt.

$$\begin{array}{lrcrcrl} \text{(I)} & 3x & - & 4y & = & 2 & \mid \cdot(-2) \\ \text{(II)} & 2x & + & 3y & = & 7 & \mid \cdot 3 \\ \hline & -6x & + & 8y & = & -4 & \\ & 6x & + & 9y & = & 21 & \end{array}$$

   Hier führt die Addition der beiden Gleichungen zur Elimination der Variablen x.

2. Beide Gleichungen werden addiert, indem jeweils die rechten und linken Seiten addiert werden. Die dadurch entstandene Gleichung wird gelöst.

$$17y = 17 \quad \Rightarrow \quad y = 1$$

3. Dieses Ergebnis wird in eine der Ausgangsgleichungen eingesetzt, um die andere Variable zu bestimmen. Wählt man dafür die erste Gleichung, so ergibt sich

$$3x - 4 \cdot 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

   (Das Einsetzen in die zweite Gleichung liefert selbstverständlich dasselbe Ergebnis.)

4. Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ wird angegeben. Sie enthält das Zahlenpaar $(2;1)$ als eindeutige Lösung, d. h. es gilt

$$\mathbb{L} = \{(2;1)\}.$$

Bei der Umformung in Schritt 1 gibt es viele Möglichkeiten, um zum 2. Schritt zu gelangen. Bei einem System von zwei Gleichungen reicht es, höchstens eine Gleichung umzuformen.

1. Statt des obigen Vorgehens können wir alternativ auch die zweite Gleichung mit $\frac{4}{3}$ multiplizieren.

$$\begin{array}{lrcrcrl} \text{(I)} & 3x & - & 4y & = & 2 & \\ \text{(II)} & 2x & + & 3y & = & 7 & \mid \cdot \frac{4}{3} \\ \hline & 3x & - & 4y & = & 2 & \\ & \frac{8}{3}x & + & 4y & = & \frac{28}{3} & \end{array}$$

2. Die Addition der beiden Gleichungen führt nun zu einer Gleichung, in der y nicht mehr vorkommt.

$$\frac{17}{3}x = \frac{34}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

3. Wir setzten das Ergebnis in eine der Ausgangsgleichungen ein und bestimmen daraus y.

$$3 \cdot 2 - 4y = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 1$$

4. Somit ergibt sich für die Lösungsmenge abermals

$$\mathbb{L} = \{(2;1)\}.$$

Anmerkungen:

- Die Umformung in Schritt 1 kann abhängig vom LGS auch entfallen. Beim LGS

$$\begin{array}{lrrcrcr} \text{(I)} & - & 6x & + & 8y & = & -4 \\ \text{(II)} & & 6x & + & 9y & = & 21 \end{array}$$

  können wir direkt mit Schritt 2 starten und die Gleichungen addieren, da in der resultierenden Gleichung die Variable x nicht mehr vorkommt.

- Enthält eine Gleichung von Anfang an nur eine Variable, kann man das LGS ohne Addition lösen. Beim LGS

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{(I)} & 3x & - & 4y & = & 2 \\ \text{(II)} & & & 17y & = & 17 \end{array}$$

  löst man die zweite Gleichung direkt nach y auf. Diesen Wert setzt man anschließend in die erste Gleichung ein, um den zugehörigen Wert für x zu erhalten (Einsetzungsverfahren, s. u.).

1.3 Das Einsetzungsverfahren und das Gleichsetzungsverfahren

Ein weiteres Verfahren zum Lösen eines LGS ist das *Einsetzungsverfahren*, das wir jetzt vorstellen.

Das LGS

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{(I)} & 3x & - & 4y & = & 2 \\ \text{(II)} & 2x & + & 3y & = & 7 \end{array}$$

wird mittels des Einsetzungsverfahrens gelöst:

1. Eine der beiden Gleichungen wird nach einer der beiden Variablen aufgelöst.

   $$x = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}y$$

   Hier wurde die zweite Gleichung nach x aufgelöst.

2. Man setzt den aufgelösten Term auf der rechten Seite in die andere Gleichung ein, um sie zu lösen.

   $$3\left(\frac{7}{2} - \frac{3}{2}y\right) - 4y = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 1$$

3. Der Wert der anderen Variablen wird bestimmt, indem man das letzte Ergebnis in die aufgelöste Gleichung aus Schritt 1 einsetzt.

   $$x = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} \cdot 1 = 2$$

4. Die Lösungsmenge ist also

   $$\mathbb{L} = \{(2;1)\}.$$

Selbstverständlich kann man in Schritt 1 auch eine der beiden Gleichungen nach y auflösen, um in Schritt 2 zunächst den Wert für x zu bestimmen.

Ein Vorteil des Einsetzungsverfahrens ist, dass es im Gegensatz zum Additionsverfahren auch bei einigen nichtlinearen Gleichungssystemen einsetzbar ist.

Beispiel

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{(I)} & x^2 & + & 2x & + & y & = & 0 \\ \text{(II)} & & & x & + & y & = & -2 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem ist nichtlinear, da in der ersten Gleichung ein quadratischer Term in x vorkommt. Wir wenden das Einsetzungsverfahren an, um das Gleichungssystem zu lösen.

1. Die zweite Gleichung wird nach y aufgelöst.

$$y = -x - 2$$

2. Durch den Term auf der rechten Seite wird y in Gleichung (I) ersetzt. Daraus bestimmt man den Wert der Variablen x.

$$x^2 + 2x + (-x - 2) = x^2 + x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x = 1 \quad \text{oder} \quad x = -2)$$

3. Mit der aufgelösten Gleichung aus Schritt 1 lassen sich die Werte für y berechnen:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 1 & \Rightarrow & y & = & -3, \\ x & = & -2 & \Rightarrow & y & = & 0. \end{array}$$

4. Die Lösungsmenge ergibt sich zu

$$\mathbb{L} = \{(1, -3), (-2, 0)\}.$$

Da das Gleichungssystem nichtlinear ist, kann es auch genau zwei Lösungen besitzen.

Ein weiteres Verfahren ist das *Gleichsetzungsverfahren*. Auch dieses Verfahren ist nicht nur bei linearen Gleichungssystemen anwendbar.

Wir wenden das Gleichsetzungsverfahren an, um dasselbe LGS zu lösen.

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{(I)} & 3x & - & 4y & = & 2 \\ \text{(II)} & 2x & + & 3y & = & 7 \end{array}$$

1. Beide Gleichungen werden nach derselben Variablen aufgelöst.

$$\begin{array}{rcrcr} x & = & \frac{2}{3} & + & \frac{4}{3}y \\ x & = & \frac{7}{2} & - & \frac{3}{2}y \end{array}$$

2. Die beiden aufgelösten Terme auf der rechten Seite werden gleichgesetzt, und diese Gleichung wird gelöst.

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}y \quad \Rightarrow \quad y = 1$$

3. Dieses Ergebnis wird in eine der beiden aufgelösten Gleichungen aus Schritt 1 eingesetzt, um daraus den Wert für die zweite Variable zu ermitteln.

$$x = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \cdot 1 = 2$$

   Hier wurde die erste Gleichung verwendet, aber auch die zweite Gleichung liefert dasselbe Resultat.

4. Die Lösungsmenge kann nun angegeben werden.

$$\mathbb{L} = \{(2;1)\}$$

In Schritt 1. des Verfahrens kann man auch beide Gleichungen nach y aufzulösen, um in Schritt 2 zunächst den Wert für die Variable x zu bestimmen.

Ausblick: In diesem Abschnitt wurden LGS mit zwei Gleichungen und zwei Variablen besprochen, die genau eine Lösung besitzen. Es handelt sich dabei allerdings um einen Spezialfall. Besteht ein LGS aus nur einer Gleichung für zwei Variablen, können die Variablen nicht eindeutig bestimmt werden. In diesem Fall besitzt das LGS unendlich viele Lösungen. Bei einem LGS mit zwei oder drei Gleichungen und zwei Variablen hingegen muss die Anzahl der Lösungen erst untersucht werden. In den nächsten zwei Abschnitten befassen wir uns u. a. mit dieser Frage.

ÜBUNG 1

Prüfen Sie, ob das jeweils angegebene Zahlenpaar eine Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{(I)} & 3x & + & 4y & = & 8 \\ \text{(II)} & -2x & + & 3y & = & -11 \end{array}$$

ist.

a) $(4; -1)$

b) $(-4; 5)$

c) $(1; -3)$

d) $(2; 2)$

Antwort

a) Ja.

b) Nein.

c) Nein.

d) Nein.

Lösung

Um zu prüfen, ob ein Zahlenpaar eine Lösung des linearen Gleichungssystems ist, müssen die Zahlen für x und y in die beiden Gleichungen eingesetzt werden und geschaut werden, ob die Gleichungen dann erfüllt sind, also eine wahre Aussage herauskommt.

Setzt man beispielsweise das Zahlenpaar aus a) in die erste Gleichung ein, so erhält man
$3 \cdot 4 + 4 \cdot (-1) = 12 - 4 = 8$. Es erfüllt also diese Gleichung.
Ebenso erfüllt das Zahlenpaar aus b) die erste Gleichung.

Beim Einsetzen des Zahlenpaars aus c) in die erste Gleichung kommt man auf
$3 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) = 3 - 12 = -9$. Es erfüllt also die erste Gleichung nicht.
Auch das Zahlenpaar aus d) erfüllt die erste Gleichung nicht, somit scheiden die Zahlenpaare aus c) und d) als mögliche Lösung aus.

Setzt man das Zahlenpaar aus a) nun in die zweite Gleichung ein, so erhält man
$-2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) = -8 - 3 = -11$. Es erfüllt also auch diese Gleichung und ist somit eine Lösung des linearen Gleichungssystems.

Mit dem Einsetzen des Zahlenpaars aus b) in die zweite Gleichung kommt man auf
$-2 \cdot (-4) + 3 \cdot 5 = 8 + 15 = 23$, es erfüllt die zweite Gleichung also nicht und ist somit auch keine Lösung des linearen Gleichungssystems.

[Das Zahlenpaar aus c) würde zwar die zweite Gleichung erfüllen, ist aber ja schon als Lösung ausgeschlossen worden.
Das Zahlenpaar aus d) erfüllt auch die zweite Gleichung nicht.]

ÜBUNG 2

Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme mit dem Additionsverfahren.

a)

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{(I)} & x & + & 3y & = & 7 \\ \text{(II)} & -x & - & 2y & = & -5 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{(I)} & -3x & + & 2y & = & -8 \\ \text{(II)} & 5x & - & 2y & = & 12 \end{array}$$

Antwort

a) $\mathbb{L} = \{(1;2)\}$

b) $\mathbb{L} = \{(2;-1)\}$

Lösung a

Bei diesem linearen Gleichungssystem genügt es, die beiden Gleichungen zu addieren. In der resultierenden Gleichung kommt dann x nicht mehr vor.

Durch Addition der beiden Gleichungen entsteht die Gleichung $y = 2$. Damit steht ein Teil der Lösung bereits fest.

Setzt man y nun in die ursprüngliche erste Gleichung ein, so kann man dadurch x bestimmen.

Einsetzen von y in die ursprüngliche erste Gleichung ergibt $x + 6 = 7$ und somit $x = 1$. Damit steht die Lösung des linearen Gleichungssystems fest.

Zuletzt wird die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems angegeben. Sie besteht hier aus dem Zahlenpaar $(1;2)$.

Lösung b

Bei diesem linearen Gleichungssystem genügt es, die beiden Gleichungen zu addieren. In der resultierenden Gleichung kommt dann y nicht mehr vor.

Durch Addition der beiden Gleichungen entsteht die Gleichung $2x = 4$, woraus $x = 2$ folgt. Damit steht ein Teil der Lösung bereits fest.

Setzt man x nun in die ursprüngliche erste Gleichung ein, so kann man dadurch y bestimmen.

Einsetzen von x in die ursprüngliche erste Gleichung ergibt $-6 + 2y = -8$ und somit $y = -1$. Damit steht die Lösung des linearen Gleichungssystems fest.

Zuletzt wird die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems angegeben. Sie besteht hier aus dem Zahlenpaar $(2; -1)$.

Hinweis

Beachten Sie, dass es auch andere Möglichkeiten gibt, die linearen Gleichungssysteme mit dem Additionsverfahren zu lösen. Die aufgeführten Lösungswege sind nur eine Variante.

ÜBUNG 3

Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme mit dem Additionsverfahren.

a)

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{(I)} & x & + & 2y & = & 5 \\ \text{(II)} & 3x & + & 4y & = & 13 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{(I)} & 2x & - & 5y & = & -6 \\ \text{(II)} & -3x & + & y & = & -4 \end{array}$$

Antwort

a) $\mathbb{L} = \{(3;1)\}$

b) $\mathbb{L} = \{(2;2)\}$

Lösung a

Bei diesem linearen Gleichungssystem ist es am einfachsten, die erste Gleichung mit -3 zu multiplizieren und sie dann zur zweiten Gleichung zu addieren. In der resultierenden Gleichung kommt dann x nicht mehr vor.

Durch Ausführung des ersten Schritts entsteht die Gleichung $-2y = -2$, woraus $y = 1$ folgt. Damit steht ein Teil der Lösung bereits fest.

Setzt man y nun in die ursprüngliche erste Gleichung ein, so kann man dadurch x bestimmen.

Einsetzen von y in die ursprüngliche erste Gleichung ergibt $x + 2 = 5$ und somit $x = 3$. Damit steht die Lösung des linearen Gleichungssystems fest.

Zuletzt wird die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems angegeben. Sie besteht hier aus dem Zahlenpaar $(3;1)$.

Lösung b

Bei diesem linearen Gleichungssystem ist es am einfachsten, die zweite Gleichung mit 5 zu multiplizieren und sie dann zur ersten Gleichung zu addieren. In der resultierenden Gleichung kommt dann y nicht mehr vor.

Durch Ausführung des ersten Schritts entsteht die Gleichung $-13x = -26$, woraus $x = 2$ folgt. Damit steht ein Teil der Lösung bereits fest.

Setzt man x nun in die ursprüngliche erste Gleichung ein, so kann man dadurch y bestimmen.

Einsetzen von x in die ursprüngliche erste Gleichung ergibt $4 - 5y = -6$ und somit $y = 2$. Damit steht die Lösung des linearen Gleichungssystems fest.

Zuletzt wird die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems angegeben. Sie besteht hier aus dem Zahlenpaar $(2; 2)$.

Hinweis

Beachten Sie, dass es auch andere Möglichkeiten gibt, die linearen Gleichungssysteme mit dem Additionsverfahren zu lösen. Die aufgeführten Lösungswege sind nur eine Variante.

ÜBUNG 4

Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme mit dem Additionsverfahren.

a)

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{(I)} & -3x & + & 4y & = & -1 \\ \text{(II)} & 2x & - & 5y & = & -4 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{(I)} & 7x & - & 6y & = & 27 \\ \text{(II)} & 5x & - & 4y & = & 19 \end{array}$$

Antwort

a) $\mathbb{L} = \{(3;2)\}$

b) $\mathbb{L} = \{(3;-1)\}$

Lösung a

Um dieses lineare Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren zu lösen, kann man beispielsweise die erste Gleichung mit 2 und die zweite Gleichung mit 3 multiplizieren und dann beide resultierenden Gleichungen addieren. Dies führt auf eine Gleichung, die x nicht mehr enthält.

Durch Ausführung des ersten Schritts entsteht die Gleichung $-7y = -14$, woraus $y = 2$ folgt. Damit steht ein Teil der Lösung bereits fest.

Setzt man y nun in die ursprüngliche erste Gleichung ein, so kann man dadurch x bestimmen.

Einsetzen von y in die ursprüngliche erste Gleichung ergibt $-3x + 8 = -1$ und somit $x = 3$. Damit steht die Lösung des linearen Gleichungssystems fest.

Zuletzt wird die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems angegeben. Sie besteht hier aus dem Zahlenpaar $(3;2)$.

Lösung b

Um dieses lineare Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren zu lösen, kann man beispielsweise die erste Gleichung mit -5 und die zweite Gleichung mit 7 multiplizieren und dann beide resultierenden Gleichungen addieren. Dies führt auf eine Gleichung, die x nicht mehr enthält.

Durch Ausführung des ersten Schritts entsteht die Gleichung $2y = -2$, woraus $y = -1$ folgt. Damit steht ein Teil der Lösung bereits fest.

Setzt man y nun in die ursprüngliche erste Gleichung ein, so kann man dadurch x bestimmen.

Einsetzen von y in die ursprüngliche erste Gleichung ergibt $7x + 6 = 27$ und somit $x = 3$. Damit steht die Lösung des linearen Gleichungssystems fest.

Zuletzt wird die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems angegeben. Sie besteht hier aus dem Zahlenpaar $(3; -1)$.

Hinweis

Beachten Sie, dass es auch andere Möglichkeiten gibt, die linearen Gleichungssysteme mit dem Additionsverfahren zu lösen. Die aufgeführten Lösungswege sind nur eine Variante.

2. GRAPHISCHE INTERPRETATION UND LÖSBARKEIT

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie können die Lösungsmenge beliebiger linearer Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten mit Hilfe des Additionsverfahrens bestimmen.
- Sie können lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten im zweidimensionalen Koordinatensystem geometrisch interpretieren.

Ein lineares Gleichungssystems (LGS) mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten sowie seine Lösungsmenge können in einer anschaulichen Weise dargestellt werden. Die beiden Gleichungen werden dabei als Geradengleichungen interpretiert. Ein Zahlenpaar, das eine Geradengleichung erfüllt, stellt einen Punkt auf der Geraden dar. Da eine Lösung des LGS beide Gleichungen erfüllt, ist der zugehörige Punkt in beiden Geraden enthalten. Folglich gibt die Lösungsmenge eines LGS die Schnittmenge der beiden Geraden an. In diesem Abschnitt stellen wir die Berechnung der Lösungsmenge und die graphische Darstellung der Lösungsmenge einander gegenüber.

2.1 Eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem

Im letzten Abschnitt "Das Additionsverfahren" haben Sie lineare Gleichungssysteme kennengelernt, deren Lösungsmenge genau einen Punkt mit zwei Koordinaten enthält. Ein solches LGS nennt man *eindeutig lösbar*. Bei einem eindeutig lösbaren LGS mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten kann man die Lösung des LGS als den Schnittpunkt zweier nicht paralleler Geraden interpretieren.

Man sagt, zwei Geraden *schneiden sich*, genau dann, wenn ihre Schnittmenge genau einen Punkt enthält.

Ist die Schnittmenge (oder *Durchschnitt*) zweier Geraden nicht leer, so gibt es dafür zwei mögliche Fälle. In dem einen Fall haben die Geraden unterschiedliche Steigung, und der Durchschnitt enthält genau einen Punkt, weshalb es sich nach Definition 1 um zwei sich schneidende Geraden handelt. Bei dem anderen Fall enthält der Durchschnitt unendlich viele Punkte, und die zugehörigen Geraden sind identisch. In diesem Kurs verwenden wir die Sprechweise der obigen Definition 1 und werden weder zwei identische Geraden als "sich schneidende Geraden" bezeichnen, noch die unendlich vielen Punkte ihrer Schnittmenge als "Schnittpunkte".

Das LGS

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{(I)} & 3x & - & 5y & = & 4 \\ \text{(II)} & 2x & + & y & = & 7 \end{array}$$

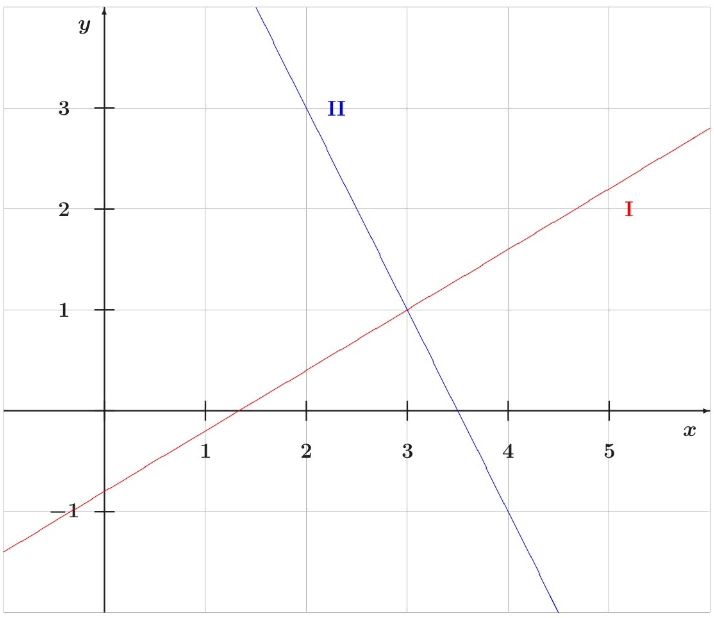
kann mit dem Additionsverfahren gelöst werden. Als Lösungsmenge erhält man

$$\mathbb{L} = \{(3;1)\}.$$

Löst man beide Gleichungen nach der Variablen y auf, kann man sie als Geradengleichungen auffassen.

$$\begin{array}{lrcrrcr} \text{(I)} & y & = & & \frac{3}{5}x & - & \frac{4}{5} \\ \text{(II)} & y & = & - & 2x & + & 7 \end{array}$$

Die Geraden haben unterschiedliche Steigungen und schneiden sich im Punkt $(3;1)$, der die eindeutig bestimmte Lösung des LGS ist.



Man kann das LGS

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{(I)} & -x & & & = & -3 \\ \text{(II)} & 2x & + & y & = & 7 \end{array}$$

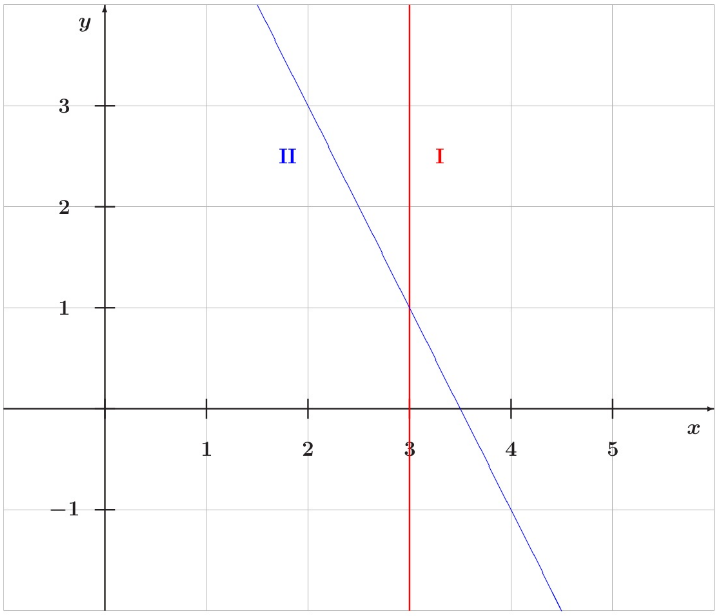
mit dem Additionsverfahren lösen oder auch, indem man aus Gleichung (I) den Wert der Variablen x bestimmt und ihn in (II) einsetzt, um daraus y zu bestimmen (Einsetzungsverfahren).

$$\mathbb{L} = \{(3;1)\}$$

Auch wenn die erste Gleichung nicht die Variable y enthält und sich somit nicht nach y auflösen lässt, kann man sie als Geradengleichung interpretieren. Es handelt sich um eine Gerade, die parallel zur y-Achse verläuft (vgl. Abschnitt IX.1).

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{(I)} & x & = & & & & & 3 \\ \text{(II)} & y & = & - & 2x & + & 7 \end{array}$$

Die beiden Geraden schneiden sich im Punkt $(3;1)$.



2.2 Nicht lösbares lineares Gleichungssystem

Verlaufen die Graphen zweier Geradengleichungen parallel, ohne identisch zu sein, ist ihre Schnittmenge offensichtlich leer. Ein zugehöriges LGS kann somit auch keine Lösung besitzen. Ein LGS mit leerer Lösungsmenge nennt man *nicht lösbar*.

Wir wenden das im letzten Abschnitt eingeführte Additionsverfahren an, um das folgende LGS zu lösen.

$$\begin{array}{lrrrrrrr} \text{(I)} & - & 4x & - & 2y & = & -8 \\ \text{(II)} & & 2x & + & y & = & 7 \end{array}$$

1. Die erste Gleichung wird mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ multipliziert, so dass die anschließende Addition zur Elimination einer Variablen führt.

$$\begin{array}{rrrrrr} - & 2x & - & y & = & -4 \\ & 2x & + & y & = & 7 \end{array}$$

2. Die Gleichungen werden addiert.

$$0 = 3$$

Wir stellen fest, dass diese Gleichung keine Variable mehr enthält und eine falsche Aussage darstellt. Insbesondere ist die Aussage $0 = 3$ für kein Zahlenpaar $(x; y)$ erfüllt. Daher ist das LGS nicht lösbar und die zugehörige Lösungsmenge leer.

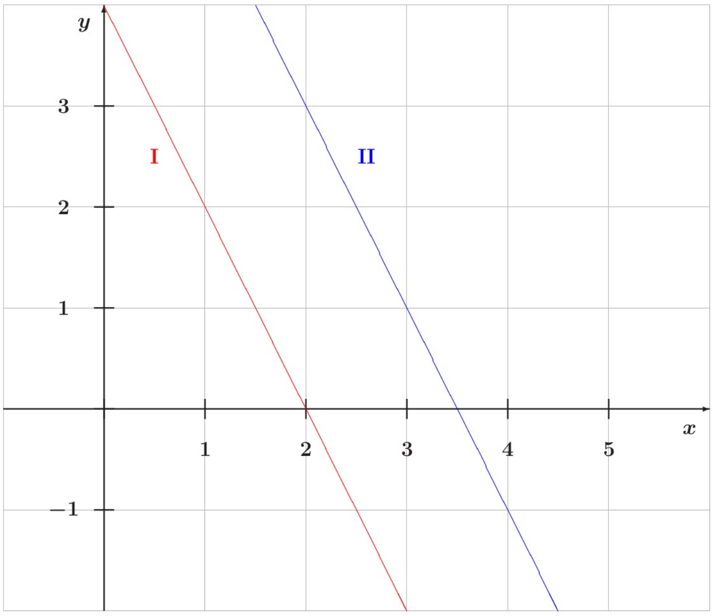
4. Ohne Schritt 3 des Verfahrens auszuführen, geben wir die leere Lösungsmenge an.

$$\mathbb{L} = \emptyset$$

Das Auflösen der Gleichungen nach y liefert die Geradengleichungen

$$\begin{array}{lrrrrrr} \text{(I)} & y & = & - & 2x & + & 4 \\ \text{(II)} & y & = & - & 2x & + & 7. \end{array}$$

Die Geraden haben dieselbe Steigung und verlaufen parallel versetzt wegen der unterschiedlichen Achsenabschnitte. Sie haben somit keinen gemeinsamen Punkt, die Schnittmenge ist folglich leer.



2.3 Lineares Gleichungssystem mit unendlich vielen Lösungen

Zwei Geraden können auch gleich sein. Dann enthält die Schnittmenge alle Punkte auf der Geraden. Ein zugehöriges LGS besitzt demnach unendlich viele Lösungen und wird *lösbar, aber nicht eindeutig lösbar* genannt.

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{(I)} & -4x & - & 2y & = & -14 \\ \text{(II)} & 2x & + & y & = & 7 \end{array}$$

Das Additionsverfahren liefert folgendes Ergebnis.

1. Die zweite Gleichung wird mit dem Faktor 2 multipliziert.

$$\begin{array}{rcrcr} -4x & - & 2y & = & -14 \\ 4x & + & 2y & = & 14 \end{array}$$

2. Die Addition der Gleichungen führt auf die Gleichung

$$0 = 0,$$

die für alle Zahlenpaare $(x; y)$ eine wahre Aussage darstellt. Dies bedeutet jedoch nicht, dass alle Zahlenpaare $(x; y)$ das obige LGS lösen; es bedeutet nur, dass eine der beiden Gleichungen (I) und (II) überflüssig ist und gestrichen werden kann (welche man streicht, ist egal).

3. Wir führen nun einen Parameter t ein, der eine beliebige, aber feste reelle Zahl repräsentiert. Den Parameter t setzen wir einer der Variablen gleich.

$$x = t$$

Das wird in eine der beiden Ausgangsgleichungen eingesetzt, um sie nach der anderen Variablen aufzulösen.

$$2t + y = 7 \quad \Rightarrow \quad y = 7 - 2t$$

Beide Gleichungen liefern das gleiche Ergebnis. Hier wurde die Ausgangsgleichung (II) gewählt, die sich mit weniger Aufwand nach y auflösen lässt.

4. Alle Punkte mit der Gestalt $(t; 7 - 2t)$ sind somit Lösung des LGS, wobei t ein reeller Parameter ist. Das Ergebnis wird wie folgt zu einer Lösungsmenge zusammengefasst.

$$\mathbb{L} = \{(t; 7 - 2t) \mid t \in \mathbb{R}\} \tag{2.1}$$

Man beachte, dass der Name t des Parameters irrelevant ist - man kann die Lösungsmenge auch als

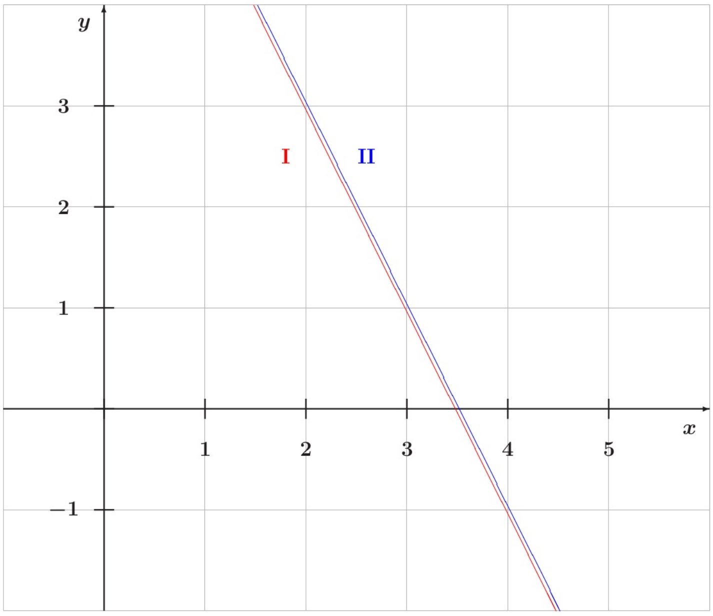
$$\mathbb{L} = \{(x; 7 - 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} \tag{2.2}$$

angeben.

Die zugehörigen Geradengleichungen lauten

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{(I)} & y & = & - & 2x & + & 7 \\ \text{(II)} & y & = & - & 2x & + & 7. \end{array}$$

Die Geraden stimmen überein. Die Schnittmenge besteht aus allen Punkten auf der Geraden und wird durch die obige Lösungsmenge angegeben.



Selbstverständlich kann man auch unter 3. im Beispiel 3 $y = s$ setzen, um mit $x = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}s$ die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}s; s \right) \middle| s \in \mathbb{R} \right\} \tag{2.3}$$

zu erhalten. Die Lösungsmengen (3) und (3) sind gleich. Es handelt sich lediglich um verschiedene Darstellungen derselben Geraden, was man duch die Substitution $s = 7 - 2t$ leicht nachvollziehen kann.

Im Folgenden haben Sie die Möglichkeit, verschiedene LGS mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten zu untersuchen. Geben Sie dazu sechs reelle Koeffizienten in die dafür vorgesehenen Felder ein. Die Lösungsmenge wird berechnet, und die zugehörigen Geraden werden im Koordinatensystem dargestellt, sofern die Gleichungen als Geradengleichungen aufgefasst werden können. Finden Sie Zahlen so, dass das LGS genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen hat!

[online-only]

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Entscheiden Sie jeweils, ob das angegebene lineare Gleichungssystem

- eindeutig lösbar (genau eine Lösung),
- lösbar, aber nicht eindeutig lösbar (unendlich viele Lösungen) oder
- unlösbar (keine Lösung)

ist.

a)

$$\begin{array}{lrcrcr} (\mathrm{I}) & x & + & 2y & = & 10 \\ (\mathrm{II}) & 3x & + & 6y & = & 24 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{lrcrcr} (\mathrm{I}) & 2x & + & 3y & = & 3 \\ (\mathrm{II}) & -8x & + & 6y & = & 0 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{lrcrcr} (\mathrm{I}) & -3x & + & 4y & = & 10 \\ (\mathrm{II}) & 6x & - & 8y & = & -20 \end{array}$$

Antwort

a) Unlösbar.

b) Eindeutig lösbar.

c) Lösbar, aber nicht eindeutig lösbar.

Lösung a

Um zu entscheiden, ob das angegebene lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar (genau eine Lösung), lösbar, aber nicht eindeutig lösbar (unendlich viele Lösungen) oder unlösbar (keine Lösung) ist, wenden Sie das Additionsverfahren auf das lineare Gleichungssystem an.

Multiplizieren Sie beispielsweise die erste Gleichung auf beiden Seiten mit -3 und addieren Sie sie dann zur zweiten Gleichung.

Dadurch ergibt sich die Gleichung $0 = -6$.

Da diese Gleichung eine falsche Aussage darstellt, ist das lineare Gleichungssystem unlösbar.

Lösung b

Um zu entscheiden, ob das angegebene lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar (genau eine Lösung), lösbar, aber nicht eindeutig lösbar (unendlich viele Lösungen) oder unlösbar (keine Lösung) ist, wenden Sie das Additionsverfahren auf das lineare Gleichungssystem an.

Multiplizieren Sie beispielsweise die erste Gleichung auf beiden Seiten mit 4 und addieren Sie sie dann zur zweiten Gleichung.

Dadurch ergibt sich die Gleichung $18y = 12$, also $y = \frac{2}{3}$.

Dies eingesetzt in (II) ergibt $8x = 6y = 4$, also $x = \frac{1}{2}$. Somit ist das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar.

Lösung c

Um zu entscheiden, ob das angegebene lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar (genau eine Lösung), lösbar, aber nicht eindeutig lösbar (unendlich viele Lösungen) oder unlösbar (keine Lösung) ist, wenden Sie das Additionsverfahren auf das lineare Gleichungssystem an.

Multiplizieren Sie beispielsweise die erste Gleichung auf beiden Seiten mit 2 und addieren Sie sie dann zur zweiten Gleichung.

Dadurch ergibt sich die Gleichung $0 = 0$.

Diese Gleichung stellt eine wahre Aussage dar und enthält keine Variable mehr, sodass man zu einer der Ausgangsgleichungen zurückgeht und einen Parameter einführt, den man einer der Variablen gleichsetzt. Das lineare Gleichungssystem hat somit unendlich viele Lösungen, ist also lösbar, aber nicht eindeutig lösbar.

Hinweis

Beachten Sie, dass es auch andere Möglichkeiten gibt, die linearen Gleichungssysteme mit dem Additionsverfahren zu lösen. Die aufgeführten Lösungswege sind nur eine Variante. An den Ergebnissen ändert dies nichts.

ÜBUNG 2

Bestimmen Sie für die jeweils angegebenen Geraden ihre Lage zueinander, d.h. ob sich die Geraden schneiden, ob sie parallel, aber nicht identisch sind oder ob sie identisch sind, indem Sie das aus den beiden Geradengleichungen bestehende lineare Gleichungssystem untersuchen. Wenn sich die Geraden schneiden, bestimmen Sie außerdem ihren Schnittpunkt.

a)

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{(I)} & y & = & 3x & + & 4 \\ \text{(II)} & y & = & \frac{1}{2}x & - & 1 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{(I)} & y & = & 3x & + & 2 \\ \text{(II)} & y & = & 3x & - & 6 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{(I)} & y & = & -2x & - & 2 \\ \text{(II)} & y & = & -2x & - & 2 \end{array}$$

Antwort

a) Die Geraden schneiden sich. Der Schnittpunkt ist $(-2; -2)$.

b) Die Geraden sind parallel, aber nicht identisch.

c) Die Geraden sind identisch.

Lösung a

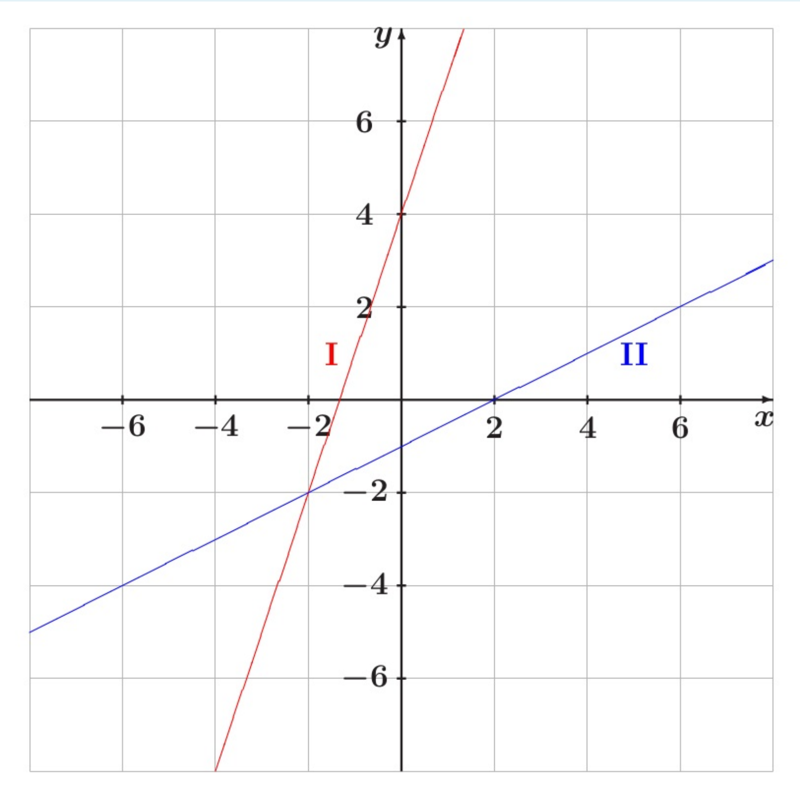
Um etwas über die Lage der Geraden aussagen zu können, untersuchen Sie das aus den beiden Geradengleichungen bestehende lineare Gleichungssystem hinsichtlich dessen Lösbarkeit.

Dazu können Sie es in der üblichen Schreibweise notieren und mit dem Additionsverfahren lösen. In der vorliegenden Form bietet sich jedoch das Gleichsetzungsverfahren an.

Es folgt $3x + 4 = y = \frac{1}{2}x - 1$, was auf $x = -2$ führt.

Setzt man x in eine der Ausgangsgleichungen ein, so erhält man $y = -2$.

Das lineare Gleichungssystem ist also eindeutig lösbar. Die Geraden schneiden sich somit und ihr Schnittpunkt ist gerade die Lösung des linearen Gleichungssystems, also der Punkt $(-2; -2)$.



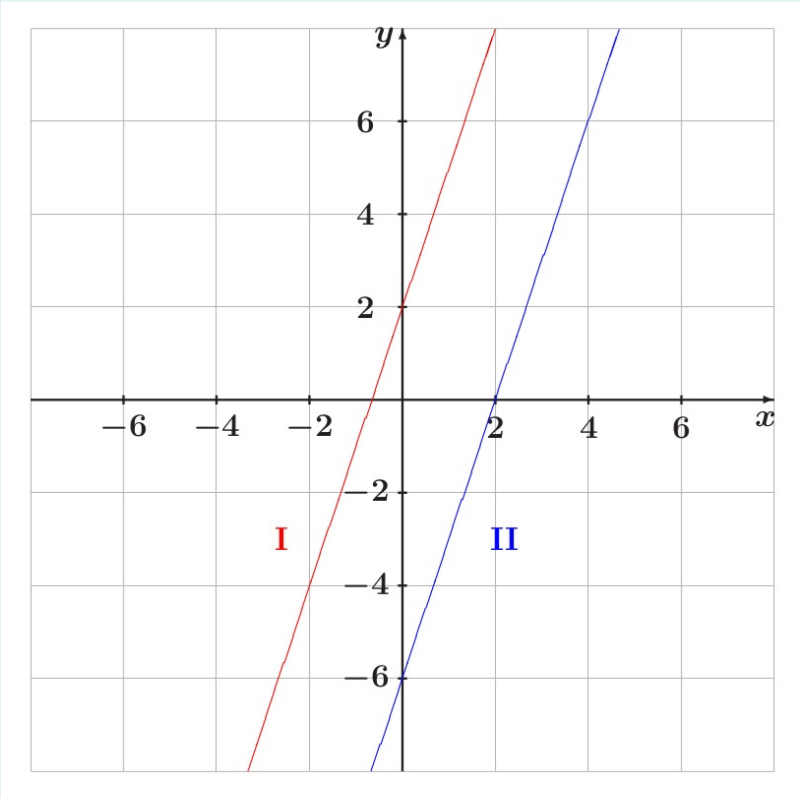
Lösung b

Um etwas über die Lage der Geraden aussagen zu können, untersuchen Sie das aus den beiden Geradengleichungen bestehende lineare Gleichungssystem hinsichtlich dessen Lösbarkeit.

Dazu können Sie es in der üblichen Schreibweise notieren und mit dem Additionsverfahren lösen. In der vorliegenden Form bietet sich jedoch das Gleichsetzungsverfahren an.

Dies liefert $3x + 2 = y = 3x - 6$, woraus sich die Gleichung $0 = -8$ ergibt.

Da dies eine falsche Aussage ist, ist das lineare Gleichungssystem unlösbar. Die Geraden haben somit eine leere Schnittmenge und sind dementsprechend parallel, aber nicht identisch.



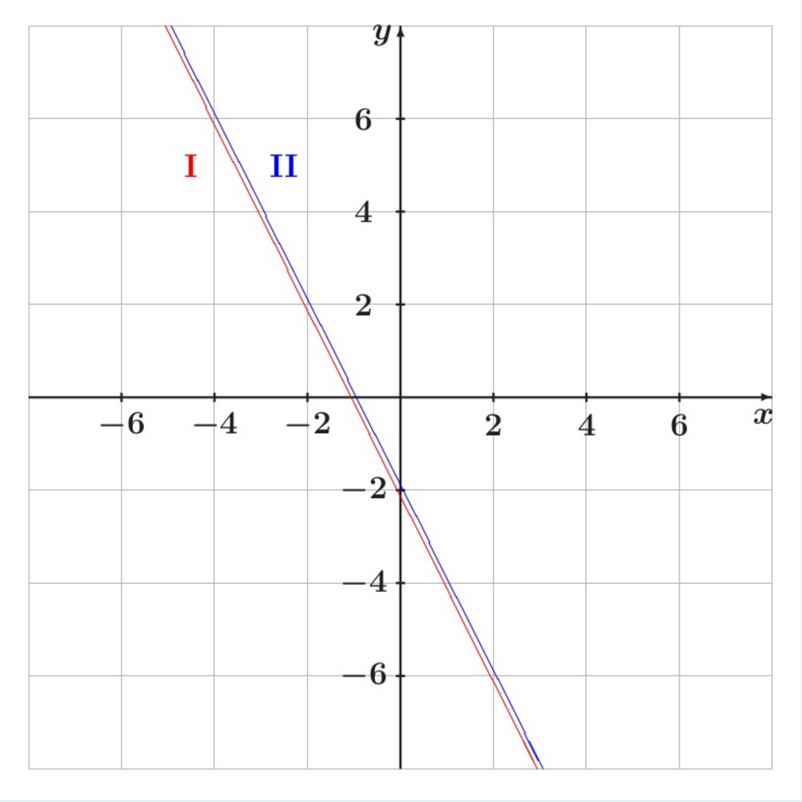
Lösung c

Um etwas über die Lage der Geraden aussagen zu können, untersuchen Sie das aus den beiden Geradengleichungen bestehende lineare Gleichungssystem hinsichtlich dessen Lösbarkeit.

Dazu können Sie es in der üblichen Schreibweise notieren und mit dem Additionsverfahren lösen. In der vorliegenden Form bietet sich jedoch das Gleichsetzungsverfahren an.

Es folgt $-2x-2=y=-2x-2$, was sich zu $0=0$ umformen lässt.

Diese Gleichung stellt eine wahre Aussage dar und enthält keine Variable mehr, sodass man zu einer der Ausgangsgleichungen zurückgeht und einen Parameter einführt, den man einer der Variablen gleichsetzt. Das lineare Gleichungssystem ist somit lösbar, aber nicht eindeutig lösbar und hat unendlich viele Lösungen. Das bedeutet, die Geraden sind identisch, was man natürlich auch schon direkt an den identischen Geradengleichungen erkennen kann.



Hinweis

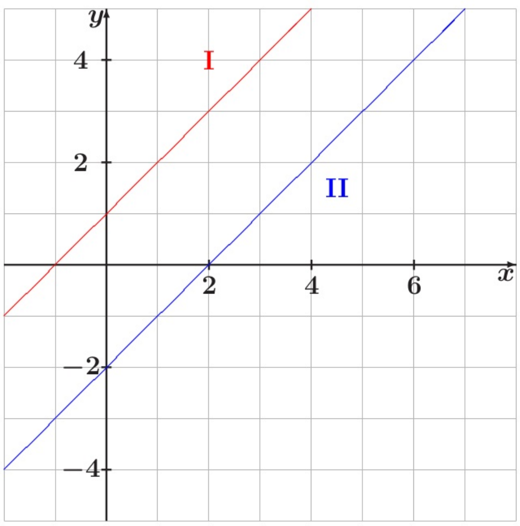
Im Rahmen dieses Kapitels ist der Weg, etwas über die Lage zweier Geraden auszusagen, indem das aus den beiden Geradengleichungen bestehende lineare Gleichungssystem untersucht wird, trotz einfacherer Möglichkeiten ausdrücklich gewünscht.

ÜBUNG 3

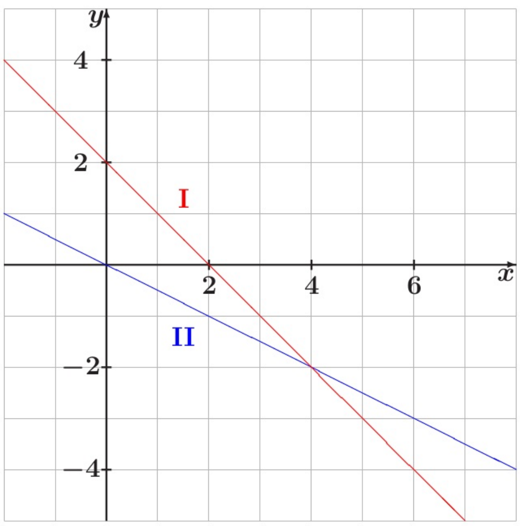
Beantworten Sie zu jedem der drei Bilder a), b) und c) die folgenden Fragen:

1. Welche Lage haben die beiden abgebildeten Geraden zueinander?
2. Welche Aussage lässt sich über die Lösbarkeit des aus den Geradengleichungen bestehenden linearen Gleichungssystems treffen?
3. Wie lautet die Lösungsmenge des aus den Geradengleichungen bestehenden linearen Gleichungssystems?

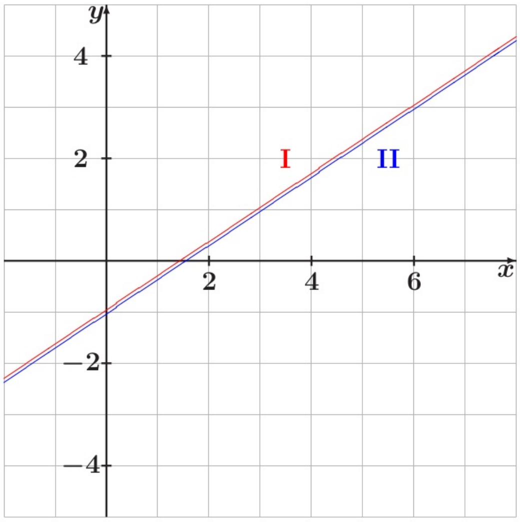
a)



b)



c)



Antwort

a)
1. Die Geraden sind parallel, aber nicht identisch.
2. Das aus den Geradengleichungen bestehende lineare Gleichungssystem ist unlösbar, d.h. es hat keine Lösung.
3. Die Lösungsmenge des aus den Geradengleichungen bestehenden linearen Gleichungssystems ist $\mathbb{L} = \emptyset$.

b)
1. Die Geraden schneiden sich.
2. Das aus den Geradengleichungen bestehende lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, d.h. es hat genau eine Lösung.
3. Die Lösungsmenge des aus den Geradengleichungen bestehenden linearen Gleichungssystems ist $\mathbb{L} = \{(4; -2)\}$.

c)
1. Die Geraden sind identisch.
2. Das aus den Geradengleichungen bestehende lineare Gleichungssystem ist lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, d.h. es hat unendlich viele Lösungen.
3. Die Lösungsmenge des aus den Geradengleichungen bestehenden linearen Gleichungssystems ist $\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}t; t\right) \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$.
(Andere Darstellungen der Lösungsmenge sind möglich!)

Lösung a

Am Bild erkennt man, dass die Geraden parallel, aber nicht identisch sind.

Daher ist das aus den Geradengleichungen bestehende lineare Gleichungssystem unlösbar. Es hat also keine Lösung.

Die Lösungsmenge des aus den Geradengleichungen bestehenden linearen Gleichungssystems entspricht der Schnittmenge der beiden Geraden. Diese ist aber leer. Somit ist (entsprechend der Unlösbarkeit des Gleichungssystems) $\mathbb{L} = \emptyset$.

Lösung b

Am Bild erkennt man, dass sich die Geraden schneiden.

Daher ist das aus den Geradengleichungen bestehende lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar. Es hat also genau eine Lösung.

Die Lösungsmenge des aus den Geradengleichungen bestehenden linearen Gleichungssystems entspricht der Schnittmenge der beiden Geraden. Sie besteht in diesem Fall aus dem gemeinsamen Punkt der beiden Geraden, ihrem Schnittpunkt $(4;-2)$. Es ist also $\mathbb{L} = \{(4;-2)\}$.

Lösung c

Am Bild erkennt man, dass die Geraden identisch sind.

Daher ist das aus den Geradengleichungen bestehende lineare Gleichungssystem lösbar, aber nicht eindeutig lösbar. Es hat also unendlich viele Lösungen.

Die Lösungsmenge des aus den Geradengleichungen bestehenden linearen Gleichungssystems entspricht der Schnittmenge der beiden Geraden. Diese besteht aus den beiden Geraden bzw. der Geraden, da es ja nur eine gibt. Die Geradengleichung dieser Geraden lautet $y = \frac{2}{3}x - 1$. Führt man nun einen Parameter t ein und setzt eine Variable gleich diesem Parameter, z.B. $y = t \in \mathbb{R}$, so erhält man durch Einsetzen in die Geradengleichung schließlich $x = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}t$. Es ist also $\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}t; t\right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$.

(Andere Darstellungen der Lösungsmenge sind möglich, je nachdem, welche Variable frei gewählt wird und wie sie gewählt wird.)

ÜBUNG 4

Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme mit dem Additionsverfahren.

a)

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{(I)} & -7x & + & 5y & = & 4 \\ \text{(II)} & 3x & - & 4y & = & 2 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{(I)} & 4x & - & 8y & = & 16 \\ \text{(II)} & -6x & + & 12y & = & -24 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{(I)} & -2x & - & 3y & = & 5 \\ \text{(II)} & 10x & + & 15y & = & -15 \end{array}$$

Antwort

a) $\mathbb{L} = \{(-2; -2)\}$

b) $\mathbb{L} = \{(4 + 2t; t) | t \in \mathbb{R}\}$ (Andere Darstellungen der Lösungsmenge sind möglich!)

c) $\mathbb{L} = \emptyset$

Lösung a

Bei diesem linearen Gleichungssystem kann man beispielsweise die erste Gleichung mit 3 und die zweite Gleichung mit 7 multiplizieren und dann die beiden resultierenden Gleichungen addieren. Dies führt auf eine Gleichung, die x nicht mehr enthält.

Durch Ausführung des ersten Schritts entsteht die Gleichung $-13y = 26$, woraus $y = -2$ folgt.

Setzt man y nun in die ursprüngliche erste Gleichung ein, so kann man dadurch x bestimmen.

Einsetzen von y in die ursprüngliche erste Gleichung ergibt $-7x - 10 = 4$ und somit $x = -2$. Damit steht die Lösung des linearen Gleichungssystems fest.

Zuletzt wird die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems angegeben. Sie besteht hier aus dem Zahlenpaar $(-2; -2)$ und lautet somit $\mathbb{L} = \{(-2; -2)\}$.

Lösung b

Bei diesem linearen Gleichungssystem kann man beispielsweise die erste Gleichung mit $\frac{1}{4}$ und die zweite Gleichung mit $\frac{1}{6}$ multiplizieren (also die erste Gleichung durch 4 und die zweite Gleichung durch 6 dividieren) und dann die beiden resultierenden Gleichungen addieren. Dies führt auf eine Gleichung, die x nicht mehr enthält.

Durch Ausführung des ersten Schritts entsteht die Gleichung $0 = 0$. Diese Gleichung stellt eine wahre Aussage dar und enthält keine Variable mehr, sodass man zur Bestimmung der Lösungsmenge zu einer der Ausgangsgleichungen zurückgeht und einen Parameter einführt, den man einer der Variablen gleichsetzt.

Man setzt z.B. $y = t \in \mathbb{R}$.

Dann setzt man $y = t$ in die Gleichung ein, um sie nach der anderen Variablen, hier also x, aufzulösen.

Mit der ersten Gleichung ergibt sich $4x - 8t = 16$ und somit $x = 4 + 2t$.

Die Lösungsmenge lautet damit $\mathbb{L} = \{(4 + 2t; t) | t \in \mathbb{R}\}$.

(Andere Darstellungen der Lösungsmenge sind möglich, je nachdem, welche Variable frei gewählt wird und wie sie gewählt wird.)

Lösung c

Bei diesem linearen Gleichungssystem ist es am einfachsten, die zweite Gleichung mit $\frac{1}{5}$ zu multiplizieren (also durch 5 zu dividieren) und dann beide Gleichungen zu addieren. In der resultierenden Gleichung kommt dann x nicht mehr vor.

Durch Ausführung des ersten Schritts entsteht die Gleichung $0 = 2$. Dies ist eine falsche Aussage, das lineare Gleichungssystem ist somit nicht lösbar und es ist $\mathbb{L} = \emptyset$.

Hinweis

Beachten Sie, dass es auch andere Möglichkeiten gibt, die linearen Gleichungssysteme mit dem Additionsverfahren umzuformen. Die aufgeführten Lösungswege sind nur eine Variante. Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems in b) hat außerdem verschiedene Darstellungsmöglichkeiten. Abgesehen davon sind die Lösungsmengen jedoch immer gleich.

3. DAS GAUSS-VERFAHREN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziel

- Sie können das Gauß-Verfahren anwenden, um lineare Gleichungssysteme mit bis zu drei Gleichungen und drei Unbekannten zu lösen.

Das *Gauß-Verfahren* ist eine Methode zum Lösen linearer Gleichungssysteme (LGS). Es stellt eine Verallgemeinerung des Additionsverfahrens dar, die unabhängig von der Größe des Systems eingesetzt werden kann.

3.1 Die Stufenform

Ein LGS liegt in *Stufenform* vor, wenn in jeder Gleichung mindestens eine Variable vorkommt, die in allen folgenden Gleichungen nicht mehr auftritt.

Ein eindeutig lösbares LGS in Stufenform wird durch schrittweise Elimination der Variablen gelöst: bei der letzten Gleichung beginnend werden alle Gleichungen von unten nach oben nacheinander gelöst, indem alle bereits bestimmten Werte in die darüberliegenden Gleichungen eingesetzt werden. Man nennt dieses Verfahren *Rückwärtseinsetzen*.

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{(I)} & -x & + & 2y & + & 3z & = & 5 \\ \text{(II)} & & & y & + & 4z & = & 11 \\ \text{(III)} & & & & - & 2z & = & -6 \end{array}$$

Dieses LGS liegt in Stufenform vor. Zunächst wird die dritte Gleichung nach der Variablen z aufgelöst.

$$\text{(III)} \qquad z = 3$$

Diesen Wert setzt man in die zweite Gleichung ein, um die Variable y zu bestimmen.

$$\text{(II)} \qquad y + 4 \cdot 3 = 11 \quad \Rightarrow \quad y = -1$$

Anschließend werden beide Werte in die erste Gleichung eingesetzt, um daraus x zu berechnen.

$$\text{(I)} \qquad -x + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 = 5 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

Das LGS ist eindeutig lösbar und besitzt die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{(2; -1; 3)\}.$$

3.2 Elementare Umformungen und das Gauß-Verfahren

Folgende sogenannte *elementare Umformungen* eines LGS verändern die Lösungsmenge des LGS nicht.

- Vertauschen zweier Gleichungen
- Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl $c \neq 0$
- Addition (Subtraktion) eines c-fachen einer Gleichung zu (von) einer anderen

Man wendet elementare Umformungen an, um ein LGS auf Stufenform zu bringen. Anschließend kann die Lösungsmenge wie in Beispiel 1 dargestellt durch Rückwärtseinsetzen bestimmt werden.

$$\begin{array}{lrrrrrrrrl}
\text{(I)} & - & x & + & 2y & + & 3z & = & 5 & \\
\text{(II)} & & x & - & y & + & z & = & 6 & \mid +\text{(I)} \\
\text{(III)} & & 2x & - & 3y & - & 4z & = & -5 & \mid +2\cdot\text{(I)}
\end{array}$$

Wir wenden die elementaren Umformungen an, um die Stufenform zu erzeugen. Die Variable x kann in (II) und (III) eliminiert werden, indem man die erste Gleichung zur zweiten und das doppelte der ersten Gleichung zur dritten addiert.

$$\begin{array}{lrrrrrrrrl}
\text{(I)} & - & x & + & 2y & + & 3z & = & 5 & \\
\text{(II)} & & & & y & + & 4z & = & 11 & \\
\text{(III)} & & & & y & + & 2z & = & 5 & \mid -\text{(II)}
\end{array}$$

Schließlich erhalten wir eine Stufenform, indem man die zweite Gleichung von der dritten abzieht.

$$\begin{array}{lrrrrrrrr}
\text{(I)} & - & x & + & 2y & + & 3z & = & 5 \\
\text{(II)} & & & & y & + & 4z & = & 11 \\
\text{(III)} & & & & & - & 2z & = & -6
\end{array}$$

Das LGS kann nun wie unter Beispiel 1 beschrieben gelöst werden.

Beachten Sie, dass es verschiedene Kombinationen von elementaren Umformungen gibt, um ein LGS in eine Stufenform zu überführen.

Gauß-Verfahren

Man löst ein LGS, indem man es zunächst durch elementare Umformungen auf die Stufenform bringt und dann die Werte der Unbekannten durch Rückwärtseinsetzen bestimmt.

Selbstverständlich muss nicht immer die erste Variable ab der zweiten Gleichung eliminiert werden. Manchmal lässt sich mit wenigeren elementaren Umformungen eine andere Stufenform erzeugen, wie das folgende Beispiel zeigt.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{(I)} & 3x & & & + & 5z & = & 1 \\
\text{(II)} & 2x & - & 3y & + & 4z & = & -1 \\
\text{(III)} & x & + & 6y & + & z & = & 3 & \quad | +2\cdot\text{(II)}
\end{array}
$$

Hier bietet es sich an, die in Gleichung (I) fehlende Variable y auszunutzen und sie in einer weiteren Gleichung zu beseitigen.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{(I)} & 3x & & & + & 5z & = & 1 \\
\text{(II)} & 2x & - & 3y & + & 4z & = & -1 \\
\text{(III)} & 5x & & & + & 9z & = & 1
\end{array}
$$

Die Gleichungen (I) und (II) werden vertauscht, anschließend wird eine weitere Variable eliminiert.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{(I)} & 2x & - & 3y & + & 4z & = & -1 \\
\text{(II)} & 3x & & & + & 5z & = & 1 \\
\text{(III)} & 5x & & & + & 9z & = & 1 & \quad | -\frac{5}{3}\cdot\text{(II)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{(I)} & 2x & - & 3y & + & 4z & = & -1 \\
\text{(II)} & 3x & & & + & 5z & = & 1 \\
\text{(III)} & & & & & \frac{2}{3}z & = & -\frac{2}{3}
\end{array}
$$

Nach der ersten Gleichung tritt nun die Variable y, nach der zweiten die Variable x nicht mehr auf. Somit befindet sich das LGS in Stufenform und kann durch Rückwärtseinsetzen gelöst werden. Für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ folgt

$$
\mathbb{L} = \left\{ \left(2; \frac{1}{3}; -1 \right) \right\}.
$$

3.3 Weitere Lösbarkeitsfälle

Wie auch im letzten Abschnitt "Graphische Interpretation und Lösbarkeit" gibt es drei mögliche Fälle für die Lösbarkeit eines LGS. Nachdem wir uns oben mit eindeutig lösbaren Beispielen befasst haben, kommen wir nun zu den beiden anderen Fällen.

Ist das LGS nicht lösbar, so enthält die Stufenform einen Widerspruch.

$$\begin{array}{lrcrcrcrl}
\text{(I)} & x & + & y & + & z & = & 3 & \\
\text{(II)} & & & 2y & + & 3z & = & 5 & \\
\text{(III)} & & & 2y & + & 3z & = & 4 & \quad \mid -\text{(II)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{(I)} & x & + & y & + & z & = & 3 \\
\text{(II)} & & & 2y & + & 3z & = & 5 \\
\text{(III)} & & & & & 0 & = & -1
\end{array}$$

An der dritten Gleichung erkennt man, dass das LGS nicht lösbar ist, somit folgt

$$\mathbb{L} = \emptyset.$$

Ist das LGS lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, so gibt es in der Stufenform weniger Gleichungen, die Variablen enthalten, als die Gesamtanzahl der Variablen. In diesem Fall gibt es unendlich viele Lösungen.

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{(I)} & x & + & y & + & z & = & 3 \\
\text{(II)} & & & y & + & 2z & = & 3 \\
\text{(III)} & & & y & + & 2z & = & 3 \qquad \mid -\text{(II)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{(I)} & x & + & y & + & z & = & 3 \\
\text{(II)} & & & y & + & 2z & = & 3 \\
\text{(III)} & & & & & 0 & = & 0
\end{array}$$

Gleichung (III) in der Stufenform ist immer erfüllt und kann deshalb weggelassen werden. Es bleiben deshalb zwei Gleichungen mit drei Variablen übrig. Eine der beiden Variablen in (II) ist frei wählbar. Wir führen einen reellen Parameter für z ein, setzen also $z = t$. Damit lassen sich die beiden übrigen Variablen bestimmen.

$$\text{(II)} \qquad y + 2t = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3 - 2t$$

$$\text{(I)} \qquad x + 3 - 2t + t = 3 \quad \Rightarrow \quad x = t$$

Alle Zahlentripel der Form $(t; 3 - 2t; t)$ sind Lösungen des LGS, wobei t ein reeller Parameter ist. Die Lösungsmenge ergibt sich somit zu

$$\mathbb{L} = \left\{(t; 3 - 2t; t) \mid t \in \mathbb{R}\right\}.$$

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{(I)} & x & + & y & + & z & = & 3 \\ \text{(II)} & & & & & 0 & = & 0 \\ \text{(III)} & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Hat ein LGS nach elementaren Umformungen diese Stufenform, gibt es genau eine verwertbare Gleichung für drei Variablen. Hier können also zwei der Variablen frei gewählt werden, daraus leitet man dann die dritte Variable her.

$$y = s \quad \text{und} \quad z = t \qquad \Rightarrow \qquad x = 3 - s - t$$

Eine mögliche Darstellung der zugehörigen Lösungsmenge ist somit

$$\mathbb{L} = \big\{(3 - s - t;\ s;\ t) \;\big|\; s, t \in \mathbb{R}\big\}.$$

Auch die Darstellung

$$\mathbb{L} = \big\{(a;\ b;\ 3 - a - b) \;\big|\; a, b \in \mathbb{R}\big\}$$

ist korrekt, die man erhält, wenn man für x und y die Parameter a bzw. b einführt: unabhängig von der Darstellung bleibt die Lösungsmenge unverändert,

$$\big\{(3 - s - t;\ s;\ t) \;\big|\; s, t \in \mathbb{R}\big\} = \big\{(a;\ b;\ 3 - a - b) \;\big|\; a, b \in \mathbb{R}\big\}.$$

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Entscheiden Sie jeweils, ob das angegebene lineare Gleichungssystem

- eindeutig lösbar (genau eine Lösung),
- lösbar, aber nicht eindeutig lösbar (unendlich viele Lösungen) oder
- unlösbar (keine Lösung)

ist.

a)

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{(I)} & -x & + & 7y & - & z & = & 5 \\ \text{(II)} & 4x & - & y & + & z & = & 1 \\ \text{(III)} & 5x & - & 3y & + & z & = & -1 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{(I)} & x & - & 2y & + & 3z & = & 4 \\ \text{(II)} & 3x & + & y & - & 5z & = & 5 \\ \text{(III)} & 2x & - & 3y & + & 4z & = & 7 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{(I)} & x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ \text{(II)} & 2x & - & 3y & - & z & = & 4 \\ \text{(III)} & 3x & - & 8y & - & 5z & = & 5 \end{array}$$

Antwort

a) Eindeutig lösbar.

b) Lösbar, aber nicht eindeutig lösbar.

c) Unlösbar.

Lösung a

Um zu entscheiden, ob das angegebene lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar (genau eine Lösung), lösbar, aber nicht eindeutig lösbar (unendlich viele Lösungen) oder unlösbar (keine Lösung) ist, bringen Sie das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren auf Stufenform.

Multiplizieren Sie beispielsweise die erste Gleichung auf beiden Seiten mit 4 bzw. 5 und addieren Sie sie dann zur zweiten bzw. dritten Gleichung, so dass in diesen x nicht mehr vorkommt.

Das lineare Gleichungssystem sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{(I)} & -x & + & 7y & - & z & = & 5 \\ \text{(II)} & & & 27y & - & 3z & = & 21 \\ \text{(III)} & & & 32y & - & 4z & = & 24. \end{array}$$

Die zweite bzw. dritte Gleichung kann nun noch vereinfacht werden, indem man sie auf beiden Seiten durch 3 bzw. 4 teilt.
Das lineare Gleichungssystem sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{(I)} & -x & + & 7y & - & z & = & 5 \\ \text{(II)} & & & 9y & - & z & = & 7 \\ \text{(III)} & & & 8y & - & z & = & 6. \end{array}$$

Im nächsten Schritt bietet es sich an, die zweite Gleichung mit -1 zu multiplizieren und dann zur dritten Gleichung zu addieren, damit dort schließlich z nicht mehr vorkommt.
Das lineare Gleichungssystem sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{(I)} & -x & + & 7y & - & z & = & 5 \\ \text{(II)} & & & 9y & - & z & = & 7 \\ \text{(III)} & & - & y & & & = & -1. \end{array}$$

Das lineare Gleichungssystem ist jetzt in Stufenform und man erkennt, dass man (durch Rückwärtseinsetzen) eine eindeutige Lösung bestimmen kann, das lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar.

Lösung b

Um zu entscheiden, ob das angegebene lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar (genau eine Lösung), lösbar, aber nicht eindeutig lösbar (unendlich viele Lösungen) oder unlösbar (keine Lösung) ist, bringen Sie das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren auf Stufenform.

Multiplizieren Sie beispielsweise die erste Gleichung auf beiden Seiten mit -3 bzw. -2 und addieren Sie sie dann zur zweiten bzw. dritten Gleichung, so dass in diesen x nicht mehr vorkommt.

Das lineare Gleichungssystem sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{(I)} & x & - & 2y & + & 3z & = & 4 \\
\text{(II)} & & & 7y & - & 14z & = & -7 \\
\text{(III)} & & & y & - & 2z & = & -1.
\end{array}$$

Im nächsten Schritt bietet es sich an, die dritte Gleichung mit -7 zu multiplizieren und dann die zweite zur dritten Gleichung zu addieren, damit dort schließlich y nicht mehr vorkommt.
Das lineare Gleichungssystem sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{(I)} & x & - & 2y & + & 3z & = & 4 \\
\text{(II)} & & & 7y & - & 14z & = & -7 \\
\text{(III)} & & & & & 0 & = & 0.
\end{array}$$

Das lineare Gleichungssystem ist jetzt in Stufenform und man erkennt, dass man eine Variable frei wählen kann und das lineare Gleichungssystem somit unendlich viele Lösungen hat. Es ist also lösbar, aber nicht eindeutig lösbar.

Lösung c

Um zu entscheiden, ob das angegebene lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar (genau eine Lösung), lösbar, aber nicht eindeutig lösbar (unendlich viele Lösungen) oder unlösbar (keine Lösung) ist, bringen Sie das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren auf Stufenform.

Multiplizieren Sie beispielsweise die erste Gleichung auf beiden Seiten mit -2 bzw. -3 und addieren Sie sie dann zur zweiten bzw. dritten Gleichung, so dass in diesen x nicht mehr vorkommt.

Das lineare Gleichungssystem sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{lcrcrcrcl} \text{(I)} & & x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ \text{(II)} & & & - & 7y & - & 7z & = & 2 \\ \text{(III)} & & & - & 14y & - & 14z & = & 2. \end{array}$$

Im nächsten Schritt bietet es sich an, die zweite Gleichung mit -2 zu multiplizieren und dann zur dritten Gleichung zu addieren, damit dort schließlich y nicht mehr vorkommt.
Das lineare Gleichungssystem sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{lcrcrcrcr} \text{(I)} & & x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ \text{(II)} & & & - & 7y & - & 7z & = & 2 \\ \text{(III)} & & & & & & 0 & = & -2. \end{array}$$

Das lineare Gleichungssystem ist jetzt in Stufenform, enthält aber in der dritten Gleichung eine falsche Aussage. Daran erkennt man, dass das lineare Gleichungssystem unlösbar ist.

Hinweis

Beachten Sie, dass es auch andere Möglichkeiten gibt, die linearen Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren auf Stufenform zu bringen. Die aufgeführten Wege sind nur eine Variante. Außerdem ist die Stufenform nicht eindeutig, die Antworten beeinflusst dies aber nicht.

ÜBUNG 2

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichungssysteme. Verwenden Sie dazu das Gauß-Verfahren.

a)

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{(I)} & x & + & 4y & + & 6z & = & 1 \\ \text{(II)} & 2x & + & 3y & + & 7z & = & 1 \\ \text{(III)} & 3x & + & 2y & + & 8z & = & 2 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{(I)} & 3x & - & 2y & + & 5z & = & 8 \\ \text{(II)} & 6x & + & 5y & - & 2z & = & -5 \\ \text{(III)} & 9x & - & 3y & - & z & = & -31 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{(I)} & x & - & 2y & + & 4z & = & -6 \\ \text{(II)} & 2x & - & 2y & + & 3z & = & 0 \\ \text{(III)} & 3x & - & 4y & + & 7z & = & -6 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{(I)} & x & + & 2y & - & 5z & = & 3 \\ \text{(II)} & & & & & 0 & = & 0 \\ \text{(III)} & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Antwort

a) $\mathbb{L} = \emptyset$

b) $\mathbb{L} = \{(-2; 3; 4)\}$

c) $\mathbb{L} = \left\{(6 + t; 6 + \frac{5}{2}t; t) \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$ (Andere Darstellungen der Lösungsmenge sind möglich!)

d) $\mathbb{L} = \{(3 - 2s + 5t; s; t) | s, t \in \mathbb{R}\}$ (Andere Darstellungen der Lösungsmenge sind möglich!)

Lösung a

Um die Lösungsmenge des angegebenen linearen Gleichungssystems zu bestimmen, bringen Sie es zunächst mit dem Gauß-Verfahren auf Stufenform.

Multiplizieren Sie beispielsweise die erste Gleichung auf beiden Seiten mit -2 bzw. -3 und addieren Sie sie dann zur zweiten bzw. dritten Gleichung, so dass in diesen x nicht mehr vorkommt.

Das lineare Gleichungssystem sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{lcrcrcrcr} \text{(I)} & & x & + & 4y & + & 6z & = & 1 \\ \text{(II)} & & & - & 5y & - & 5z & = & -1 \\ \text{(III)} & & & - & 10y & - & 10z & = & -1. \end{array}$$

Im nächsten Schritt bietet es sich an, die zweite Gleichung mit -2 zu multiplizieren und dann zur dritten Gleichung zu addieren, damit dort schließlich y nicht mehr vorkommt.
Das lineare Gleichungssystem sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{lcrcrcrcr} \text{(I)} & & x & + & 4y & + & 6z & = & 1 \\ \text{(II)} & & & - & 5y & - & 5z & = & -1 \\ \text{(III)} & & & & & & 0 & = & 1. \end{array}$$

Das lineare Gleichungssystem ist jetzt in Stufenform. Da die dritte Gleichung eine falsche Aussage enthält, ist das lineare Gleichungssystem unlösbar und somit $\mathbb{L} = \emptyset$.

Lösung b

Um die Lösungsmenge des angegebenen linearen Gleichungssystems zu bestimmen, bringen Sie es zunächst mit dem Gauß-Verfahren auf Stufenform.

Multiplizieren Sie beispielsweise die erste Gleichung auf beiden Seiten mit -2 bzw. -3 und addieren Sie sie dann zur zweiten bzw. dritten Gleichung, so dass in diesen x nicht mehr vorkommt.

Das lineare Gleichungssystem sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{(I)} & 3x & - & 2y & + & 5z & = & 8 \\ \text{(II)} & & & 9y & - & 12z & = & -21 \\ \text{(III)} & & & 3y & - & 16z & = & -55. \end{array}$$

Im nächsten Schritt bietet es sich an, die zweite Gleichung mit $-\frac{1}{3}$ zu multiplizieren und dann zur dritten Gleichung zu addieren, damit dort schließlich y nicht mehr vorkommt.
Das lineare Gleichungssystem sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{(I)} & 3x & - & 2y & + & 5z & = & 8 \\ \text{(II)} & & & 9y & - & 12z & = & -21 \\ \text{(III)} & & & & - & 12z & = & -48. \end{array}$$

Das lineare Gleichungssystem ist jetzt in Stufenform und kann durch Rückwärtseinsetzen gelöst werden. Aus der dritten Gleichung erhält man $z = 4$. Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich $y = 3$. Schließlich erhält man x durch Einsetzen von y und z in die erste Gleichung; es ist $x = -2$. Das lineare Gleichungssystem ist also eindeutig lösbar mit $\mathbb{L} = \{(-2; 3; 4)\}$.

Lösung c

Um die Lösungsmenge des angegebenen linearen Gleichungssystems zu bestimmen, bringen Sie es zunächst mit dem Gauß-Verfahren auf Stufenform.

Multiplizieren Sie beispielsweise die erste Gleichung auf beiden Seiten mit -2 bzw. -3 und addieren Sie sie dann zur zweiten bzw. dritten Gleichung, so dass in diesen x nicht mehr vorkommt.

Das lineare Gleichungssystem sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{lccccccc}
\text{(I)} & x & - & 2y & + & 4z & = & -6 \\
\text{(II)} & & & 2y & - & 5z & = & 12 \\
\text{(III)} & & & 2y & - & 5z & = & 12.
\end{array}$$

Im nächsten Schritt bietet es sich an, die zweite Gleichung mit -1 zu multiplizieren und dann zur dritten Gleichung zu addieren, damit dort schließlich y nicht mehr vorkommt.
Das lineare Gleichungssystem sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{lccccccc}
\text{(I)} & x & - & 2y & + & 4z & = & -6 \\
\text{(II)} & & & 2y & - & 5z & = & 12 \\
\text{(III)} & & & & & 0 & = & 0.
\end{array}$$

Das lineare Gleichungssystem ist jetzt in Stufenform und man erkennt, dass eine Variable frei wählbar ist, d.h. das lineare Gleichungssystem ist lösbar, aber nicht eindeutig lösbar. Setzt man z.B. $z = t \in \mathbb{R}$, so ergibt sich durch Rückwärtseinsetzen $y = 6 + \frac{5}{2}t$ und schließlich $x = 6 + t$ und somit $\mathbb{L} = \left\{(6+t; 6+\frac{5}{2}t; t) \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$.

(Andere Darstellungen der Lösungsmenge sind möglich, je nachdem, welche Variable frei gewählt wird und wie sie gewählt wird.)

Lösung d

Dieses lineare Gleichungssystem ist bereits in Stufenform. An ihr erkennt man, dass zwei Variablen frei wählbar sind. Setzen Sie beispielsweise $y = s \in \mathbb{R}$ und $z = t \in \mathbb{R}$.

Durch Einsetzen von $y = s$ und $z = t$ in die erste Gleichung erhalten Sie dann $x = 3 - 2s + 5t$ und somit $\mathbb{L} = \{(3 - 2s + 5t; s; t) | s, t \in \mathbb{R}\}$.

(Andere Darstellungen der Lösungsmenge sind möglich, je nachdem, welche Variablen frei gewählt werden und wie sie gewählt werden.)

Hinweis

Beachten Sie, dass es auch andere Möglichkeiten gibt, die linearen Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren auf Stufenform zu bringen. Die aufgeführten Wege sind nur eine Variante. Außerdem ist die Stufenform nicht eindeutig. Die Lösungsmenge der linearen Gleichungssysteme in c) und d) haben darüber hinaus verschiedene Darstellungsmöglichkeiten. Abgesehen davon sind die Lösungsmengen in der jeweiligen Teilaufgabe jedoch immer gleich.

ÜBUNG 3

Welche Lösungsmengen sind für das folgende lineare Gleichungssystem korrekt?

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{(I)} & 2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ \text{(II)} & 4x & - & 4y & + & 2z & = & 1 \\ \text{(III)} & 2x & - & 5y & + & z & = & -1 \end{array}$$

a) $\mathbb{L} = \left\{(2 - \frac{1}{2}s; \frac{1}{2}; -\frac{5}{2} + s)\middle| s \in \mathbb{R}\right\}$

b) $\mathbb{L} = \left\{(-3 - t; \frac{1}{2}; 1 + 2t)\middle| t \in \mathbb{R}\right\}$

c) $\mathbb{L} = \emptyset$

d) $\mathbb{L} = \left\{(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}t; \frac{1}{2}; t)\middle| t \in \mathbb{R}\right\}$

e) $\mathbb{L} = \left\{(r; \frac{1}{2}; \frac{3}{2} - 2r)\middle| r \in \mathbb{R}\right\}$

f) $\mathbb{L} = \left\{(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})\right\}$

g) $\mathbb{L} = \left\{(r; s; 3 - 2r - 3s) | r, s \in \mathbb{R}\right\}$

Antwort

Die Lösungsmengen in a), d) und e) sind korrekt. Es handelt sich hierbei um verschiedene Darstellungen derselben Lösungsmenge.

Lösung

Um zu entscheiden, welche Lösungsmengen für das lineare Gleichungssystem korrekt sind, prüfen Sie zuerst die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems. Dazu bringen Sie es mit dem Gauß-Verfahren auf Stufenform.

Multiplizieren Sie beispielsweise die erste Gleichung auf beiden Seiten mit -2 bzw. -1 und addieren Sie sie dann zur zweiten bzw. dritten Gleichung, so dass in diesen x nicht mehr vorkommt.

Das lineare Gleichungssystem sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{(I)} & 2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ \text{(II)} & & - & 10y & & & = & -5 \\ \text{(III)} & & - & 8y & & & = & -4. \end{array}$$

Die zweite bzw. dritte Gleichung lässt sich hier noch vereinfachen, indem man auf beiden Seiten

durch -5 bzw. -4 teilt.
Das lineare Gleichungssystem sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{(I)} & 2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\
\text{(II)} & & & 2y & & & = & 1 \\
\text{(III)} & & & 2y & & & = & 1.
\end{array}$$

Multipliziert man nun die zweite Gleichung mit -1 und addiert sie dann zur dritten Gleichung dazu, so enthält die dritte Gleichung schließlich y nicht mehr.
Das lineare Gleichungssystem sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{(I)} & 2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\
\text{(II)} & & & 2y & & & = & 1 \\
\text{(III)} & & & & & 0 & = & 0.
\end{array}$$

Das lineare Gleichungssystem ist jetzt in Stufenform und man erkennt, dass genau eine Variable frei wählbar ist, allerdings nicht y, da aus der zweiten Gleichung $y = \frac{1}{2}$ folgt.

Aufgrund dieser Feststellung scheiden die Lösungsmengen in c), f) und g) schon mal als korrekte Lösungsmengen aus.

Bei den restlichen Lösungsmengen muss durch Einsetzen in das lineare Gleichungssystem geprüft werden, ob die angegebenen Lösungsvorschläge das lineare Gleichungssystem lösen.

Das Tripel aus a) beispielsweise erfüllt die Gleichungen (I) und (II) aus der Stufenform, denn $2 \cdot (2 - \frac{1}{2}s) + 3 \cdot \frac{1}{2} + (-\frac{5}{2} + s) = 4 - s + \frac{3}{2} - \frac{5}{2} + s = 3$ und $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$. Somit ist diese Lösungsmenge korrekt.
Analog erfüllen die Tripel aus d) und e) die Gleichungen (I) und (II) aus der Stufenform, nicht aber das Tripel aus b).

Insgesamt sind also die Lösungsmengen in a), d) und e) korrekt.

Hinweis

Beachten Sie, dass es auch andere Möglichkeiten gibt, das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren auf Stufenform zu bringen. Der aufgeführte Weg ist nur eine Variante. Außerdem ist die Stufenform nicht eindeutig, die Antwort beeinflusst dies aber nicht.

Warnung

Es genügt hier nicht, nur die jeweils angegebenen Lösungsvorschläge für x, y und z in die Gleichungen des linearen Gleichungssystems einzusetzen und zu schauen, ob alle drei Gleichungen erfüllt sind. Damit lässt sich nur feststellen, ob die angegebene Lösungsmenge falsch ist. Sind alle Gleichungen erfüllt, heißt das nur, dass die gegebene Lösung zur Lösungsmenge gehört, nicht aber, dass die Lösungsmenge damit auch vollständig ist.

In der vorliegenden Aufgabe ist z.B. das Tripel $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems, $\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)\right\}$ ist aber falsch, da die Lösungsmenge noch nicht vollständig ist.

ÜBUNG 4

Durch die Punkte $P = (-1; -4)$, $Q = (1; 6)$ und $R = (3; 0)$ geht genau eine Parabel. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten a, b und c der Parabelgleichung $y = ax^2 + bx + c$ auf und bestimmen Sie dessen Lösungsmenge und damit die Gleichung der Parabel, die durch die Punkte P, Q und R geht.

Antwort

Das lineare Gleichungssystem für die Koeffizienten lautet

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{(I)} & a & - & b & + & c & = & -4 \\ \text{(II)} & a & + & b & + & c & = & 6 \\ \text{(III)} & 9a & + & 3b & + & c & = & 0 \end{array}$$

und dessen Lösungsmenge ist

$$\mathbb{L} = \{(-2; 5; 3)\},$$

d.h. die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems für a, b und c ist $a = -2$, $b = 5$ und $c = 3$.

Die Gleichung der Parabel, die durch die Punkte P, Q und R geht, ist somit $y = -2x^2 + 5x + 3$.

Lösung

Da die drei Punkte P, Q und R auf einer Parabel mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ liegen sollen, müssen ihre Koordinaten diese Gleichung jeweils erfüllen.

Setzt man $P = (-1; -4)$ in die Parabelgleichung ein, also $x = -1$ und $y = -4$, so folgt $-4 = a - b + c$. Analog folgt durch Einsetzen von $Q = (1; 6)$, dass $6 = a + b + c$, und durch Einsetzen von $R = (3; 0)$, dass $0 = 9a + 3b + c$.

Dies führt auf das folgende lineare Gleichungssystem für die Koeffizienten a, b und c:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{(I)} & a & - & b & + & c & = & -4 \\ \text{(II)} & a & + & b & + & c & = & 6 \\ \text{(III)} & 9a & + & 3b & + & c & = & 0. \end{array}$$

Die Lösungsmenge dieses linearen Gleichungssystems erhält man nun durch Anwendung des Gauß-Verfahrens.

Multiplizieren Sie beispielsweise die erste Gleichung auf beiden Seiten mit -1 und addieren Sie sie dann zur zweiten bzw. dritten Gleichung, so dass in diesen c nicht mehr vorkommt.

Das lineare Gleichungssystem sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{(I)} & a & - & b & + & c & = & -4 \\ \text{(II)} & & & 2b & & & = & 10 \\ \text{(III)} & 8a & + & 4b & & & = & 4. \end{array}$$

Auch wenn das lineare Gleichungssystem noch nicht in Stufenform ist, lässt sich seine Lösungsmenge bereits jetzt ermitteln.
Aus der zweiten Gleichung folgt nämlich sofort $b = 5$. Einsetzen von b in die dritte Gleichung ergibt dann $8a + 20 = 4$ und somit $a = -2$. Zuletzt lässt sich c durch Einsetzen von a und b in die erste Gleichung bestimmen. Es ergibt sich $-2 - 5 + c = -4$, woraus $c = 3$ folgt.

Anmerkung:
Um das lineare Gleichungssystem in Stufenform zu bringen, hätte man entweder noch in der dritten Gleichung b eliminieren müssen oder aber auch einfach die zweite und dritte Gleichung vertauschen können.

Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems ist somit $\mathbb{L} = \{(-2; 5; 3)\}$ und die Gleichung der Parabel, die durch die Punkte P, Q und R geht lautet $y = -2x^2 + 5x + 3$.

Hinweis

Beachten Sie, dass es auch andere Möglichkeiten gibt, das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren umzuformen. Der aufgeführte Weg ist nur eine Variante. Außerdem ist die Stufenform nicht eindeutig, die Antworten beeinflusst dies aber nicht.

4. PARAMETERABHÄNGIGE LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziel

- Sie können die Lösbarkeit von einfachen parameterabhängigen linearen Gleichungssystemen diskutieren.

4.1 Parameterabhängige lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) kann auch von einem oder mehreren Parametern abhängen. In diesem Fall ändert sich die Lösungsmenge mit den Parameterwerten. Wir beschränken uns hier auf LGS mit nur einem Parameter in einer Gleichung und diskutieren anhand von Beispielen jeweils die Lösbarkeit in Abhängigkeit vom Parameter. Oft ist dafür eine Fallunterscheidung notwendig.

Zum Lösen der LGS wenden wir das im letzten Abschnitt besprochene Gauß-Verfahren an. Bei der Erzeugung der Stufenform vermeidet man möglichst, die Gleichung mit dem Parameter oder ihr Vielfaches zu einer parameterfreien Gleichung zu addieren, da sonst der Parameter anschließend in mehr Gleichungen vorkommt und die Bestimmung der Lösungsmenge dadurch erschwert wird.

Versuchen Sie, in derjenigen Gleichung, die den Parameter enthält, möglichst viele Variablen zu eliminieren.

Im ersten Beispiel steht der Parameter auf der rechten Seite des Gleichungssystems.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \text{(I)} & - & 2x & + & y & + & 4z & = & -2 & \\ \text{(II)} & - & 2x & + & y & + & 5z & = & 1 & \mid -\text{(I)} \\ \text{(III)} & & 2x & - & y & - & 6z & = & -2+\alpha & \mid +\text{(I)} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \text{(I)} & - & 2x & + & y & + & 4z & = & -2 & \\ \text{(II)} & & & & & & z & = & 3 & \\ \text{(III)} & & & & & - & 2z & = & -4+\alpha & \mid +2\cdot\text{(II)} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \text{(I)} & - & 2x & + & y & + & 4z & = & -2 \\ \text{(II)} & & & & & & z & = & 3 \\ \text{(III)} & & & & & & 0 & = & 2+\alpha \end{array}$$

Das LGS befindet sich jetzt in Stufenform. Die letzte Gleichung ist nur dann erfüllt, wenn $\alpha = -2$ gilt.

1. Ist $\alpha \neq -2$, so stellt (III) einen Widerspruch dar, und das LGS ist nicht lösbar.

$$\mathbb{L} = \emptyset, \qquad \text{falls} \quad \alpha \neq -2.$$

2. Falls $\alpha = -2$, kann die Gleichung $0 = 0$ gestrichen werden. Man hat ein unterbestimmtes System in Stufenform mit zwei Gleichungen für insgesamt drei Variablen. Das LGS ist also lösbar, die Lösung aber nicht eindeutig. Wir führen einen reellen Parameter t für y ein, setzen also $y = t$, und erhalten damit

$$\text{(II)} \qquad z = 3,$$

$$\text{(I)} \qquad x = 7 + \frac{1}{2}t.$$

Jedes Zahlentripel der Form $\left(7 + \frac{1}{2}t; t; 3\right)$ ist somit Lösung des LGS. Die Lösungsmenge ist

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(7 + \frac{1}{2}t; t; 3\right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \text{falls} \quad \alpha = -2.$$

Im folgenden zweiten Beispiel steht der Parameter in einem der Koeffizienten (d. h. Vorfaktoren zu den Variablen) auf der linken Seite.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
(\mathrm{I}) & x & - & 2y & & & = & 0 \\
(\mathrm{II}) & & & y & + & \frac{1}{3}z & = & -1 \\
(\mathrm{III}) & & & (\alpha-3)y & & & = & 1
\end{array}
$$

Das LGS ist bereits in Stufenform.

1. Wenn $\alpha \neq 3$ gilt, lässt sich die dritte Gleichung nach y auflösen.

$$
(\mathrm{III}) \qquad y = \frac{1}{\alpha-3}, \qquad \text{falls} \quad \alpha \neq 3.
$$

   Durch Einsetzten des y-Wertes in (I) und (II) bestimmt man die restlichen Variablen.

$$
(\mathrm{II}) \qquad z = 3\Big(-1 - \frac{1}{\alpha-3}\Big) = \frac{6-3\alpha}{\alpha-3}
$$

$$
(\mathrm{I}) \qquad x = \frac{2}{\alpha-3}
$$

   Das LGS besitzt somit eine eindeutige, parameterabhängige Lösung. Es gilt also

$$
\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{2}{\alpha-3}; \frac{1}{\alpha-3}; \frac{6-3\alpha}{\alpha-3} \right) \right\}, \qquad \text{falls} \quad \alpha \neq 3.
$$

2. Falls $\alpha = 3$, lautet die dritte Gleichung $0 = 1$ und stellt einen Widerspruch dar. Deshalb ist das LGS nicht lösbar, d. h.

$$
\mathbb{L} = \emptyset, \qquad \text{falls} \quad \alpha = 3.
$$

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcrcrcl} (\mathrm{I}) & x & + & 4y & + & 3z & = & 2 \\ (\mathrm{II}) & x & + & y & + & z & = & 2 \\ (\mathrm{III}) & 3x & + & 3y & + & z & = & a \end{array}$$

a) eindeutig lösbar, b) lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, c) unlösbar?
Bestimmen Sie auch die jeweilige Lösungsmenge.

Antwort

a) Das lineare Gleichungssystem ist für alle $a \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar und die (parameterabhängige) Lösungsmenge lautet $\mathbb{L} = \left\{\left(1 + \frac{1}{6}a; -2 + \frac{1}{3}a; 3 - \frac{1}{2}a\right)\right\}$.

b) Das lineare Gleichungssystem ist für kein $a \in \mathbb{R}$ lösbar, aber nicht eindeutig lösbar.

c) Das lineare Gleichungssystem ist für kein $a \in \mathbb{R}$ unlösbar.

Lösung

Um zu entscheiden, für welche $a \in \mathbb{R}$ das angegebene lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar (genau eine Lösung), lösbar, aber nicht eindeutig lösbar (unendlich viele Lösungen) bzw. unlösbar (keine Lösung) ist, bringen Sie das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren auf Stufenform.

Das lineare Gleichungssystem hat beispielsweise folgende Stufenform:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} (\mathrm{I}) & x & + & 4y & + & 3z & = & 2 \\ (\mathrm{II}) & & & 3y & + & 2z & = & 0 \\ (\mathrm{III}) & & & & - & 2z & = & a-6. \end{array}$$

Für alle $a \in \mathbb{R}$ kann die dritte Gleichung nach z aufgelöst werden. Durch Rückwärtseinsetzen erhält man schließlich auch x und y, das lineare Gleichungssystem hat somit für alle $a \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung.

Aus der Stufenform kann auch die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems bestimmt werden. Sie besteht für jedes $a \in \mathbb{R}$ aus der von a abhängigen, eindeutigen Lösung, die sich durch Rückwärtseinsetzen ergibt.

Aus der dritten Gleichung erhält man $z = 3 - \frac{1}{2}a$. Einsetzen von z in die zweite Gleichung liefert $y = -2 + \frac{1}{3}a$. Schließlich ergibt sich mit der ersten Gleichung $x = 1 + \frac{1}{6}a$. Es ist somit $\mathbb{L} = \left\{\left(1 + \frac{1}{6}a; -2 + \frac{1}{3}a; 3 - \frac{1}{2}a\right)\right\}$.

Hinweis

Die Stufenform ist nicht eindeutig. Wenn Sie das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren lösen, können Sie eine andere Stufenform erhalten. An den Ergebnissen ändert dies nichts.

Beachten Sie außerdem, dass die Lösungsmenge in a) hier keine andere Darstellungsmöglichkeit besitzt.

ÜBUNG 2

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{(I)} & 5x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \\ \text{(II)} & 15x & + & 9y & + & 4z & = & 3 \\ \text{(III)} & 5x & + & 3y & + & 4z & = & a \end{array}$$

a) eindeutig lösbar, b) lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, c) unlösbar?
Bestimmen Sie auch die jeweilige Lösungsmenge.

Antwort

a) Das lineare Gleichungssystem ist für kein $a \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar.

b) Das lineare Gleichungssystem ist für $a = 1$ lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, die Lösungsmenge ist in diesem Fall $\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{5}t; t; 0 \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$. (Andere Darstellungen der Lösun

c) Das lineare Gleichungssystem ist für alle $a \neq 1$ unlösbar, die Lösungsmenge ist in diesen Fällen $\mathbb{L} = \emptyset$.

Lösung

Um zu entscheiden, für welche $a \in \mathbb{R}$ das angegebene lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar (genau eine Lösung), lösbar, aber nicht eindeutig lösbar (unendlich viele Lösungen) bzw Lösung) ist, bringen Sie das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren auf Stufenform.

Das lineare Gleichungssystem hat beispielsweise folgende Stufenform:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{(I)} & 5x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \\ \text{(II)} & & & & - & 2z & = & 0 \\ \text{(III)} & & & & & 0 & = & a-1. \end{array}$$

Für $a \neq 1$ steht in der dritten Gleichung eine falsche Aussage, das lineare Gleichungssystem ist in diesen Fällen unlösbar und es ist $\mathbb{L} = \emptyset$.

Für $a = 1$ lautet die dritte Gleichung $0 = 0$ und das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.

Aus der Stufenform kann für $a = 1$ auch die Lösungsmenge bestimmt werden.

Für $a = 1$ lautet die dritte Gleichung wie bereits gesagt $0 = 0$ und man kann eine Variable gleich einem Parameter t setzen, allerdings nicht z, das durch die zweite Gleichung eindeutig Daher setzt man z.B. $y = t \in \mathbb{R}$ und erhält durch Einsetzen von y und z in die erste Gleichung $x = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}t$. Es ist somit für $a = 1$ $\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{5}t; t; 0 \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$.

(Andere Darstellungen der Lösungsmenge sind möglich, je nachdem, welche Variable frei gewählt wird und wie sie gewählt wird.)

Hinweis

Die Stufenform ist nicht eindeutig. Wenn Sie das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren lösen, können Sie eine andere Stufenform erhalten. An den Ergebnissen ändert dies n

ÜBUNG 3

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcrcrcl} (\mathrm{I}) & x & - & y & + & 4z & = & 1 \\ (\mathrm{II}) & 3x & - & 2y & + & 3z & = & 4 \\ (\mathrm{III}) & 5x & - & 3y & + & az & = & 7 \end{array}$$

a) eindeutig lösbar, b) lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, c) unlösbar?
Bestimmen Sie auch die jeweilige Lösungsmenge.

Antwort

a) Das lineare Gleichungssystem ist für alle $a \neq 2$ eindeutig lösbar, die Lösungsmenge ist in diesen Fällen $\mathbb{L} = \{(2; 1; 0)\}$.

b) Das lineare Gleichungssystem ist für $a = 2$ lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, die Lösungsmenge ist in diesem Fall $\mathbb{L} = \{(2 + 5t; 1 + 9t; t) | t \in \mathbb{R}\}$. (Andere Darstellungen der Lö

c) Das lineare Gleichungssystem ist für kein $a \in \mathbb{R}$ unlösbar.

Lösung

Um zu entscheiden, für welche $a \in \mathbb{R}$ das angegebene lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar (genau eine Lösung), lösbar, aber nicht eindeutig lösbar (unendlich viele Lösungen) bzw
bringen Sie das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren auf Stufenform.

Das lineare Gleichungssystem hat beispielsweise folgende Stufenform:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} (\mathrm{I}) & x & - & y & + & 4z & = & 1 \\ (\mathrm{II}) & & & y & - & 9z & = & 1 \\ (\mathrm{III}) & & & & & (a-2)z & = & 0. \end{array}$$

Für $a = 2$ lautet die dritte Gleichung $0 = 0$. Das lineare Gleichungssystem hat in diesem Fall unendlich viele Lösungen.

Für $a \neq 2$ kann die dritte Gleichung nach z aufgelöst werden (es ist dann $z = 0$), und durch Rückwärtseinsetzen erhält man schließlich auch x und y. Das lineare Gleichungssystem hat
eindeutige Lösung, es ist eindeutig lösbar.

Aus der Stufenform kann in den jeweiligen Fällen auch die Lösungsmenge bestimmt werden.

Für $a = 2$ lautet die dritte Gleichung wie bereits gesagt $0 = 0$ und man kann eine Variable gleich einem Parameter t setzen, z.B. $z = t \in \mathbb{R}$. Durch Einsetzen von $z = t$ in die zweite G
$y = 1 + 9t$. x ergibt sich schließlich aus der ersten Gleichung zu $x = 2 + 5t$. Somit ist die Lösungsmenge des parameterabhängigen linearen Gleichungssystems für $a = 2$ gegeben d
$\mathbb{L} = \{(2 + 5t; 1 + 9t; t) | t \in \mathbb{R}\}$.

(Andere Darstellungen der Lösungsmenge sind möglich, je nachdem, welche Variable frei gewählt wird und wie sie gewählt wird.)

Für $a \neq 2$ erhält man aus der dritten Gleichung $z = 0$ und durch Rückwärtseinsetzen ergibt sich $y = 1$ und $x = 2$. Die Lösungsmenge des parameterabhängigen linearen Gleichungss
$\mathbb{L} = \{(2; 1; 0)\}$.

Hinweis

Die Stufenform ist nicht eindeutig. Wenn Sie das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren lösen, können Sie eine andere Stufenform erhalten. An den Ergebnissen ändert dies n

ÜBUNG 4

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{(I)} & x & - & 5y & + & z & = & -6 \\ \text{(II)} & -6x & + & 17y & - & 6z & = & -3 \\ \text{(III)} & 2x & + & 3y & - & az & = & -1 \end{array}$$

a) eindeutig lösbar, b) lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, c) unlösbar?
Bestimmen Sie auch die jeweilige Lösungsmenge.

Antwort

a) Das lineare Gleichungssystem ist für alle $a \neq -2$ eindeutig lösbar, die (parameterabhängige) Lösungsmenge ist in diesen Fällen $\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{9a-10}{a+2}; 3; \frac{28}{a+2} \right) \right\}$.

b) Das lineare Gleichungssystem ist für kein $a \in \mathbb{R}$ lösbar, aber nicht eindeutig lösbar.

c) Das lineare Gleichungssystem ist für $a = -2$ unlösbar, die Lösungsmenge ist in diesem Fall $\mathbb{L} = \emptyset$.

Lösung

Um zu entscheiden, für welche $a \in \mathbb{R}$ das angegebene lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar (genau eine Lösung), lösbar, aber nicht eindeutig lösbar (unendlich viele Lösungen) bzw. unlösbar (keine Lösung) ist, bringen Sie das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren auf Stufenform.

Das lineare Gleichungssystem hat beispielsweise folgende Stufenform:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{(I)} & x & - & 5y & + & z & = & -6 \\ \text{(II)} & & - & 13y & & & = & -39 \\ \text{(III)} & & & & & (-a-2)z & = & -28. \end{array}$$

Für $a = -2$ lautet die dritte Gleichung $0 = -28$ und stellt eine falsche Aussage dar. Das lineare Gleichungssystem ist in diesem Fall unlösbar, es ist $\mathbb{L} = \emptyset$.

Für $a \neq -2$ kann die dritte Gleichung nach z aufgelöst werden, und durch Rückwärtseinsetzen erhält man schließlich auch x und y. Das lineare Gleichungssystem ist in diesem Fall also eindeutig lösbar.

Aus der Stufenform kann für $a \neq -2$ auch die Lösungsmenge bestimmt werden.

Für $a \neq -2$ enthält die Lösungsmenge die eindeutige, von a abhängige Lösung des linearen Gleichungssystems. Aus der dritten Gleichung ergibt sich $z = \frac{28}{a+2}$, während aus der zweiten Gleichung direkt $y = 3$ folgt. Durch Einsetzen von y und z in die erste Gleichung erhält man schließlich $x = \frac{9a-10}{a+2}$. Es ist somit $\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{9a-10}{a+2}; 3; \frac{28}{a+2} \right) \right\}$.

Hinweis

Die Stufenform ist nicht eindeutig. Wenn Sie das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren lösen, können Sie eine andere Stufenform erhalten. An den Ergebnissen ändert dies nichts.

Beachten Sie außerdem, dass die Lösungsmenge in a) hier keine andere Darstellungsmöglichkeit besitzt.