1 AUSSAGEN, FOLGERUNGEN, ÄQUIVALENZEN UND LÖSUNGSMENGEN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie können überprüfen, ob ein Satz eine *Aussage* ist und diese auf ihren *Wahrheitsgehalt* überprüfen.
- Sie können den Unterschied zwischen einer *Folgerung* und einer *Äquivalenz* erklären und deren Symbole in einer Gleichungsumformung einsetzen.
- Sie können verschiedene *Äquivalenzumformungen* durchführen.
- Sie können die *Lösungsmenge* einer Gleichung bestimmen.

In diesem Abschnitt wird der Begriff der mathematischen Aussage erläutert. Ebenso werden Folgerungen von Aussagen aus anderen, gegebenen Aussagen und die Gleichwertigkeit von Aussagen diskutiert. Schließlich wird ein spezieller Typ von Aussagen, nämlich Gleichungen, betrachtet. Dies führt auf den Begriff ihrer Lösung als die Menge aller Variablenwerte, für die die Aussage wahr, d.h. die Gleichung erfüllt ist.

1.1 Aussagen und Folgerungen

Eine *(mathematische) Aussage* ist ein Wortgebilde, von dem man nachprüfen kann, ob es wahr oder falsch ist.

In Definition 1.1 ist die *prinzipielle* Nachprüfbarkeit gemeint. So ist der Satz „Es regnet.” eine Aussage, denn durch einen Blick aus dem Fenster können wir prüfen, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Aber auch, wenn wir uns in einem fensterlosen Keller befinden, haben wir keinen Zweifel, dass der Satz „Es regnet.” prinzipiell überprüfbar ist. Auch

$$x^2 = 1 \qquad (1)$$

ist eine Aussage; für $x = 1$ und $x = -1$ ist (1) wahr, und für alle anderen reellen Zahlen ist (1) falsch - aber stets ist (1) entweder wahr oder falsch (und nicht „weder wahr noch falsch").

Zum Verständnis des Begriffs der Aussage ist es nützlich, Beispiele von Sätzen zu geben, die *keine* Aussagen sind: „Ein Auto" ist keine Aussage, „Sechs Richtige im Lotto" ist keine Aussage, und auch ein einzelner Term,

$$\frac{x^2}{x^2+1} \qquad (2)$$

ist keine Aussage. An diesem Beispiel erkennt man die Bedeutung der Gleichheits- und Ungleichheitszeichen $=,\ <,\ >,\ \leq$ und $\geq$: Erst wenn Terme durch diese (und noch viele weitere) Zeichen miteinander in Beziehung gesetzt werden, entstehen Aussagen. Als Faustregel gilt, dass ein *ganzer deutscher Satz* meist eine Aussage im mathematischen Sinn ist.

Sind zwei Aussagen $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ gegeben, und ist $\mathscr{B}$ wahr, falls $\mathscr{A}$ wahr ist, so heißt $\mathscr{B}$ Folgerung aus $\mathscr{A}$. Wir sagen dann auch, $\mathscr{B}$ folge aus $\mathscr{A}$ oder $\mathscr{A}$ impliziere $\mathscr{B}$, und wir schreiben

$$\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}. \qquad (3)$$

- Wählen wir für $\mathscr{A}$: „Es regnet." und für $\mathscr{B}$: „Die Straße ist nass.", so ist $\mathscr{B}$ eine Folgerung aus $\mathscr{A}$, d.h. $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$.
  Die Umkehrung ist in diesem Fall jedoch nicht korrekt, denn die Straße könnte auch aus anderen Gründen nass sein. Wir sehen also, dass $\mathscr{B} \not\Rightarrow \mathscr{A}$.

- Wählen wir für $\mathscr{A}$: „$x = 1$." und für $\mathscr{B}$: „$x^2 = 1$.", so ist auch diesmal $\mathscr{B}$ eine Folgerung aus $\mathscr{A}$, also $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$.
  Und auch hier gilt nicht die Umkehrung, denn für $x = -1$ ist Aussage $\mathscr{B}$ wahr [weil $(-1)^2 = 1$] und $\mathscr{A}$ falsch [weil $-1 \neq 1$], d.h. $\mathscr{B} \not\Rightarrow \mathscr{A}$.

1.2 Äquivalenz und Äquivalenzumformungen

Zwei Aussagen $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ heißen *äquivalent* oder *gleichwertig*, falls $\mathscr{A}$ genau dann wahr ist, wenn $\mathscr{B}$ wahr ist. In diesem Fall schreiben wir

$$\mathscr{A} \Leftrightarrow \mathscr{B}. \qquad (4)$$

Die Gleichwertigkeit zweier Aussagen $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ lässt sich auch so formulieren: Aus $\mathscr{A}$ folgt $\mathscr{B}$ und aus $\mathscr{B}$ folgt $\mathscr{A}$, d.h. $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A}$.

Äquivalenzumformungen wandeln Aussagen in gleichwertige Aussagen um.
So ist die Aussage $\mathscr{A}$: „$3y - 3x = 9x$" gleichwertig mit $\mathscr{B}$: „$3y = 12x$" oder auch mit $\mathscr{C}$: „$y = 4x$", denn die Werte für x und y, für die die Aussage $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ oder $\mathscr{C}$ jeweils wahr ist (d.h. die jeweilige Gleichung erfüllt ist), ist für alle drei Gleichungen gleich.

Diese Umwandlung geschieht durch Anwendung mathematischer Operationen (hier: *Addition von 3x auf beiden Seiten der Gleichung* und *Division beider Seiten der Gleichung durch 3*). Damit die Gleichwertigkeit der Aussagen leichter nachvollzogen werden kann, vermerkt man häufig die angewandte Operation auf der rechten Seite neben einem senkrechten Strich.

Für Gleichungen sind Äquivalenzumformungen solche Umformungen, die die Lösungsmenge nicht verändern.

Für Gleichungen sind folgende Operationen Äquivalenzumformungen:

- Vertauschen der Gleichungsseiten, $a = b \Leftrightarrow b = a$;
- auf beiden Seiten das Gleiche addieren oder subtrahieren, $a = b \Leftrightarrow a \pm c = b \pm c$;
- beide Seiten mit einem Faktor $m \neq 0$ (darf nicht Null sein!) multiplizieren, $a = b \Leftrightarrow m \cdot a = m \cdot b$;
- beide Seiten durch einen Dividend $m \neq 0$ (darf nicht Null sein!) dividieren, $a = b \Leftrightarrow \frac{a}{m} = \frac{b}{m}$.

Potenzieren, Wurzelziehen und Quadrieren sind im Allgemeinen keine Äquivalenzumformungen!

Für die obigen Aussagen $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ oder $\mathscr{C}$ sieht dies so aus:

$$
\begin{aligned}
& \mathscr{A}: 3y - 3x && = 9x && |+3x && (5) \\
\Leftrightarrow\ & \mathscr{B}: 3y && = 12x && |: 3 && (6) \\
\Leftrightarrow\ & \mathscr{C}: y && = 4x. && && (7)
\end{aligned}
$$

Wir lassen ab jetzt die Buchstaben $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ u.s.w. für die Kennzeichnung der Aussagen weg.

1. Seiten vertauschen

$$\begin{aligned} & 3x + 12 && = 4 \\ \Leftrightarrow\quad & 4 && = 3x + 12. \end{aligned}$$

2. Gleiche Zahl addieren oder subtrahieren

$$\begin{aligned} & 3x + 12 && = 4 && \vert -3 \\ \Leftrightarrow\quad & 3x + 12 - 3 && = 4 - 3 \\ \Leftrightarrow\quad & 3x + 9 && = 1. \end{aligned}$$

3. Gleiche Zahl $\neq 0$ multiplizieren oder dividieren

$$\begin{aligned} & 3x + 12 && = 4 && \vert : 3 \\ \Leftrightarrow\quad & (3x) : 3 + 12 : 3 && = 4 : 3 \\ \Leftrightarrow\quad & x + 4 && = \tfrac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 5(3x - 5) + 2x && = 7(3 - 2x) + 16 \\ \Leftrightarrow\quad & 15x - 25 + 2x && = 21 - 14x + 16 \\ \Leftrightarrow\quad & 17x - 25 && = 37 - 14x && \vert +14x \\ \Leftrightarrow\quad & 31x - 25 && = 37 && \vert +25 \\ \Leftrightarrow\quad & 31x && = 62 && \vert : 31 \\ \Leftrightarrow\quad & x && = \tfrac{62}{31} \\ \Leftrightarrow\quad & x && = 2. \\ & \mathbb{L} && = \{2\} \end{aligned}$$

Äquivalenzumformungen und Folgerungen lassen sich auch kombinieren. Durch die Schreibweise wie in Gleichung (5) lässt sich gut verfolgen, welche der Aussagen Folgerung anderer Aussagen sind, z.B.

$$\begin{aligned} & 3y - 3x && = 9x && \vert +3x && (8) \\ \Leftrightarrow\quad & 3y && = 12x && \vert : 3 && (9) \\ \Leftrightarrow\quad & y && = 4x && \vert (\cdot)^2 && (10) \\ \Rightarrow\quad & y^2 && = 16x^2 && \vert -5 && (11) \\ \Leftrightarrow\quad & y^2 - 5 && = 16x^2 - 5. && && (12) \end{aligned}$$

Beachte, dass Gleichung (11) nur eine Folgerung ($\Rightarrow$) aus Gleichung (10), aber nicht gleichwertig ($\Leftrightarrow$) ist, denn in (10) müssen x und y dasselbe Vorzeichen haben, während dies in (11) keine Rolle spielt.

1.3 Gleichungen und ihre Lösungen

Gleichungen, die Variablen enthalten, sind eine spezielle Form von Aussagen. Manche Gleichungen haben genau eine Lösung, auf die man durch Äquivalenzumformungen geführt wird, beispielsweise die Gleichung $2x + 1 = 8x - 11$:

$$\begin{aligned} & 2x+1 &&= 8x-11 && |-2x+11 && (13)\\ \Leftrightarrow\ & 12 &&= 6x && |:6 && (14)\\ \Leftrightarrow\ & x &&= 2. && && (15)\end{aligned}$$

Durch Äquivalenzumformungen wurde die ursprüngliche Gleichung (13) in die gleichwertige Gleichung (15) überführt, aus der sich die einzige Lösung $x = 2$ direkt ablesen lässt.
Viele Gleichungen haben jedoch mehrere oder gar keine oder sogar unendlich viele Lösungen. Deshalb ist es vernünftig, von der *Lösungsmenge* zu sprechen.

Die Menge aller Lösungen einer Gleichung $f(x) = 0$ wird als Lösungsmenge $\mathbb{L}$ bezeichnet,

$$\mathbb{L} \;= \{x_0 \mid f(x_0) = 0\}. \qquad (16)$$

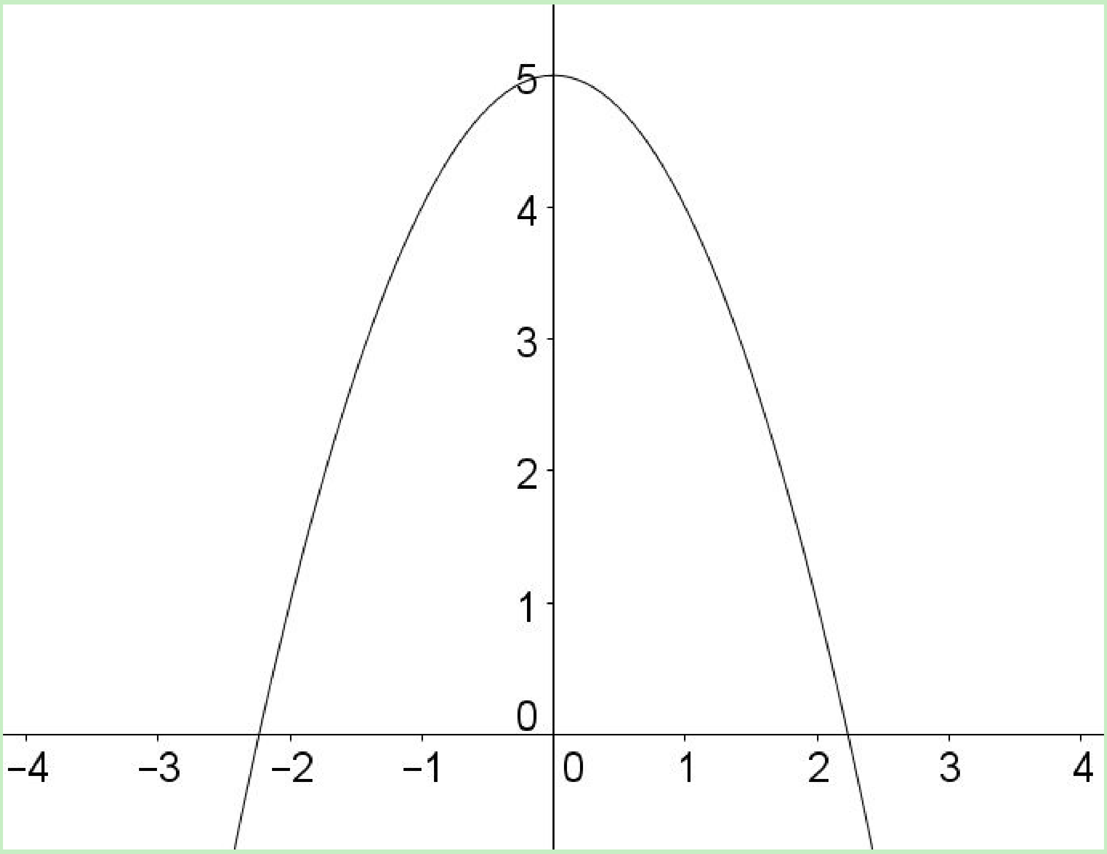
- Besitzt die betrachtete Gleichung genau eine Lösung x_0 - so, wie $x_0 = 2$ für (13) - so enthält die Lösungsmenge ein einziges Element, $\mathbb{L} = \{x_0\}$.
- Für $3x - 15 = 0$ ist $x_0 = 5$ die einzige Lösung, d.h. $\mathbb{L} = \{5\}$.
- Die Gleichung $x^2 = -1$ besitzt keine reelle Lösung, deshalb ist die Lösungsmenge leer, $\mathbb{L} = \emptyset$
- Die Gleichung $x^2 = 4$ besitzt zwei Lösungen, nämlich $x_+ = 2$ und $x_- = -2$. Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{-2;\ 2\}$.
- Die Gleichung $\sin(x) = 0$ besitzt unendlich viele Lösungen (s.Kap.VI), nämlich alle ganzzahligen Vielfachen von π, d.h. $\mathbb{L} = \{\ldots;\ -2\pi;\ -\pi;\ 0;\ \pi;\ 2\pi;\ \ldots\}$.

Der Lösungsbegriff ist nicht auf eine einzige Variable eingeschränkt. Für eine Gleichung der Form $T(x;\ y) = 0$ sind alle Zahlenpaare $(x_0;\ y_0) \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung, für die $T(x_0;\ y_0) = 0$ gilt.

Betrachtet man etwa die Gleichung $x^2 + y = 5$, so ist eine Lösung dieser Gleichung also nicht ein x-Wert x_0 oder ein y-Wert y_0, sondern ein Zahlenpaar $(x_0;\ y_0) \in \mathbb{R}^2$. Die Lösungsmenge ist somit eine Teilmenge der Ebene $\mathbb{R}^2$. Sie ist gegeben durch

$$\mathbb{L} = \left\{(x_0;\ y_0) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_0^2 + y_0 = 5\right\} = \left\{(x_0;\ 5 - x_0^2) \;\middle|\; x_0 \in \mathbb{R}\right\}, \qquad (17)$$

d.h. die Lösungsmenge ist der Graph der Funktion $y = 5 - x^2$.



Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Überprüfen Sie, ob es sich bei den folgenden Sätzen um Aussagen handelt.

a) Tanz mit mir!

b) Bist du morgen in der Universität?

c) Das Gras auf dem Mond ist immer blau.

d) Ein Fisch.

e) x^5.

f) $x^2 = 16$.

Antworten

a) Nein

b) Nein

c) Ja

d) Nein

e) Nein

f) Ja

Lösung zu a

Der Satz „Tanz mit mir!” ist eine Aufforderung.

Aufforderungen sind keine Aussagen, da diese nicht überprüfbar sind.

Lösung zu b

Der Satz „Bist du morgen in der Universität?” ist eine Frage.

Fragen sind keine Aussagen, da diese nicht überprüfbar sind.

Lösung zu c

Der Satz „Das Gras auf dem Mond ist immer blau.” ist eine Aussage.

Es wird in dieser Aufgabe nicht nach dem Wahrheitsgehalt gefragt, sondern nur nach der Überprüfbarkeit. Man kann davon ausgehen, dass es auf dem Mond kein Gras gibt und, sollte es dort welches geben, dies nicht immer blau sein muss. Die Aussage wäre somit stets als falsch zu bewerten. Da dies jedoch überprüfbar ist, handelt es sich hier um eine Aussage.

Lösung zu d

Der Satz „Ein Fisch." ist kein vollständiger Satz.

Dieser Satz lässt sich nicht überprüfen, daher ist er keine Aussage.

Lösung zu e

Der Term x^5 ist keine Aussage.

Einzelne Terme sind keine Aussagen, da sie nichts beinhalten, was man überprüfen kann.

Lösung zu f

Die Gleichung $x^2 = 16$ ist eine Aussage.

Die Gleichung ist zwar nicht für alle x richtig (da $4^2 = 16$ bzw. $(-4)^2 = 16$ ist, ist die Gleichung also nur für $x = 4$ und $x = -4$ wahr), dennoch ist sie überprüfbar.

ÜBUNG 2

Entscheiden Sie, mit welchem Pfeilsymbol ($\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$) die beiden Aussagen verbunden werden können.

a) $\mathscr{A}$: „$x = 4$" $\mathscr{B}$: „$x^2 = 16$"

b) $\mathscr{A}$: „Paul ist 16 oder älter." $\mathscr{B}$: „Paul darf an Wahlen (Kommunalwahlen etc.) teilnehmen."

c) $\mathscr{A}$: „$x = (a+b)^2$" $\mathscr{B}$: „$x = a^2 + 2ab + b^2$"

Antworten

a) $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$

b) $\mathscr{A} \Leftarrow \mathscr{B}$

c) $\mathscr{A} \Leftrightarrow \mathscr{B}$

Lösung zu a

Es gilt, dass $\mathscr{A}$ in $\mathscr{B}$ eingesetzt eine wahre Aussage ergibt, nämlich $4^2 = 16$. Daher gilt $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$.

Für $x^2 = 16$ gibt es jedoch zwei Lösungen, nämlich $x_1 = 4$ und $x_2 = -4$. Daher gilt $\mathscr{A} \Leftarrow \mathscr{B}$ nicht.

Lösung zu b

Wenn Paul an Wahlen teilnehmen darf, kann man auf jeden Fall davon ausgehen, dass er mindestens 16 Jahre alt ist, denn sonst dürfte er gar nicht wählen gehen. Es gilt daher:
$\mathscr{A} \Leftarrow \mathscr{B}$

Für einige Wahlen gilt jedoch, dass Paul volljährig sein muss. Sollte er also 16 sein, muss er nicht zwangsweise bei allen Wahlen wahlberechtigt sein. Hinzu kommen weitere Gründe, wie das Fehlen der Staatsbürgerschaft, die ihn vom Wahlrecht ausschließen können. Es gilt daher nicht:
$\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$

Lösung zu c

Die rechte Seite der Gleichung ist bei beiden Aussagen Teil der 1. binomischen Formel.

Die Umformung der binomischen Formel ist für alle reellen Zahlen äquivalent. Daher gilt:
$\mathscr{A} \Leftrightarrow \mathscr{B}$

ÜBUNG 3

Die Aussage in einer der Zeilen wird nicht durch die Aussage der darüberstehenden Zeile impliziert. Um die wievielte Zeile handelt es sich?

$$a \neq 0$$

$$\begin{array}{lll}
1. & a & = a \\
2. & a^2 & = a^2 \\
3. & a^2 - a^2 & = a^2 - a^2 \\
4. & a(a-a) & = (a+a)(a-a) \\
5. & a & = a + a \\
6. & 1a & = 2a \\
7. & 1 & = 2
\end{array}$$

Antwort

Es handelt sich um die fünfte Zeile.

Erklärung

Da $a - a = 0$ ist, steht auf der linken Seite der Gleichung in der vierten Zeile: $a(a-a) = a \cdot 0 = 0$. Auf der rechten Seite steht: $(a+a)(a-a) = (a+a) \cdot 0 = 0$. Die Gleichung in der vierten Zeile lautet also eigentlich $0 = 0$.
In der fünften Zeile steht jedoch zusammengefasst $a = 2a$, und da man durch $a \neq 0$ teilen darf: $1 = 2$, also eine falsche Aussage. Der Schritt von der vierten zur fünften Zeile kann also nicht richtig sein, da man aus der wahren Aussage $0 = 0$ nicht die falsche Aussage $1 = 2$ herleiten darf. Falls Sie dachten, dass auch dieser Schritt richtig ist, haben Sie wahrscheinlich in diesem Schritt durch $a - a$, also durch 0 geteilt. Hier sieht man, dass das Teilen durch 0 aus gutem Grund nicht erlaubt ist, denn so kann aus einer wahren Aussage eine falsche gemacht werden.

$$
\begin{aligned}
a &= a && \big|(\cdot)^2 \\
a^2 &= a^2 && \big|-a^2 \\
a^2 - a^2 &= a^2 - a^2 && \big|\text{Ausklammern von } a\text{, bzw. dritte binomische Formel} \\
a(a-a) &= (a+a)(a-a) && \Big|\cdot \tfrac{1}{(a-a)} \text{(nicht erlaubt!)} \\
a &= a + a && \big|\text{Zusammenfassen von } a \\
1a &= 2a && \big|\cdot \tfrac{1}{a} \\
1 &= 2
\end{aligned}
$$

ÜBUNG 4

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der jeweiligen Gleichung, wobei $x \in \mathbb{R}$ ist.

a) $x^3 = 27$

b) $x^2 = -10$

c) $x^2 = 10x$

d) $x^4 + 3 = 0$

Antworten

a) $\mathbb{L} = \{3\}$

b) $\mathbb{L} = \emptyset$

c) $\mathbb{L} = \{0;\ 10\}$

d) $\mathbb{L} = \emptyset$

Lösung zu a

Gesucht ist die dritte Wurzel aus 27, also $x = \sqrt[3]{27}$.

Die einzige Lösung ist hier $x = 3$, nicht auch $x = -3$ (wie bei Quadratzahlen, in denen auch der negative Wert als Lösung für x vorkommt), denn $(-3)^3 = -27$.

Lösung zu b

Das Quadrat einer reellen Zahl ist stets positiv. Daher kann für kein x ein negatives Ergebnis bei x^2 entstehen. Es gibt daher keine Lösung und die Lösungsmenge ist leer.

Lösung zu c

Durch Äquivalenzumformung der Gleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned} & x^2 && = 10x \qquad |-10x \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 10x && = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x(x-10) && = 0. \end{aligned}$$

Aus dieser Linearfaktorzerlegung können wir die beiden Ergebnisse $x_1 = 0$ und $x_2 = 10$ direkt ablesen (Siehe Kapitel II, Abschnitt 3).

Lösung zu d

Durch Umformung erhalten wir die Gleichung:

$$\begin{aligned} & x^4+3 &&= 0 && \mid -3 \\ \Leftrightarrow\quad & x^4 &&= -3 && \\ \Leftrightarrow\quad & (x^2)^2 &&= -3. && \end{aligned}$$

Da das Quadrat $\left(x^2\right)^2$ der reellen Zahl x^2 stets positiv oder gleich Null ist, gibt es keine Zahl $x \in \mathbb{R}$, die $x^4 = -3$ erfüllt. Somit ist die Lösungsmenge leer.

2. LÖSEN LINEARER UND QUADRATISCHER GLEICHUNGEN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie sind mit dem *Lösen linearer Gleichungen* mit Hilfe von Äquivalenz- und Termumformung vertraut.
- Sie besitzen die Fähigkeit, eine *lineare Gleichung aufzustellen*.
- Sie besitzen die Fähigkeit, eine *Diskriminante* zu berechnen.
- Sie besitzen die Fähigkeit, die *binomischen Formeln* zu erkennen und anzuwenden.
- Sie sind mit dem *Lösen quadratischer Gleichungen* mit Hilfe der p-q-Formel und quadratischer Ergänzung vertraut.

2.1 Lineare Gleichungen

Eine Gleichung der Form $bx + c = 0$, wobei $b, c \in \mathbb{R}$ vorgegebene reelle Zahlen mit $b \neq 0$ sind und $x \in \mathbb{R}$ die gesuchte Unbekannte ist, heißt *lineare Gleichung (in x)*.

Mit Hilfe der Äquivalenzumformung

$$\begin{array}{rrcll} & bx + c & = & 0 & \quad |-c \\ \Leftrightarrow & bx & = & -c & \quad |: b \\ \Leftrightarrow & x & = & -\frac{c}{b} & \end{array}$$

sehen wir sofort, dass eine lineare Gleichung in x immer die eindeutige Lösung $x = -\frac{c}{b}$ besitzt, d.h. es gilt

$$\mathbb{L} = \{-\tfrac{c}{b}\}.$$

> Folgende drei Umformungen sind Äquivalenzumformungen und verändern die Lösungsmenge nicht.
>
> 1. Seiten vertauschen
>
> $$\begin{aligned} 5x + 15 &= 10 \\ \Leftrightarrow \quad 10 &= 5x + 15 \end{aligned}$$
>
> 2. Gleiche Zahl addieren oder subtrahieren
>
> $$\begin{aligned} 5x + 15 &= 10 & |-5 \\ \Leftrightarrow \quad 5x + 15 - 5 &= 10 - 5 \\ \Leftrightarrow \quad 5x + 10 &= 5 \end{aligned}$$
>
> 3. Gleiche Zahl $\neq 0$ multiplizieren oder dividieren
>
> $$\begin{aligned} 5x + 15 &= 10 & |:5 \\ \Leftrightarrow \quad (5x):5 + 15:5 &= 10:5 \\ \Leftrightarrow \quad x + 3 &= 2 \end{aligned}$$

Viele Gleichungen lassen sich durch die in Abschnitt 1.2 aufgeführten Äquivalenzumformungen in eine lineare Gleichung überführen.

> $$\begin{aligned} 2(5x-3) + 3x &= 4(6-2x) + 12 \\ \Leftrightarrow \quad 10x - 6 + 3x &= 24 - 8x + 12 \\ \Leftrightarrow \quad 13x - 6 &= 36 - 8x & |+8x \\ \Leftrightarrow \quad 21x - 6 &= 36 & |-36 \\ \Leftrightarrow \quad 21x - 42 &= 0 \end{aligned}$$

2.2 Quadratische Gleichungen

[video-online-only]

Man bezeichnet eine ganzrationale Gleichung als quadratisch, wenn die Unbekannte mit dem Exponenten 2 auftritt (z.B. als x^2), und auch nicht durch Umformungen wegfällt. Außerdem tritt sie nicht mit irgendwelchen Wurzeln oder sonstigen Funktionen auf.

Solche Gleichungen kann man z. B. durch Äquivalenzumformungen zusammenfassen und umsortieren und so die allgemeine Form und die Normalform dieser Gleichungen erhalten.

2.3 Normalform

Eine Gleichung in x der Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit $a \neq 0$ und $b, c \in \mathbb{R}$, heißt *quadratisch*. Speziell bezeichnet man

$$x^2 + px + q = 0,$$

mit $p, q \in \mathbb{R}$, als *quadratische Gleichung in Normalform*.

Nach Division durch a erhält man für jede quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ die quadratische Gleichung $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ in Normalform, die wegen $a \neq 0$ zur ursprünglichen Gleichung äquivalent ist.

Allgemeine Form und Normalform

$$\begin{array}{rrcll} & 2x^2 - 26x - 44 & = & 0 & \mid : 2 \\ \Leftrightarrow & x^2 - 13x - 22 & = & 0 & \end{array}$$

(Das Äquivalenzzeichen „$\Leftrightarrow$" ist in Abschnitt 1 erklärt.)

2.4 p-q-Formel und Diskriminante

Eine Möglichkeit, quadratische Gleichungen zu lösen, ist die Anwendung der p-q-Formel.

Mit der Definition:

$$p = \frac{b}{a} \text{ und } q = \frac{c}{a}$$

lässt sich die Normalform somit als *p-q-Form* schreiben :

$$x^2 + px + q = 0.$$

Folglich besteht die Normalform quadratischer Gleichungen in x immer aus x^2 plus x mit einem Faktor, den man üblicherweise mit p bezeichnet, plus eine Zahl, die man üblicherweise mit q bezeichnet.

Die Summe dieser maximal drei Glieder ergibt 0 (daher heißen die Lösungen auch Nullstellen).

Die Zahlen p und q nennt man auch *Koeffizienten* der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$.
Die Lösung dieser quadratischen Gleichung kann dann mit Hilfe der p-q-Formel berechnet werden.

$x_\pm = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ mit der Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

und der Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{-\frac{p}{2} - \sqrt{D}; -\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right\}$.

Die *Diskriminante* gibt Aufschluss über die Lösungen einer quadratischen Gleichung.

Man unterscheidet 3 Fälle:

$$\begin{array}{lcclll} D & > & 0 & \Rightarrow & \text{Es gibt zwei Lösungen,} \\ D & = & 0 & \Rightarrow & \text{Es gibt eine Lösung,} \\ D & < & 0 & \Rightarrow & \text{Es gibt keine Lösung.} \end{array}$$

In der Mathematik wird häufig $p^2 - 4q$ als *Diskriminante* bezeichnet. Der Grund dafür ist eine andere Schreibweise der p-q-Formel, in der ein Faktor $\frac{1}{2}$ aus der Gleichung ausgeklammert wurde:

$$x_\pm = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right).$$

Eine quadratische Gleichung hat maximal zwei reelle Lösungen.

$$
\begin{array}{rcl}
x^2-6x+5 & = & 0 \\
x_{1,2} & = & 3\pm\sqrt{9-5} \\
\Rightarrow \quad x_1 & = & 3-2=1 \\
\Rightarrow \quad x_2 & = & 3+2=5 \\
\mathbb{L} & = & \{5;\ 1\}
\end{array}
$$

[video-online-only]

2.5 Quadratische Ergänzung

Die Summe x^2+px kann durch Addition einer Konstanten zu einem vollständigen Quadrat ergänzt und dann kann die erste binomische Formel angewandt werden:

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2+px \\
= & x^2+2\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2 \\
= & \left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2
\end{array}
$$

Fügt man dies in die ursprüngliche quadratische Gleichung ein, erhält man:

$$
\begin{array}{rcll}
x^2+px+q & = & 0 & \Big\vert -q \\
\Leftrightarrow \quad x^2+px & = & -q & \Big\vert +\left(\frac{p}{2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow \quad x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2 & = & -q+\left(\frac{p}{2}\right)^2 & \\
\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 & = & -q+\left(\frac{p}{2}\right)^2 &
\end{array}
$$

Die äquivalente Umformung der quadratischen Gleichung in Normalform

$$
x^2+px+q = 0
$$

in

$$
\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = -q+\left(\frac{p}{2}\right)^2
$$

wird als *quadratische Ergänzung* bezeichnet.

Bei der Umformung kommt hier die 1. binomische Formel zum Einsatz. Siehe hierfür Abschnitt I.1 .

$$\begin{aligned}
& x^2+8x+7 &&= 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2+8x+4^2-4^2+7 &&= 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (x+4)^2-16+7 &&= 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (x+4)^2-9 &&= 0 && \quad |+9 \\
\Leftrightarrow\quad & (x+4)^2 &&= 9 \\
\Leftrightarrow\quad & x+4 &&= \pm\sqrt{9} \\
\Leftrightarrow\quad & x_+ &&= -4+3=-1 \\
& x_- &&= -4-3=-7 \\
\Leftrightarrow\quad & \mathbb{L} &&= \{-1;\ -7\}
\end{aligned}$$

2.6 Linearfaktorzerlegung

Anzeigen

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Lösen Sie folgende Gleichungen (ohne Taschenrechner) und überprüfen Sie Ihre Lösungen, indem Sie anschließend auf „Antwort" klicken.

a) $x + 5 = 7$

b) $5x - 1 = 4$

c) $\frac{1}{2}x - 2 = x$

d) $4x + 3 = 5x + 2$

e) $3(x - 4) = 1 - 5(2x - 2)$

f) $[(x + 3)2 + 4]5 - 20 = 40$

g) $2,6(x - 1) = -6,5(x + 1) - \frac{1}{2}(x - 7)$

h) $\frac{7x-3}{8x-5} = 2$

i) $\frac{2x}{3} - 5 = -\frac{5x}{6} - 2$

j) $\frac{7}{x} + \frac{4}{x} - 1 = \frac{1}{2} - 4(\frac{2}{x} - 2)$

Antworten

a) $x = 2$

b) $x = 1$

c) $x = -4$

d) $x = 1$

e) $x = \frac{23}{13}$

f) $x = 1$

g) $x = -\frac{1}{24}$

h) $x = \frac{7}{9}$

i) $x = 2$

j) $x = 2$

Lösung zu a

Auf beiden Seiten der Gleichung wird 5 subtrahiert,

$$x + 5 - 5 = 7 - 5,$$

um x alleine auf der linken Seite zu erhalten.

Also ist die Lösung $x = 2$.

Lösung zu b

Die Addition von 1 wird auf beiden Seiten der Gleichung durchgeführt,

$$5x - 1 + 1 = 4 + 1,$$

und man erhält:

$$5x = 5.$$

Beide Seiten der Gleichung werden durch 5 dividiert:

$$\frac{5x}{5} = \frac{5}{5}$$

und man erhält:

$$x = 1.$$

Lösung zu c

Da x auf beiden Seiten der Gleichung vorkommt, wird auf beiden Seiten $\frac{1}{2}x$ subtrahiert,

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x - 2 = x - \frac{1}{2}x,$$

sodass x nur noch auf der rechten Seite steht:

$$-2 = \frac{1}{2}x.$$

Danach werden beide Seiten der Gleichung mit dem Wert 2 multipliziert:

$$2 \cdot (-2) = 2 \cdot \frac{1}{2}x,$$

und man erhält:

$$-4 = x.$$

Lösung zu d

Zuerst werden alle Glieder mit x auf die linke Seite gebracht, indem $5x$ auf beiden Seiten der Gleichungen subtrahiert werden:

$$4x + 3 - 5x = 5x + 2 - 5x,$$

und man erhält:

$$-x + 3 = 2.$$

Jetzt wird 3 auf beiden Seiten der Gleichung subtrahiert:

$$-x + 3 - 3 = 2 - 3.$$

Man erhält:

$$-x = -1.$$

Danach werden beide Seiten der Gleichung mit dem Wert -1 multipliziert und man erhält:

$$x = 1.$$

Lösung zu e

Im ersten Schritt werden die Klammern aufgelöst und man erhält:

$$3x - 12 = 1 - 10x + 10.$$

Nun werden die Glieder zusammengefasst und man erhält weiterhin:

$$3x - 12 = 11 - 10x.$$

Nun werden auf beiden Seiten $10x$ und 12 addiert:

$$13x = 23.$$

Im letzten Schritt wird auf beiden Seiten der Gleichung durch den Wert 13 dividiert:

$$x = \frac{23}{13}.$$

Lösung zu f

Zuerst wird die innere Klammer aufgelöst:

$$[2x+6+4]5-20=40.$$

Nun wird die äußere Klammer aufgelöst und man erhält:

$$10x+30+20-20=40.$$

Jetzt werden die Glieder zusammengefasst und anschließend auf beiden Seiten der Wert 30 subtrahiert.

$$10x=10.$$

Abschließend wird die Gleichung durch den Wert 10 dividiert und man erhält

$$x=1.$$

Lösung zu g

Im ersten Schritt werden die Klammern auf beiden Seiten der Gleichung aufgelöst und man erhält:

$$2{,}6x-2{,}6=-6{,}5x-6{,}5-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{7}{2}.$$

Nun werden die Glieder zusammengefasst:

$$2{,}6x-2{,}6=-7x-3.$$

Nun wird auf beiden Seiten der Gleichung $7x$ und $2{,}6$ addiert:

$$9{,}6x=-0{,}4.$$

Jetzt muss noch durch $9{,}6$ dividiert werden:

$$x=-\tfrac{1}{24}.$$

Lösung zu h

Bestimmen Sie zuerst den Definitionsbereich für die Variable x allgemein.
Keiner der Brüche darf im Nenner gleich 0 werden, deshalb muss hier $x \neq \frac{5}{8}$ gelten.

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{\frac{5}{8}\}$

Als erstes wird der Bruch gekürzt, dafür muss auf beiden Seiten der Gleichung mit (8x-5) multipliziert werden:

$\frac{7x-3}{8x-5} \cdot (8x-5) = 2 \cdot (8x-5)$

Dies führt zu:

$7x - 3 = 2 \cdot (8x-5).$

Nun wird die rechte Seite ausmultipliziert:

$7x - 3 = 16x - 10.$

Da x auf beiden Seiten der Gleichung vorkommt, wird $7x$ subtrahiert:

$7x - 3 - 7x = 16x - 10 - 7x$

und man erhält:

$-3 = 9x - 10.$

Damit die Zahlenglieder auch alle auf einer Seite sind, wird 10 addiert und man erhält:

$7 = 9x.$

Jetzt muss noch durch 9 dividiert werden und man erhält:

$x = \frac{7}{9}$

Anschließend ist noch zu überprüfen, dass die Lösung $x = \frac{7}{9}$ zulässig ist, was wegen $\frac{7}{9} \neq \frac{5}{8}$ offensichtlich der Fall ist.

Lösung zu i

In der Gleichung sind zwei Brüche, die als erstes beseitigt werden. Hierfür wird die Gleichung als erstes mit dem höheren Nenner multipliziert, also mit dem Wert 6:

$$\frac{2x}{3} \cdot 6 - 5 \cdot 6 = -\frac{5x}{6} \cdot 6 - 2 \cdot 6,$$

sodass man folgende Gleichung erhält:

$$\frac{2x \cdot 6}{3} - 30 = -5x - 12.$$

Auf der linken Seite kann die 3 mit der 6 gekürzt werden, dies ergibt:

$$4x - 30 = -5x - 12.$$

Nun steht auf beiden Seiten ein x, daher addiert man beide Seiten mit $5x$ und erhält:

$$9x - 30 = -12.$$

Jetzt müssen die Zahlglieder auf eine Seite "gebracht werden", daher wird auf beiden Seiten der Gleichung der Wert 30 addiert:

$$9x - 30 + 30 = -12 + 30.$$

und man erhält:

$$9x = 18.$$

Um nur ein x auf der linken Seite stehen zu haben, wird durch den Wert 9 dividiert, und man erhält als Lösung:

$$x = 2.$$

Lösung zu j

Bestimmen Sie zuerst den Definitionsbereich für die Variable x allgemein.
Keiner der Brüche darf im Nenner gleich 0 werden, deshalb muss man $x \neq 0$ fordern.

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

Die Multiplikation mit x ergibt dann:

$$7 + 4 - x = \frac{x}{2} - 4(2 - 2x) \Leftrightarrow 11 - x = \frac{17}{2}x - 8.$$

Anschließend addiert man $x + 8$ und erhält $19 = \frac{19}{2}x$, was nach der Multiplikation mit $\frac{2}{19}$ auf $x = 2$ führt.

ÜBUNG 2

Stellen Sie Gleichungen zu den Textaufgaben auf und lösen Sie diese.

a) In einem Obstladen wird eine Schale Erdbeeren zu je 1,50 Euro verkauft.

Insgesamt hat der Ladenbesitzer durch den Verkauf seiner Erdbeeren einen Erlös von 78 Euro erzielt.

Wieviele Schalen Erdbeeren wurden verkauft?

b) Eine Wandergruppe wandert 2 Tage.

Am 1. Tag legen sie ein Viertel der Gesamtstrecke und zusätzlich 2 km zurück.

Am 2. Tag legen sie die Hälfte der Gesamtstrecke und zusätzlich 1 km zurück.

Wie lang ist die zurückgelegte Gesamtstrecke?

c) Das Achtfache einer Zahl um 6 vermindert ist gleich dem Vierfachen der Zahl um 2 vermehrt.

Wie heißt die Zahl?

Antworten

a) Es wurden 52 Erdbeerschalen verkauft.

b) Die Gesamtstrecke ist 12 Kilometer lang.

c) Die Zahl lautet 2.

Lösung zu a

Gegeben ist: Preis für Erdbeeren: $1{,}50$ Euro pro Schale.
Erlös: 78 Euro.
Gefragt ist: x = Anzahl der Schale Erdbeeren

$$1{,}50 \cdot x = 78$$

Um x zu erhalten, werden beide Seiten der Gleichung durch $1{,}50$ dividiert:

$$x = 52$$

Der Ladenbesitzer hat 52 Schalen Erdbeeren verkauft.

Lösung zu b

Es wird nach der Gesamtstrecke gefragt, daher lassen sich die einzelnen Abschnitte pro Tag in einer Gleichung über die Gesamtstrecke x zusammenfassen:

$$\begin{aligned} (\tfrac{1}{4}x+2)+(\tfrac{1}{2}x+1) &= x \\ \Leftrightarrow \tfrac{3}{4}x+3 &= x \qquad \left|-\tfrac{3}{4}x\right. \\ \Leftrightarrow 3 &= \tfrac{1}{4}x \qquad |\cdot 4 \\ \Leftrightarrow 12 &= x \end{aligned}$$

Die Gesamtstrecke beträgt also 12 Kilometer.

Lösung zu c

x = die gesuchte Zahl.

Auf der linken Seite der Gleichung wird der erste Teil des Satzes stehen und auf der rechten Seite der zweite Teil des Satzes:

Linke Seite: Das Achtfache einer Zahl um 6 vermindert, in einem Term dargestellt:

$8x - 6$

Rechte Seite: Dem Vierfachen der Zahl um 2 vermehrt, in einem Term dargestellt:

$4x + 2$

Somit lautet die Gleichung:

$8x - 6 = 4x + 2$

$$\begin{array}{llll} & 8x-6 & = 4x+2 & \mid -4x \\ \Leftrightarrow & 4x-6 & = 2 & \mid +6 \\ \Leftrightarrow & 4x & = 8 & \mid : 4 \\ \Leftrightarrow & x & = 2 & \end{array}$$

Somit ist 2 die gesuchte Zahl.

ÜBUNG 3

Lösen Sie die Gleichungen durch die Anwendung der quadratischen Ergänzung.

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$

b) $-x^2 + 15 = 14x$

c) $4x^2 - 4x = 3$

d) $3x^2 - 2 = 10$

Antworten

a) $x_1 = 1$ $x_2 = -4$

b) $x_1 = 1$ $x_2 = -15$

c) $x_1 = \frac{3}{2}$ $x_2 = -\frac{1}{2}$

d) $x_1 = 2$ $x_2 = -2$

Lösung zu a

Es wird der quadratische und der lineare Term betrachtet, um zu entscheiden welche binomische Formel verwendet wird.

In diesem Fall wird die 1. binomische Formel verwendet:

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

Da hier $3x = 2ax$ ist, folgt $a = \frac{3}{2}$.

Durch Einsetzen in die 1. binomische Formel erhält man:

$$(x+\frac{3}{2})^2 = x^2 + 3x + \frac{9}{4}$$

Die Ursprungsgleichung wird daher mit $\frac{9}{4}$ erweitert:

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} - 4 = \frac{9}{4}$$

Durch Umformung mit Hilfe der 1. binomischen Formel erhält man:

$$(x+\frac{3}{2})^2 - 4 = \frac{9}{4} \Big| +4$$

$$\Leftrightarrow (x+\frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4} \Big| \sqrt{}$$

$$\Rightarrow x + \frac{3}{2} = \pm\frac{5}{2}$$

Damit ist $x_1 = 1$ und $x_2 = -4$.

Lösung zu b

Die Gleichung wird im 1. Schritt mit -1 multipliziert, um die allgemeine Normalform der Gleichung zu erhalten:

$$\begin{aligned} & x^2-15 &&= -14x && \vert +15 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 &&= -14x+15 && \vert +14x \\ \Leftrightarrow\ & x^2+14x &&= 15 && . \end{aligned}$$

In diesem Fall wird die 1. binomische Formel verwendet:

$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2\,.$

Da hier $14x = 2ax$ ist, folgt $a = 7$.

Man erhält daher:

$(x+7)^2 = x^2 + 14x + 49.$

Die Ursprungsgleichung wird also mit +49 erweitert:

$x^2 + 14x + 49 = 15 + 49.$

Durch die 1. binomische Formel erhält man:

$$\begin{aligned} & (x+7)^2 &&= 64 && \vert \sqrt{} \\ \Rightarrow\ & x+7 &&= \pm 8 \end{aligned}$$

Damit ist $x_1 = 1$ und $x_2 = -15$.

Lösung zu c

Die Gleichung wird im 1. Schritt durch 4 dividiert, um die allgemeine Normalform der Gleichung zu erhalten:

$x^2 - x = \frac{3}{4}$

In diesem Fall wird die 2. binomische Formel verwendet:

$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

Es wird ein a gesucht, für das gilt: $2ax = -x$. Daraus folgt,
dass $a = -\frac{1}{2}$ ist.

Einsetzen in die binomische Formel ergibt:

$(x - \frac{1}{2})^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$

Die Ursprungsgleichung muss also mit $\frac{1}{4}$ erweitert werden:

$x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$

Die rechte Seite wird nach der binomischen Formel umgeformt. Die linke Seite wird zusammengefasst und anschließend wird die Wurzel gezogen:

$(x - \frac{1}{2})^2 = 1 \qquad \Big| \sqrt{}$

$\Rightarrow x - \frac{1}{2} = \pm 1$

Damit ist $x_1 = \frac{3}{2}$ und $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Lösung zu d

In der Gleichung wird zu Beginn auf beiden Seiten -10 subtrahiert, und anschließend wird die Gleichung durch 3 dividiert. Dadurch erhält man:

$$x^2 - 4 = 0.$$

Die Gleichung $x^2 - 4 = 0$ lässt sich aufgrund der 3. binomischen Formel als $(x-2)(x+2) = 0$ schreiben. Mit dieser Linearfaktorzerlegung lassen sich $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$ direkt ablesen.

ÜBUNG 4

Geben Sie die Lösungsmengen der Gleichungen mit Hilfe der p-q-Formel an sowie die Koeffizienten p und q.

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$

b) $x^2 + 3x = -4$

c) $4x^2 - 28x + 13 = 0$

d) $3x^2 - 10x = -8$

Antworten

a) $\mathbb{L} = \{1; 3\}$,	$p = -4$,	$q = 3$;
b) $\mathbb{L} = \emptyset$,	$p = 3$,	$q = 4$;
c) $\mathbb{L} = \{\frac{1}{2}; \frac{13}{2}\}$,	$p = -7$,	$q = \frac{13}{4}$;
d) $\mathbb{L} = \{\frac{4}{3}; 2\}$,	$p = -\frac{10}{3}$,	$q = \frac{8}{3}$.

Lösung zu a

Die Normalform lässt sich auch als p-q-Formel schreiben:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Man erhält $p = -4$ und $q = 3$.

Nach der p-q-Formel gilt:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}.$$

Mit Hilfe der Formel ist:

$$x_1 = -\frac{-4}{2} + \sqrt{(\frac{-4}{2})^2 - 3} = 2 + \sqrt{4 - 3} = 2 + 1 = 3.$$

$$x_2 = -\frac{-4}{2} - \sqrt{(\frac{-4}{2})^2 - 3} = 2 - \sqrt{4 - 3} = 2 - 1 = 1.$$

Somit lautet die Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{1; 3\}$.

Lösung zu b

Die Normalform lässt sich auch als p-q-Formel schreiben:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Man erhält $p = 3$ und $q = 4$.

Nach der p-q-Formel gilt:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}.$$

Mit Hilfe der Formel ist:

$$x_1 = -\frac{3}{2} + \sqrt{(\frac{3}{2})^2 - 4} = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - 4} = -\frac{3}{2} + \sqrt{-\frac{7}{4}}.$$

Da man unter der Wurzel eine negative Zahl erhält, gibt es keine reellen Lösungen sowohl für x_1 als auch für x_2.

Lösung zu c

Die Normalform lässt sich auch als p-q-Formel schreiben:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Um diese Normalform zu erhalten, wird die Gleichung durch den Wert 4 dividiert:

$$x^2 - 7x + \frac{13}{4} = 0$$

Man erhält $p = -7$ und $q = \frac{13}{4}$.

Nach der p-q-Formel gilt:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}.$$

Mit Hilfe der Formel ist:

$$x_1 = -\frac{-7}{2} + \sqrt{(\frac{-7}{2})^2 - \frac{13}{4}} = \frac{7}{2} + \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{13}{4}} = \frac{7}{2} + \frac{6}{2} = \frac{13}{2}.$$

$$x_2 = -\frac{-7}{2} - \sqrt{(\frac{-7}{2})^2 - \frac{13}{4}} = \frac{7}{2} - \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{13}{4}} = \frac{7}{2} - \frac{6}{2} = \frac{1}{2}.$$

Somit lautet die Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{\frac{13}{2}; \frac{1}{2}\right\}$.

Lösung zu d

Die Normalform lässt sich auch als p-q-Formel schreiben:

$$x^2 + px + q = 0$$

Um diese Normalform zu erhalten, wird die Gleichung durch den Wert 3 dividiert:

$$x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{8}{3} = 0.$$

Man erhält $p = -\frac{10}{3}$ und $q = \frac{8}{3}$.

Nach der p-q-Formel gilt:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}.$$

Mit Hilfe der Formel ist:

$$x_1 = -\frac{-10}{6} + \sqrt{(\frac{-10}{6})^2 - \frac{8}{3}} = \frac{5}{3} + \sqrt{\frac{25}{9} - \frac{8}{3}} = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 2.$$

$$x_2 = -\frac{-10}{6} - \sqrt{(\frac{-10}{6})^2 - \frac{8}{3}} = \frac{5}{3} - \sqrt{\frac{25}{9} - \frac{8}{3}} = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Somit lautet die Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{2; \frac{4}{3}\right\}$.

3. LÖSEN VON GLEICHUNGEN DURCH FAKTORISIEREN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie können eine Gleichung durch *Ausklammern* faktorisieren.
- Sie können eine Gleichung mit Hilfe *der binomischen Formeln* faktorisieren.

3.1 Faktorisieren

Grundlage dieses Abschnitts ist die sogenannte *Nullproduktregel*, die besagt, dass ein Produkt von Zahlen genau dann Null ist, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist.

Das Produkt zweier Terme hat genau dort Nullstellen, wo mindestens einer der Faktoren eine Nullstelle hat.

Wenn wir einen komplizierten Term als Produkt von einfacheren Termen schreiben können, dann werden die Nullstellen des komplizierten Terms durch die Nullstellen der einfacheren Terme bestimmt.

$$\begin{array}{rrcl} & x^2-5x & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x(x-5) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x=0 & & \text{oder} \quad x-5=0. \end{array}$$

Also ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{0;\ 5\}$.

Als zielführendes Verfahren für die Berechnung der Nullstellen eines Ausdruckes bietet sich somit an, ihn als Produkt einfacher Terme zu schreiben.

Die Umformung eines Terms in eine Produktform nennt man *Faktorisierung* des Terms. Faktoren der Form $x - a$, wobei a eine reelle Zahl ist, heißen *Linearfaktoren*.

Die wichtigsten Hilfsmittel um einen Term in ein Produkt äquivalent umzuformen sind das Ausklammern und die Anwendung der binomischen Formeln.

3.2 Faktorisierung durch Ausklammern

> Haben alle Summanden eines Terms einen gemeinsamen Faktor, so lässt sich dieser ausklammern:
>
> $$4x^2 + 32x + 12 \quad = \quad 4(x^2 + 8x + 3).$$
>
> Der allgemeine quadratische Term ist durch Ausklammern als Produkt aus der Zahl 4 und einem quadratischen Term in Normalform umgeformt worden.

Besonders nützlich ist es, wenn beide Faktoren die Variable enthalten.

> $$x^4 + 2x^3 + 3x^2 \quad = \quad x^2(x^2 + 2x + 3).$$
>
> Die Faktoren sind quadratische Terme, die wir mit den Methoden des Abschnitts über lineare und quadratische Gleichungen behandeln können. Die sind einfacher als der ursprüngliche Term, der sogar die vierte Potenz der Variablen enthält.
>
> $$\begin{array}{rrcl} & x^4 + 2x^3 + 3x^2 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x^2(x^2 + 2x + 3) & = & 0 \end{array}$$
>
> $$\Leftrightarrow \qquad x^2 = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 + 2x + 3 = 0.$$
>
> Da $x^2 + 2x + 3 = 0$ keine Lösung hat (siehe dazu Abschnitt II.2), ist die Gleichung nur bei $x^2 = 0$ erfüllt, also $\mathbb{L} = \{0\}$.

$$\begin{aligned}(x-3)\,x^2-(x-3)(2x-1) &= (x-3)\cdot(x^2-(2x-1))=(x-3)\cdot(x^2-2x+1)\\ &= (x-3)\cdot(x-1)^2.\end{aligned}$$

(Im letzten Schritt haben wir die binomische Formel $(x-1)^2=x^2-2x+1$ benutzt.) Damit folgt:

$$(x-3)\,x^2-(2x-1)(x-3)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x-3=0 \quad \text{oder} \quad (x-1)^2=0.$$

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L}=\{1;\ 3\}$.

3.3 Faktorisierung mit Hilfe der binomischen Formeln

Terme der Form a^2-b^2 sowie $a^2\pm 2ab+b^2$ können mit den binomischen Formeln als Produkte von $(a+b)$ und $(a-b)$ geschrieben werden. Bei der Differenz von Quadraten, z.B. x^2-9, können wir mit der Wahl $a=x$ und $b=3$ die dritte binomische Formel anwenden und erhalten

$$x^2-9=(x+3)\cdot(x-3).$$

Bei vollständigen Quadraten wie x^2-2x+1 wenden wir die erste oder zweite binomische Formel an, hier die zweite mit $a=x$ und $b=1$:

$$x^2-2x+1=(x-1)\cdot(x-1)=(x-1)^2.$$

$$\begin{aligned} & 9x^2-16 && =0 && \\ \Leftrightarrow\ & (3x+4)(3x-4) && =0 && \\ \Leftrightarrow\ & 3x+4 && =0 && \text{oder } 3x-4=0\\ \Leftrightarrow\ & x && =-\tfrac{4}{3} && \text{oder} \quad x=\tfrac{4}{3}\\ & \mathbb{L} && =\left\{-\tfrac{4}{3};\ \tfrac{4}{3}\right\} && \end{aligned}$$

Analog erhält man mit $a=4u$ und $b=7v^2$, dass

$$16u^2-49v^4=(4u+7v^2)\cdot(4u-7v^2).$$

$$
\begin{aligned}
& 9x^2+30x+25 && = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (3x+5)^2 && = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 3x+5 && = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 3x && = -5 \\
\Leftrightarrow\ & x && = -\tfrac{5}{3} \\
& \mathbb{L} && = \left\{-\tfrac{5}{3}\right\}
\end{aligned}
$$

Entsprechend kann $4x^4-12x^2+9$ mit der zweiten binomischen Formel und $a=2x^2$, $b=3$ faktorisiert werden:

$$4x^4-12x^2+9=(2x^2-3)\cdot(2x^2-3)=(2x^2-3)^2,$$

und mit der ersten binomischen Formel und $a=x+2, b=5$ erhalten wir

$$(x+2)^2+10(x+2)+25=(x+2+5)\cdot(x+2+5)=(x+7)^2.$$

3.4 Faktorisierung eines quadratischen Terms, wenn eine Nullstelle bekannt ist

Wenn bei einem quadratischen Term in Normalform x^2+px+q eine Nullstelle x_1 bekannt ist, dann besagt der Satz von Viëta, dass auch $x_2=\frac{q}{x_1}$ eine Nullstelle ist (evtl. dieselbe). Damit erhalten wir die Faktorisierung $x^2+px+q=(x-x_1)\cdot(x-x_2)$.

Bei $x^2-15x-34=0$ stellen wir durch Ausprobieren oder Raten fest, dass $x_1=-2$ eine Nullstelle ist. Dann ist auch $x_2=\frac{-34}{-2}=17$ eine Nullstelle und die Faktorisierung lautet:

$$x^2-15x-34=(x+2)\cdot(x-17).$$

$$x^2+(\sqrt{2}-1)\,x-\sqrt{2}=0$$

Wenn wir durch Ausprobieren oder Raten gefunden haben, dass $x_1=1$ eine Nullstelle ist, dann fogt daraus, dass auch $x_2=-\frac{\sqrt{2}}{x_1}=-\sqrt{2}$ eine Nullstelle ist. Also

$$
\begin{aligned}
& x^2+(\sqrt{2}-1)\,x-\sqrt{2} &=&\ 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-1)\cdot(x+\sqrt{2}) &=&\ 0,
\end{aligned}
$$

die Lösungsmenge ist $\mathbb{L}=\{1;\ -\sqrt{2}\}$.

Dies ist ein einfacher Spezialfall der sogenannten Polynomdivision.

Das Faktorisieren eines Terms gelingt nicht immer und muss durch Ausprobieren und Raten versucht werden.
Für quadratische Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ gelingt das Faktorisieren mit Hilfe der p-q-Formel, für $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ und für $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ gibt es komplizierte Formeln für Spezialfälle und für $x^n + c_{n-i} \cdot x^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot x + c_0 = 0$ gibt es überhaupt kein systematisches Verfahren des Faktorisierens, falls $n \geq 5$ ist.

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Faktorisieren Sie die folgenden Terme soweit wie möglich.

a) $3a + 3x$

b) $xm^2 - xn^2$

c) $xr + xs + r + s$

d) $x(r - s) - 3(s - r)$

Antworten

a) $3(a + x)$

b) $x(m^2 - n^2)$ bzw. $x(m + n)(m - n)$

c) $(x + 1)(r + s)$

d) $(x + 3)(r - s)$

Lösung zu a

Die Zahl 3 wird ausgeklammert:

$$3(a + x).$$

Lösung zu b

Beide Glieder enthalten ein x. Es bietet sich an, x auszuklammern und die 3. binomische Formel anzuwenden.

$$xm^2 - xn^2 = x(m^2 - n^2) = x(m + n)(m - n).$$

Lösung zu c

Bei den Termen mit x wird dies ausgeklammert:

$$xr + xs + r + s = x(r + s) + (r + s).$$

Nun wird $r + s$ ausgeklammert:

$$x(r + s) + (r + s) = (x + 1)(r + s).$$

Lösung zu d

Da sich die beiden Klammern nur um ein Vorzeichen unterscheiden, wird -1 aus der 2. Klammer ausgeklammert:

$$\begin{aligned} x(r-s)-3(s-r) &= x(r-s)-3((-1)(-s)+(-1)r) \\ &= x(r-s)-3(-1)((-s)+r) \\ &= x(r-s)-3(-1)(-s+r) \\ &= x(r-s)+3(-s+r) \\ &= x(r-s)+3(r-s). \end{aligned}$$

Nun wird noch der Term $(r-s)$ ausgeklammert.
So ergibt sich der Ausdruck:

$$x(r-s)+3(r-s)=(x+3)(r-s).$$

ÜBUNG 2

Lösen Sie folgende Gleichungen durch Faktorisieren.

a) $x^2 + 2x + 1 = 0$

b) $x^2 - 8x + 16 = 0$

c) $x^2 - 9 = 0$

d) $x^2 + \frac{1}{4} = x$

Antworten

a) $\mathbb{L} = \{-1\}$

b) $\mathbb{L} = \{4\}$

c) $\mathbb{L} = \{3;\ -3\}$

d) $\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Lösung zu a

Die 1. binomische Formel wird angewendet:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$

In dem Ausdruck $x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2(1x) + 1^2$ lässt sich der Wert $a = 1$ ablesen.

Dieser Wert wird jetzt in $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ eingesetzt:

$$(x + a)^2 = (x + 1)^2 = 0.$$

Nun wird die Wurzel auf beiden Seiten der Gleichung gezogen:

$x + 1 = 0$, daraus folgt: $x = -1$.

Lösung zu b

Die 2. binomische Formel $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ wird angewendet.

In dem Ausdruck $x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2(4x) + 4^2$ lässt sich der Wert $a = 4$ ablesen.

Dieser Wert wird jetzt in $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ eingesetzt:

$$(x - 4)^2 = 0.$$

Nun wird die Wurzel auf beiden Seiten der Gleichung gezogen:

$x - 4 = 0$, daraus folgt: $x = 4$.

Lösung zu c

Die 3. binomische Formel $(x-a)(x+a) = x^2 - a^2$ wird angewendet.

In dem Ausdruck $x^2 - 9 = x^2 - 3^2$ lässt sich der Wert $a = 3$ ablesen.

Dieser Wert wird jetzt in $(x-a)(x+a) = x^2 - a^2$ eingesetzt:

$$(x-3)(x+3) = 0.$$

Mindestens eine der Klammern muss den Wert 0 ergeben:

$(x-3) = 0$ oder $(x+3) = 0$, daraus folgt:

$x_1 = 3$ oder $x_2 = -3$.

Lösung zu d

Auf beiden Seiten der Gleichung wird x subtrahiert,

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0.$$

Die 2. binomische Formel wird angewendet:

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2.$$

In dem Ausdruck $x^2 - x + \frac{1}{4} = x^2 - 2(\frac{1}{2}x) + (\frac{1}{2})^2$ lässt sich der Wert $a = \frac{1}{2}$ ablesen.

Dieser Wert wird jetzt in $(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ eingesetzt:

$$(x - \frac{1}{2})^2 = 0.$$

Nun wird die Wurzel auf beiden Seiten der Gleichung gezogen:

$x - \frac{1}{2} = 0$, daraus folgt: $x = \frac{1}{2}$.

ÜBUNG 3

Lösen Sie folgende Gleichungen durch Faktorisieren.

a) $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 = 0$

b) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 0$

c) $16x^2 + 40x + 25 = 0$

d) $9x^2 - 36 = 0$

Antworten

a) $\mathbb{L} = \{6\}$

b) $\mathbb{L} = \{0;\ 2\}$

c) $\mathbb{L} = \left\{-\frac{5}{4}\right\}$

d) $\mathbb{L} = \{-2;\ 2\}$

Lösung zu a

Im 1. Schritt werden beide Seiten der Gleichung mit dem Wert 4 multipliziert:

$$x^2 - 12x + 36 = 0.$$

Die 2. binomische Formel wird angewendet:

$$(x-6)^2 = 0.$$

Nun wird die Wurzel auf beiden Seiten der Gleichung gezogen:

$x - 6 = 0$, daraus folgt: $x = 6$.

Lösung zu b

Es wird x^2 ausgeklammert:

$x^2(x^2 - 4x + 4) = 0$, daraus folgt: $x_1 = 0$.

Die 2. binomische Formel wird auf die Klammer angewendet:

$(x - 2)^2 = 0$.

Nun wird die Wurzel auf beiden Seiten der Gleichung gezogen:

$x - 2 = 0$, daraus folgt: $x_2 = 2$.

Lösung zu c

Die 1. binomische Formel wird angewendet:

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$.

Nun wird eingesetzt:

$(4x + 5)^2 = (4x + 5)(4x + 5) = 0$.

Die Nullproduktregel wird verwendet:

$4x + 5 = 0$.

Auf beiden Seiten der Gleichung wird der Wert 5 subtrahiert und durch den Wert 4 dividiert:

$x = -\frac{5}{4}$.

Lösung zu d

Die 3. binomische Formel wird angewendet:

$$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2.$$

Die Werte der Gleichung werden eingesetzt:

$$(3x+6)(3x-6) = 0.$$

Die Nullproduktregel wird angewendet:

$3x+6=0$ oder $3x-6=0$.

Damit erhält man:

$x_1 = -2$ und $x_2 = 2$.

ÜBUNG 4

Lösen Sie folgende Gleichungen (ohne Taschenrechner) durch Faktorisieren.
(Bei den Aufgaben a) und b) werden nur Lösungen im Intervall $[0,\ 2\pi]$ gesucht.)

Diese Aufgabe benutzt Eigenschaften von trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion, die im Kapitel VI ausführlich behandelt werden. Sie soll weitere interessante Beispiele für die Lösungsmethode Faktorisieren vorstellen.

a) $\cos^2(x) - 2\cos(x) = -1$

b) $\frac{1}{2}\sin(x) = -1 + \cos^2(x)$

c) $e^{4x} + 5e^{2x} = 0$

Hinweise: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.
(Mehr zu diesem Thema finden Sie im Abschnitt Trigonometrische Funktionen.)
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt die Ungleichung $e^x > 0$.

Antworten

a) $\mathbb{L} = \{0;\ 2\pi\}$,

b) $\mathbb{L} = \left\{0;\ \pi;\ \frac{7\pi}{6};\ \frac{11\pi}{6};\ 2\pi\right\}$,

c) $\mathbb{L} = \emptyset$.

Lösung zu a

Im 1. Schritt werden alle Terme auf eine Seite gebracht:

$$\cos^2(x) - 2\cos(x) + 1 = 0.$$

Nun wird die 2. binomische Formel angewendet:

$$(\cos(x) - 1)^2 = 0.$$

Auf beiden Seiten der Gleichung wird die Wurzel gezogen:

$\cos(x) - 1 = 0$, damit ist $\cos(x) = 1$. Für $0 \leq x \leq 2\pi$ ist somit $x = 0$ oder $x = 2\pi$.

Lösung zu b

Im 1. Schritt werden alle Terme auf eine Seite gebracht:

$\frac{1}{2}\sin(x) + 1 - \cos^2(x) = 0.$

$1 - \cos^2(x)$ wird mit $\sin^2(x)$ ersetzt, damit nur noch Sinus-Terme in der Gleichung enthalten sind.

$\sin^2(x) + \frac{1}{2}\sin(x) = 0.$

Nun wird $\sin(x)$ ausgeklammert:

$\sin(x)\left(\sin(x) + \frac{1}{2}\right) = 0.$

Nach der Nullproduktregel betrachten wir daher zwei Fälle:

Fall 1: $\sin(x) = 0$

Im Intervall $[0{,}2\pi]$ ist somit $x = 0$, $x = \pi$ oder $x = 2\pi$.

Fall 2: $\sin(x) + \frac{1}{2} = 0 \quad \left| -\frac{1}{2}\right.$

$\sin(x) = -\frac{1}{2}$.

Wendet man den $\arcsin$ an, so erhält man $x = -\frac{\pi}{6}$, aber $x = -\frac{\pi}{6}$ liegt nicht im gewünschten Intervall. Es ist jedoch möglich, mithilfe dieses Ergebnisses im angegebenen Intervall die gesuchten x-Werte zu bestimmen. Da der Sinus 2π-periodisch ist, gilt auch $\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$. Also ist $x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ eine Lösung.
Eine weitere Lösung erhält man durch die Symmetrie des Sinus, denn $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + h\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - h\right)$. Mit $h = \frac{\pi}{3}$ erhält man die weitere Lösung $x = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$.
Dass diese beiden Lösungen der Gleichung die einzigen sind, kann man sich mit einem Schaubild des Sinus klarmachen.

Lösung zu c

Im 1. Schritt wird e^{2x} ausgeklammert:

$$e^{2x}\left(e^{2x}+5\right)=0.$$

Nach der Nullproduktregel muss $e^{2x}=0$ oder $\left(e^{2x}+5\right)=0$ gelten.

Es gilt jedoch stets, dass $e^{2x}\neq 0$ und $\left(e^{2x}+5\right)\neq 0$ ist. Es gibt daher keine Lösungen.

4. LÖSEN VON WURZELGLEICHUNGEN

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie können den *Definitionsbereich* einer Wurzelgleichung bestimmen.
- Sie können eine *Wurzelgleichung* lösen.

Unter einer Wurzelgleichung versteht man eine Gleichung, bei der die Variable unter einer Wurzel steht (und möglicherweise zusätzlich auch außerhalb der Wurzel).

Gemäß Abschnitt I.6.1 sind Wurzeln nur für positive reelle Zahlen oder Null definiert und sind selbst stets positiv oder Null.

Demnach muss bei Wurzelgleichungen zuerst der Definitionsbereich bestimmt werden, also die Menge an reellen Zahlen, für die der Radikand positiv oder gleich Null ist.

Zur Lösung vieler Wurzelgleichungen werden beide Seiten der Gleichung mit dem Wurzelexponenten (im Falle der Quadratwurzel also mit 2) so lange potenziert, bis alle Wurzeln eliminiert sind.
Man bekommt also unter Umständen durch das Quadrieren (das Potenzieren mit einer geraden Zahl ist keine Äquivalenzumformung) neue Lösungen (Scheinlösungen) hinzu, die die ursprüngliche Gleichung nicht hatte.
Die Probe ist folglich für Wurzelgleichungen unverzichtbar!

$\sqrt{2x+1} = x - 17 \quad \text{für} \quad x \geq -\frac{1}{2}.$

$$\begin{aligned} & \sqrt{2x+1} && = x - 17 \\ \Rightarrow\ & 2x+1 && = (x-17)^2 \\ \Rightarrow\ & 2x+1 && = x^2 - 34x + 289 \qquad |-2x-1 \\ \Rightarrow\ & 0 && = x^2 - 36x + 288 \\ \Rightarrow\ & x_1 && = 12 \\ & x_2 && = 24. \end{aligned}$$

In diesem Fall wird durch die Probe, d. h. durch das Einsetzen in die Ursprungsgleichung, festgestellt, dass $x = 12$ keine Lösung ist.
Also ist $x = 24$ die einzige Lösung, d.h. $\mathbb{L} = \{24\}$.

$\sqrt{3x+6} = 1 + \sqrt{5-x} \quad \text{für} \quad -2 \leq x \leq 5$

$$\begin{aligned} & \sqrt{3x+6} && = 1 + \sqrt{5-x} \\ \Rightarrow\ & 3x+6 && = (1+\sqrt{5-x})^2 \\ \Rightarrow\ & 3x+6 && = 6 + 2\sqrt{5-x} - x \qquad |-6+x \\ \Rightarrow\ & 4x && = 2\sqrt{5-x} \\ \Rightarrow\ & 16x^2 && = 4(5-x) \\ \Rightarrow\ & 16x^2 + 4x - 20 && = 0 \\ \Rightarrow\ & x_1 && = 1 \\ & x_2 && = -\frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Durch die Probe zeigt sich, dass $x = -\frac{5}{4}$ eine Scheinlösung ist, demnach ist $x = 1$ die einzige Lösung, d.h. $\mathbb{L} = \{1\}$.

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Lösen Sie folgende Gleichungen.

a) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+5}=4$

b) $\sqrt{1-x}=2-x$

c) $\sqrt{x-4}=\sqrt{2x+3}$

d) $\sqrt{x+1}=x-5$

Antworten

a) $x=\frac{5}{4}$

b) Keine Lösung

c) Keine Lösung

d) $x=8$

Lösung zu a

Beide Seiten werden im ersten Schritt quadriert.

$$(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+5})^2=16$$

Die linke Seite wird nun mithilfe der binomischen Formel ausmultipliziert.

$$(\sqrt{x+1})^2+2\sqrt{x+1}\sqrt{x+5}+(\sqrt{x+5})^2=16$$

$$\Rightarrow x+1+2\sqrt{x+1}\sqrt{x+5}+x+5=16$$

Alle Terme, bis auf die Wurzeln, werden auf die rechte Seite gebracht.

$$2\sqrt{x+1}\sqrt{x+5}=10-2x$$

Es wird nochmals quadriert.

$$(2\sqrt{x+1}\sqrt{x+5})^2=(10-2x)^2$$

$$\Rightarrow 4(x+1)(x+5)=100-40x+4x^2$$

$$\Rightarrow 4(x^2+6x+5)=4x^2-40x+100$$

$$\Rightarrow 24x+20=-40x+100$$

$$\Rightarrow 64x=80$$

$$\Rightarrow x=\tfrac{80}{64}=\tfrac{5}{4}.$$

Die Probe ergibt beim Einsetzen von $\frac{5}{4}$ in die Ursprungsgleichung:

$$\sqrt{\tfrac{5}{4}+1}+\sqrt{\tfrac{5}{4}+5}=\sqrt{\tfrac{9}{4}}+\sqrt{\tfrac{25}{4}}=4$$

Also ist die Lösung der Ursprungsgleichung $x=\frac{5}{4}$.

Lösung zu b

Beide Seiten werden quadriert, um die Wurzel zu eliminieren.

$$1 - x = (2 - x)^2$$

$$\Rightarrow 1 - x = 4 - 4x + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 3 = 0$$

Die quadratische Gleichung löst man mit Hilfe der quadratischen Ergänzung.

$$(x - \frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + \frac{12}{4} = 0$$

$$\Rightarrow (x - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} = 0$$

$$\Rightarrow (x - \frac{3}{2})^2 = -\frac{3}{4}$$

Diese Gleichung hat keine Lösung, da ihre linke Seite immer größer oder gleich 0 ist, ihre rechte Seite mit $-\frac{3}{4}$ aber stets negativ ist.

Lösung zu c

Beide Seiten werden quadriert, um die Wurzeln zu eliminieren.

$$x - 4 = 2x + 3$$

Auf beiden Seiten x und 3 subtrahieren.

$$-7 = x$$

Man erhält $x = -7$.

$x = -7$ ist jedoch keine erlaubte Lösung für die ursprüngliche Gleichung,
weil beide Wurzelargumente dort dann negativ werden würden und das ist per Definition ausgeschlossen.

Lösung zu d

Beide Seiten werden im ersten Schritt quadriert.

$$(\sqrt{x+1})^2 = (x-5)^2$$

$$\Rightarrow x+1 = x^2 - 10x + 25$$

$$\Rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0$$

Die quadratische Gleichung wird faktorisiert.

$$(x-3)(x-8) = 0$$

Durch Einsetzen von $x_1 = 3$ und $x_2 = 8$ in die ursprüngliche Gleichung wird geprüft, ob diese Zahlen wirklich Lösungen sind.

$$\sqrt{3+1} \neq (3-5)$$

und $\sqrt{8+1} = (8-5)$

Also ist die Lösung der Ursprungsgleichung $x = 8$.

ÜBUNG 2

Lösen Sie folgende Gleichungen.

a) $\sqrt{x+4}+2=x$

b) $\sqrt{x-1}\sqrt{x+4}=0$

c) $\sqrt{2x+10}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+2}$

Antworten

a) $\mathbb{L}=\{5\}$,

b) $\mathbb{L}=\{1\}$,

c) $\mathbb{L}=\{1\}$.

Lösung zu a

$\sqrt{x+4}+2=x \quad \vert -2$

$\Rightarrow \sqrt{x+4}=x-2 \quad \vert (\cdot)^2$

$\Rightarrow x+4=(x-2)^2.$

Auf der rechten Seite der Gleichung wird die 2. binomische Formel angewendet, so ergibt sich:

$x+4=x^2-4x+4$

Jetzt wird die Gleichung durch Äquivalenzumformungen in die Normalform einer quadratischen Gleichung gebracht:

$x+4=x^2-4x+4 \quad \vert -x-4$

$x^2-5x=0$

Nun wird ausgeklammert:

$x(x-5)=0$

Dies ist der Fall, wenn $x_1=5$ oder $x_2=0$ ist.

Nun wird die Probe durchgeführt, indem die Ergebnisse für x in die Ursprungsgleichung eingesetzt werden:

Für $x_1=5$ erhält man $\sqrt{5+4}+2=5$

$3+2=5$ ist eine wahre Aussage und somit ist x_1 eine richtige Lösung für die Gleichung.

Für $x_2=0$ ist $\sqrt{4}+2\neq 0$

x_2 in die Gleichung eingesetzt ergibt eine falsche Aussage und ist folglich kein Teil der Lösungsmenge.

$\mathbb{L}=\{5\}$

Lösung zu b

Dies ist eine Multiplkation von zwei Wurzeln. Folglich kann man diese Wurzeln zusammenfassen.

$$\sqrt{(x-1)(x+4)} = 0 \quad \left|(\cdot)^2\right.$$

$$(x-1)(x+4) = 0$$

Nun wird die Nullproduktregel angewendet:

$x_1 - 1 = 0$ oder $x_2 + 4 = 0$, daraus folgt, dass $x_1 = 1$ oder $x_2 = -4$ ist.

Nun wird die Probe durchgeführt, indem die Lösungen in die Ursprungsgleichung eingesetzt werden:

Für $x_1 = 1$ ist $\sqrt{1-1}\sqrt{1+4} = 0$. Die Gleichung ist wahr.

Für $x_2 = -4$ ist $\sqrt{(-4)-1}\sqrt{(-4)+4} = 0$, wir erhalten zwar eine wahre Aussage, jedoch ergibt sich $x_2 - 1 = -5 < 0$.
x_2 ist daher nur eine Scheinlösung.
Folglich ist nur x_1 eine Lösung der ursprünglichen Gleichung .

$$\mathbb{L} = \{1\}$$

Lösung zu c

Beide Seiten werden quadriert, um die Wurzeln zu eliminieren.

$$2x + 10 = (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+2})^2$$

Die rechte Seite der Gleichung muss faktorisiert werden.

$$2x + 10 = (2\sqrt{x+2})^2$$

$$\Rightarrow 2x + 10 = 2^2(\sqrt{x+2})^2$$

$$\Rightarrow 2x + 10 = 4 \cdot (x+2)$$

$$\Rightarrow 2x + 10 = 4x + 8$$

Als nächstes wird die Gleichung nach x aufgelöst.

$$2x + 10 = 4x + 8 \quad | - 8 - 2x$$

$$\Rightarrow 2 = 2x \quad | : 2$$

$$\Rightarrow x_1 = 1$$

Nun wird die Probe durchgeführt:

$$\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$$

x_1 ist also Teil der Lösungsmenge der Gleichung.

$$\mathbb{L} = \{1\}$$

ÜBUNG 3

Lösen Sie folgende Gleichungen.

a) $\sqrt{2x+10} = \sqrt[4]{32x+96}$

b) $\sqrt[3]{x+3} = \sqrt[6]{8x+8}$

c) $\sqrt[6]{2x+1} = \sqrt[18]{26x+1}$

Antworten

a) $\mathbb{L} = \{-1\}$

b) $\mathbb{L} = \{1\}$

c) $\mathbb{L} = \{0;\ 1\}$

Lösung zu a

Beide Seiten werden mit dem höchsten Wurzelexponenten potenziert.

$$(\sqrt{2x+10})^4 = (\sqrt[4]{32x+96})^4$$

$$\Rightarrow (2x+10)^{\frac{4}{2}} = (32x+96)^{\frac{4}{4}}.$$

Daraus folgt:

$$(2x+10)^2 = 32x+96$$

Auf der linken Seite der Gleichung wird die 1. binomische Formel angewendet.

$$4x^2+40x+100 = 32x+96$$

Diese Gleichung wird zusammengefasst und durch 4 dividiert,

$$x^2+2x+1=0.$$

Mit der p-q-Formel erhält man:

$$x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{(\frac{2}{2})^2-1} = -1 \pm 0 = -1.$$

Nun wird die Probe durchgeführt:

Für $x_1 = -1$ ist $\sqrt{-2+10} = \sqrt[4]{-32+96}$.

Da $\sqrt{8} = \sqrt[4]{64}$ ist, ist die Gleichung wahr, x_1 ist also Teil der Lösungsmenge.

$$\mathbb{L} = \{-1\}$$

Lösung zu b

Beide Seiten werden mit dem höchsten Wurzelexponenten potenziert.

$$(\sqrt[3]{x+3})^6 = (\sqrt[6]{8x+8})^6$$

$$\Rightarrow (x+3)^{\frac{6}{3}} = (8x+8)^{\frac{6}{6}}$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 = 8x+8$$

Auf der linken Seite der Gleichung wird die 1. binomische Formel angewendet.

$$x^2 + 6x + 9 = 8x + 8$$

Diese Gleichung wird zusammengefasst.

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

Die Gleichung wird anschließend mit der p-q-Formel gelöst:

$$x_{1,2} = \frac{2}{2} \pm \sqrt{(\frac{-2}{2})^2 - 1} = 1 \pm \sqrt{0} = 1$$

Nun wird die Probe durchgeführt:

Für $x_1 = 1$ ist $\sqrt[3]{1+3} = \sqrt[6]{8+8}$

Für x_1 ergibt die Gleichung eine wahre Aussage, x_1 ist also Teil der Lösungsmenge. $\mathbb{L} = \{1\}$

Lösung zu c

Beide Seiten werden mit dem höchsten Wurzelexponenten potenziert.

$$\begin{aligned}
& (\sqrt[6]{2x+1})^{18} && = (\sqrt[18]{26x+1})^{18} & \\
\Rightarrow\ & (2x+1)^{\frac{18}{6}} && = 26x+1 & \\
\Rightarrow\ & (2x+1)^3 && = 26x+1 & \\
\Rightarrow\ & (2x+1)(2x+1)^2 && = 26x+1 & \\
\Rightarrow\ & (4x^2+4x+1)(2x+1) && = 26x+1 & \\
\Rightarrow\ & 8x^3+12x^2+6x+1 && = 26x+1 & |-26x-1 \\
\Rightarrow\ & 8x^3+12x^2-20x && = 0 & \\
\Rightarrow\ & 4x(2x^2+3x-5) && = 0 &
\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist nach der Null-Produkt-Regel erfüllt, wenn einer der Faktoren, den Wert 0 annimmt.

Da $4x = 0$ sein soll, hat x_1 folglich den Wert 0.

Nun wird der weitere Term durch den Wert 2 dividiert und die p-q-Formel angewendet:

$$x^2 + (\tfrac{3}{2})x - \tfrac{5}{2} = 0$$

$$x_{2,3} = -\tfrac{3}{4} \pm \sqrt{(\tfrac{3}{4})^2 + \tfrac{5}{2}} = -\tfrac{3}{4} \pm \tfrac{7}{4}$$
$x_2 = \frac{4}{4} = 1$ und $x_3 = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$.

Nun wird die Probe durchgeführt:

$x_1 = 0$ in die Gleichung eingesetzt ergibt $\sqrt[6]{0+1} = \sqrt[18]{0+1}$ und dies ist eine wahre Aussage.

$x_2 = 1$ in die Gleichung eingesetzt ergibt $\sqrt[6]{3} = \sqrt[18]{27}$ und dies ist eine wahre Aussage.

$x_3 = -\frac{5}{2}$ in die Gleichung eingesetzt ergibt $\sqrt[6]{-4} = \sqrt[18]{-64}$ und dies ist eine falsche Aussage.

Man erhält daher $\mathbb{L} = \{0;\ 1\}$.

ÜBUNG 4

Lösen Sie die Wurzelgleichungen.

a) $4\sqrt{x+\sqrt{x-4}}=8$

b) $\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=-2$

c) $\sqrt{4x+\sqrt{x+5}}=\sqrt{4x+3}$

Antworten

a) $\mathbb{L}=\{4\}$

b) $\mathbb{L}=\emptyset$

c) $\mathbb{L}=\{4\}$

Lösung zu a

Beide Seiten der Gleichung werden durch 4 dividiert und danach quadriert.

$$x + \sqrt{x-4} = 4$$

Auf beiden Seiten der Gleichung wird x subtrahiert und anschließend quadriert.

$$x - 4 = (4-x)^2$$

Auf der rechten Seite der Gleichung wird die 2. binomische Formel angewendet und die Glieder zusammengefasst.

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

Zur Lösung der quadratischen Gleichung wird die p-q-Formel verwendet:

$$x_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{(\frac{9}{2})^2 - 20}$$

$x_1 = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5$ und $x_2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$

Nun wird die Probe durchgeführt:

$x_1 = 5$ in beide Seiten der Gleichung eingesetzt ergibt $4\sqrt{6}$ und 8.
Da $4\sqrt{6} \neq 8$ ist, ist x_1 keine Lösung der Gleichung.

Für $x_2 = 4$ lautet die Gleichung $4\sqrt{4} = 8$ und $x_2 = 4$ ist damit ein Teil der Lösungsmenge.

$$\mathbb{L} = \{4\}$$

Lösung zu b

Der Wertebereich der Wurzelfunktionen liegt nur in den nichtnegativen reellen Zahlen.
Auf der linken Seite der Gleichung steht ein Wurzelausdruck,
auf der rechten Seite aber eine negative Zahl. Da aus einer Wurzel nie eine negative Zahl entstehen kann, besitzt diese Gleichung für x keine Lösung.

$\mathbb{L} = \{\}$ oder $\mathbb{L} = \emptyset$.

Lösung zu c

Beide Seiten der Gleichung werden quadriert, es resultiert

$$4x + \sqrt{x+5} = 4x + 3$$

Auf beiden Seiten der Gleichung wird $4x$ subtrahiert und anschließend wird quadriert.

$$x + 5 = 9 \quad | - 5$$

$$\Rightarrow x = 4$$

Nun wird die Probe durchgeführt:

Für $x = 4$ ergibt die Gleichung $\sqrt{16 + \sqrt{9}} = \sqrt{19}$ und damit ist x in der Lösungsmenge.

$$\mathbb{L} = \{4\}$$

6. LÖSEN VON GLEICHUNGEN DURCH SUBSTITUTION

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie können Gleichungen durch *Substitution* lösen.
- Sie besitzen die Fähigkeit, durch *Resubstitution* die Lösung zu überprüfen.

6.1 Substitution

Durch geeignete Substitution (d.h. Ersetzen von Ausdrücken) lassen sich manchmal Gleichungen auf eine einfachere Gleichung zurückführen.
Insbesondere wenn die Potenz von einem Term doppelt so hoch ist wie die vom anderen Term, wie z.B. bei biquadratischen Gleichungen, kann diese Methode nützlich sein.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

Substitution

$x^2 = u$

$$\begin{aligned} u^2 - 13u + 36 &= 0 && |\text{p-q-Formel} \\ u_{\pm} &= \tfrac{13}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{-13}{2}\right)^2 - 36} \end{aligned}$$

$$u_+ = 4 \quad \text{und} \quad u_- = 9$$

6.2 Resubstitution

Da Lösungen der ursprünglichen Gleichung gesucht sind, müssen dann die Substitutionen rückgängig gemacht werden. Dies nennt man Resubstitution und führt in obigem Beispiel zu folgenden Gleichungen sowie Lösungen:

> $u = x^2 = 4 \quad \text{und} \quad x^2 = 9$
>
> Die Lösungen der Gleichung lauten somit:
>
> $x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = -2 \quad \text{und} \quad x_3 = 3 \quad \text{und} \quad x_4 = -3$,
> d.h. $\mathbb{L} = \{-3;\ -2;\ 2;\ 3\}$.

$$x^8 - 15x^4 - 16 \;=\; 0$$

Substitution

$x^4 = u$

$$\begin{aligned} u^2 - 15u - 16 &= 0 && \mid \text{p-q-Formel} \\ u_\pm &= \tfrac{15}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{-15}{2}\right)^2 + 16} \end{aligned}$$

$$u_+ = 16 \quad \text{und} \quad u_- = -1$$

Resubstitution

Es gibt kein x mit $x^4 = u_- = -1$.
$x^4 = u_+ = 16$ hat die beiden Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$,
d.h. $\mathbb{L} = \{-2;\ 2\}$.

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Berechnen Sie folgende Gleichungen (ohne Taschenrechner) und überprüfen Sie Ihre Lösungen, indem Sie anschließend auf „Antwort" klicken.

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

c) $4x^4 + 8x^2 - 60 = 0$

d) $4x^6 + 3x^3 - 1 = 0$

Antworten

a) $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = \sqrt{2},\ x_4 = -\sqrt{2}$

b) $x_1 = -2,\ x_2 = 2,\ x_3 = -3,\ x_4 = 3$

c) $x_1 = \sqrt{3},\ x_2 = -\sqrt{3}$

d) x_1=-1, $x_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \approx 0,63$

Lösung zu a

Der Wert x^2 wird durch u und folglich x^4 durch u^2 substituiert.

$u^2 - 3u + 2 = 0$

Die p-q-Formel wird angewendet:

$u_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}}.$

Man erhält somit die Werte $u_1 = 1$ und $u_2 = 2.$

Nun wird resubstituiert und für u wieder x^2 eingesetzt:

Damit ist $x^2_{1,2} = u_1,\ x^2_{3,4} = u_2.$

Die Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind somit $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = \sqrt{2}$ und $x_4 = -\sqrt{2}.$

Lösung zu b

Der Wert x^2 wird durch u und folglich x^4 durch u^2 substituiert.

$u^2 - 13u + 36 = 0$

Alternativ zur p-q-Formel lässt sich hier auch der Satz von Vieta anwenden:

$u_1 * u_2 = 36$ und $u_1 + u_2 = 13.$

Daraus ergeben sich die Werte $u_1 = 4$ und $u_2 = 9.$

Nun wird resubstituiert und für u wieder x^2 eingesetzt: $x_{1,2}^2 = u_1$ und $x_{3,4}^2 = u_2$.

Man erhält somit $x_1 = -2,$ $x_2 = 2,$ $x_3 = -3$ und $x_4 = 3.$

Lösung zu c

Der Wert x^2 wird durch u und folglich x^4 durch u^2 substituiert.

$4u^2 + 8u - 60 = 0 \quad \mid : 4$

$\Leftrightarrow u^2 + 2u - 15 = 0$

Mit der p-q-Formel erhält man $u_1 = 3$ und $u_2 = -5.$

Nun wird nach Möglichkeit resubstituiert und für u wieder x^2 eingesetzt. Damit ist $x_{1,2}^2 = u_1 = 3$ und $x_{3,4}^2 = u_2 = -5.$

Die Ergebnisse für $u_1 = 3$ sind $x_1 = \sqrt{3}$ und $x_2 = -\sqrt{3}$. Aber $x^2 = -5$ hat keine relle Lösung, da das Quadrat einer reellen Zahl nie negativ ist.

Die ursprüngliche Gleichung hat also die beiden Lösungen $x_1 = \sqrt{3}$ und $x_2 = -\sqrt{3}.$

Lösung zu d

Der Wert x^3 wird durch u und folglich x^6 durch u^2 substituiert.

$$4u^2 + 3u - 1 = 0 \quad \Big| : 4$$

$$\Leftrightarrow u^2 + \frac{3}{4}u - \frac{1}{4} = 0$$

Die p-q-Formel ergibt $u_{1,2} = -\frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{16}{64}} = -\frac{3}{8} \pm \frac{5}{8}$.

Damit ergeben sich die Werte $u_1 = -1$ und $u_2 = \frac{1}{4}$.

Nun wird resubstituiert und für u wieder x^3 eingesetzt:

$(x_1)^3 = u_1 = -1$ und $(x_2)^3 = u_2 = \frac{1}{4}$.

Man erhält somit $x_1 = -1$ und $x_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \approx 0{,}63$.

ÜBUNG 2

Lösen Sie die Gleichungen durch Substitution.
(Exponential- und Logarithmusfunktionen werden hier im Vorgriff schon verwendet. Die benutzten Eigenschaften werden in Kapitel VI ausführlich behandelt.)

a) $-(x+4)^6 + 12(x+4)^3 = 11$

b) $2^{4x} + 2^{2x} - 6 = 0$

c) $2^{2x} - 2^x - 6 = 0$

Antworten

a) $x_1 = -3$ und $x_2 = \sqrt[3]{11} - 4 \approx -1,78$

b) $x = \frac{1}{2}$

c) $x = \log_2(3) \approx 1,58$

Lösung zu a)

Der Wert $(x+4)^3$ wird durch u und folglich $(x+4)^6$ durch u^2 substituiert.

$$\begin{aligned} & -u^2+12u=11 \quad \big| -11 \\ \Leftrightarrow\ & -u^2+12u-11=0 \quad \big| \cdot(-1) \\ \Leftrightarrow\ & \quad u^2-12u+11=0 \end{aligned}$$

Die p-q-Formel wird angewendet:

$$u_{1,2}=6\pm\sqrt{36-11}=6\pm5.$$

Damit ergeben sich die Werte $u_1=1$ und $u_2=11$.

Nun wird resubstituiert und für u wieder $(x+4)^3$ eingesetzt:

$$(x_1+4)^3=u_1=1 \text{ und } (x_2+4)^3=u_2=11.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} & (x_1+4)^3=1 \qquad \big|\sqrt[3]{\cdot} \\ \Leftrightarrow\ & x_1+4=\sqrt[3]{1}=1 \quad \big| -4 \\ \Leftrightarrow\ & x_1=-4+1=-3 \qquad \text{und} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (x_2+4)^3=11 \qquad \big|\sqrt[3]{\cdot} \\ \Leftrightarrow\ & x_2+4=\sqrt[3]{11} \qquad \big| -4 \\ \Leftrightarrow\ & x_2=\sqrt[3]{11}-4\approx-1,78\,. \end{aligned}$$

Man erhält die Lösungen $x_1=-3$ und $x_2=\sqrt[3]{11}-4\approx-1,78\,.$

Lösung zu b)

Zum Erkennen der Substitution ist eine andere Schreibweise von 2^{2x} bzw. 2^{4x} hilfreich.

So gilt nach den Potenzregeln: $2^{2x} = (2^x)^2$ und $2^{4x} = (2^x)^4$.
Der Wert $2^{2x} = (2^x)^2$ wird durch u und folglich $2^{4x} = (2^x)^4$ durch u^2 substituiert:

$$u^2 + u - 6 = 0$$

Die p-q-Formel wird angewendet:

$$u_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}.$$

Damit ergeben sich die Werte $u_1 = 2$ und $u_2 = -3$.

Nun wird resubstituiert und für u wieder 2^{2x} eingesetzt. Man erhält $u_1 = 2 = 2^{2x}$. Das ist genau dann erfüllt, wenn $2x = 1$, also $x = \frac{1}{2}$. Zu u_2 gibt es keine Lösung, denn jede Potenz von 2 ist positiv.

Lösung zu c)

Der Wert 2^x wird durch u und folglich $2^{2x} = (2^x)^2$ durch u^2 substituiert:

$$u^2 - u - 6 = 0$$

Mit der p-q-Formel: $u_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

ergeben sich die Werte $u_1 = 3$ und $u_2 = -2$.

Nun wird resubstituiert und für u wieder 2^x eingesetzt.

Für $u_1 = 3 = 2^x$ ist $x = \log_2(3) \approx 1,58$ die Lösung. Zu $u_2 = -2$ gibt es keine Lösung, da jede Potenz von 2 positiv ist.

ÜBUNG 3

Lösen Sie die folgenden Gleichungen, die durch Anwendung geeigneter Substitutionen in quadratische Gleichungen umgeformt werden können.

a) $(x-1)^2 - x + 1 - 3x + 3 = 0$

b) $\frac{1}{x} + 2x^{-2} - 10 = 0$

c) $-(\frac{1}{x-2})^2 + (\frac{x-2}{3})^{-1} - \frac{9}{4} = 0$

Antworten

a) $x_1 = 5, \ x_2 = 1$

b) $x_1 = \frac{1}{2}, \ x_2 = -\frac{2}{5}$

c) $x = \frac{8}{3}$

Lösung zu a

Die Glieder der Gleichung werden abhängig von $x-1$ zusammengefasst :

$$(x-1)^2 - (x-1) - 3(x-1) = 0$$

Der Term $x-1$ wird durch u substituiert:

$$u^2 - 4u = 0.$$

Mit Faktorisierung $u\,(u-4) = 0$

und Anwendung der Nullproduktregel ergeben sich die Werte $u_1 = 4$ und $u_2 = 0$.

Nun wird resubstituiert und für u wieder $x-1$ eingesetzt:

Aus $(x_1 - 1) = u_1 = 4$ ergibt sich $x_1 = 5$,
und aus $(x_2 - 1) = u_2 = 0$ ergibt sich $x_2 = 1$.

Lösung zu b

Der Term $\frac{1}{x}$ wird durch u substituiert:

(Beachten Sie hierbei: $2x^{-2} = \frac{2}{x^2}$.)

$$u + 2u^2 - 10 = 0 \quad \Big| \quad : 2$$

$$\Leftrightarrow u^2 + \tfrac{1}{2}u - 5 = 0$$

Die p-q-Formel wird angewendet: $u_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{80}{16}}$.

Daraus folgt $u_1 = 2$ und $u_2 = -\frac{5}{2}$.

Nun wird resubstituiert und für u wieder $\frac{1}{x}$ eingesetzt:

Damit ergeben sich die Lösungen $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = -\frac{2}{5}$.

Lösung zu c

Der Term $\left(\frac{1}{x-2}\right)$ wird durch u substituiert.

$$-u^2 + 3u - \tfrac{9}{4} = 0 \quad \Big| \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad u^2 - 3u + \tfrac{9}{4} = 0$$

Die p-q-Formel wird angewendet: $u_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{4}}$.

Damit erhält man $u = \frac{3}{2}$.

Nun wird resubstituiert und für u wieder $\left(\frac{1}{x-2}\right)$ eingesetzt:

Damit ergibt sich $\frac{3}{2} = \frac{1}{x-2}$, und damit $x = \frac{8}{3}$.

ÜBUNG 4

Lösen Sie die folgenden Gleichungen, indem Sie sie zunächst durch Anwendung geeigneter Substitutionen auf quadratische Gleichungen zurückführen.
(Exponential- und Logarithmusfunktionen werden hier im Vorgriff verwendet.)

a) $16x^4 - 80x^2 + 19 = 0$

b) $2x^5 - 64x^3 - 288x = 0$

c) $5x^4 - 40x^2 - 45 = 0$

d) $e^{4x} - 5e^{2x} + 4 = 0$

Antworten

a) $x_1 = \frac{\sqrt{19}}{2},\ x_2 = -\frac{\sqrt{19}}{2},\ x_3 = \frac{1}{2},\ x_4 = -\frac{1}{2}$

b) $x_1 = 0,\ x_2 = 6,\ x_3 = -6$

c) $x_1 = 3,\ x_2 = -3$

d) $x_1 = \ln(2) \approx 0,7,\ x_2 = 0$

Lösung zu a

Der Ausdruck x^2 wird durch u substituiert.

$$16u^2 - 80u + 19 = 0 \quad \Big| \quad : 16$$

$$\Leftrightarrow u^2 - 5u + \frac{19}{16} = 0$$

Die p-q-Formel wird angewendet: $u_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{16}}$.

Damit erhält man $u_1 = \frac{19}{4}$ und $u_2 = \frac{1}{4}$.

Nun wird resubstituiert und für u wieder x^2 eingesetzt.

Damit ist $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{19}}{2}$ und $x_{3,4} = \pm\frac{1}{2}$.

Lösung zu b

Zuerst wird x ausgeklammert.

$$x\left(2x^4-64x^2-288\right)=0$$

Daraus folgt, dass $x_1=0$ eine Lösung ist.

Dann wird x^2 durch u substituiert.

$$2u^2-64u-288=0$$

Nun wird durch 2 dividiert:

$$u^2-32u-144=0.$$

Mit der p-q-Formel: $u_{1,2}=16\pm\sqrt{256+144}=16\pm\sqrt{400}$
erhält man $u_1=36$ und $u_2=-4$.

Nun wird resubstituiert und für positives u wieder x^2 eingesetzt:

Daraus ergeben sich $x_2=6$ und $x_3=-6$.

Lösung zu c

In der Gleichung wird x^2 durch u substituiert:

$$5u^2-40u-45=0 \quad \Big| \quad :5$$

$$\Leftrightarrow u^2-8u-9=0$$

Die p-q-Formel wird angewendet: $u_{1,2}=4\pm\sqrt{16+9}$.

Damit ergeben sich $u_1=9$ und $u_2=-1$.

Nun wird resubstituiert und für positive u wieder x^2 eingesetzt.

Damit ergibt sich $x_1=3$ und $x_2=-3$.

Lösung zu d

Der Ausdruck e^{2x} wird durch u und folglich e^{4x} durch u^2 substituiert.

$$u^2 - 5u + 4 = 0$$

Die p-q-Formel wird angewendet: $u_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$
erhält man $u_1 = 4$ und $u_2 = 1$.

Nun wird resubstituiert und für u wieder e^{2x} eingesetzt.

Damit ergeben sich die Bedingungen $e^{2x_1} = 4$ und $e^{2x_2} = 1$.

Durch Anwenden des Logarithmus erhält man $x_1 = \frac{1}{2}\ln(4) = \ln(2) \approx 0,7$ und $x_2 = 0$.

KAPITELÜBUNGEN

ÜBUNG 1

Lösen Sie folgende Gleichungen (ohne Taschenrechner).

a) $\sqrt{x+4} = x-2$

b) $\sqrt{2x-15} = x-7$

c) $2x^4 + 16x^2 - 40 = 0$

d) $|4-x| = 3$

Antwort

a) $\mathbb{L} = \{5\}$

b) $\mathbb{L} = \{8\}$

c) $\mathbb{L} = \left\{-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right\}$

d) $\mathbb{L} = \{1;\ 7\}$

Lösung zu a

Auf beiden Seiten der Gleichung wird quadriert.

$$x + 4 = (x - 2)^2$$

Nun wird ausmultipliziert. So ergibt sich:

$$x + 4 = x^2 - 4x + 4,$$

also

$$0 = x^2 - 5x.$$

Es gilt weiter:

$$x^2 - 5x = x(x - 5) = 0.$$

Nach der Null-Produktregel sind also:

$x_1 = 5$ und $x_2 = 0$ mögliche Lösungen der ursprünglichen Gleichung.

Allerdings löst nur $x_1 = 5$ die ursprüngliche Gleichung,

$$\sqrt{x + 4} = x - 2,$$

wie durch das Einsetzen beider Lösungen x_1, x_2 in diese Gleichung sofort bestätigt wird:

$$\sqrt{5 + 4} = 5 - 2,$$

$$\Rightarrow \sqrt{9} = 3.$$

$$\sqrt{0 + 4} \neq 0 - 2.$$

Lösung zu b

Beide Seiten der Gleichung werden quadriert.

$$2x - 15 = (x-7)^2$$
$$\Rightarrow 2x - 15 = x^2 - 14x + 49 \quad \Big| -2x + 15$$
$$\Rightarrow 0 = x^2 - 16x + 64$$

Mit Hilfe der p-q-Formel erhält man $x_1 = 8$. Das Einsetzen in die Originalgleichung liefert eine wahre Aussage.

Lösung zu c

Im ersten Schritt wird x^2 durch u substituiert und anschließend die dadurch entstehende Gleichung durch 2 dividiert:

$$u^2 + 8u - 20 = 0.$$

Danach wird die p-q-Formel angewendet

$$u_{1,2} = -4 \pm \sqrt{36}.$$

Dadurch ergeben sich die Lösungen $u_1 = 2$ und $u_2 = -10$.

Nun wird resubstitutiert und für u wieder x^2 eingesetzt:

Daraus ergeben sich die Lösungen $x_1 = -\sqrt{2}$ und $x_2 = \sqrt{2}$.

Lösung zu d

Fallunterscheidung für $4-x<0$ und für $4-x\geq 0$:

1. Fall: $4<x$ und $-(4-x)=3$.

Man erhält:

$$x=7.$$

Da $7>4$ ist, ist $x=7$ tatsächlich eine Lösung.

2. Fall: $4\geq x$ und $4-x=3$.

Man erhält:

$$x=1.$$

Da $1\leq 4$ ist, ist $x=1$ tatsächlich eine Lösung.
Wir haben also die Lösungen $x_1=7$ und $x_2=1$.

ÜBUNG 2

Lösen Sie folgende Gleichungen (ohne Taschenrechner).

a) $3x - 5(3 - 2x) + 3(-4 + 3x) = 3 - 8(7 - 3x)$

b) $3x - 4(2 - 2x) - 4(x + 11) + 25x^2 = 3 - 3(3 - 3x) - (5 + 5x)(5 - 5x)$

c) $\sqrt{4x + \sqrt{x + 3}} = \sqrt{5x + 1}$

d) $\left|\frac{x-3}{x+2}\right| = 4$

Antworten

a) $\mathbb{L} = \{13\}$

b) $\mathbb{L} = \{-10{,}5\}$

c) $\mathbb{L} = \{1\}$

d) $\mathbb{L} = \{-\frac{11}{3};\ -1\}$

Lösung zu a

Auf beiden Seiten der Gleichung werden zunächst die Klammern ausmultipliziert und anschließend auf jeder Seite gleichartige Terme zusammengefasst.

$$3x - 15 + 10x - 12 + 9x = 3 - 56 + 24x \quad \Leftrightarrow \quad 22x - 27 = -53 + 24x.$$

Nun wird weiter zusammengefasst und nach x aufgelöst:

$$26 = 2x,$$

$$13 = x.$$

Lösung zu b

Auf beiden Seiten der Gleichung werden die Klammern aufgelöst.

$$3x - 8 + 8x - 4x - 44 + 25x^2 = 3 - 9 + 9x - 25 + 25x^2.$$

Nun wird zusammengefasst und man erhält:

$$-21 = 2x,$$

$$-10{,}5 = x.$$

Lösung zu c

Im ersten Schritt wird auf beiden Seiten der Gleichung quadriert:

$$4x + \sqrt{x+3} = 5x + 1.$$

Danach wird $4x$ subtrahiert und anschließend nochmal beide Seiten der so entstehenden neuen Gleichung quadriert. Damit ergibt sich:

$$0 = x^2 + x - 2.$$

Nun wird die p-q-Formel angewendet und man erhält:

$$x_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4}}.$$

Daraus ergeben sich die Werte $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$.

Nach dem Einsetzen in die Ursprungsgleichung erhält man nur für $x_1 = 1$ eine wahre Aussage. Der Term $\sqrt{5x+1}$ ist für $x = -2$ nicht definiert.

Lösung zu d

Zu Beginn wird $x = -2$ ausgeschlossen, denn der Nenner darf nicht Null sein. Im Weiteren werden nur $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$ betrachtet.

Fallunterscheidung für $\frac{x-3}{x+2} \geq 0$ und für $\frac{x-3}{x+2} < 0$: Ein Bruch ist positiv, wenn Zähler und Nenner beide positiv oder beide negativ sind. Das ist der Fall, wenn $x > 3$ oder $x < -2$ gilt. Für $x = 3$ ist der Bruch Null. Der Bruch ist negativ, wenn Zähler und Nenner verschiedene Vorzeichen haben, also für $-2 < x < 3$.

1. Fall: $\frac{x-3}{x+2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -2$ oder $x \geq 3$

Aufgelöst wird die Gleichung:

$$\frac{x-3}{x+2} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x - 3 = 4x + 8 \quad \Leftrightarrow \quad -11 = 3x.$$

So ergibt sich $x = -\frac{11}{3}$. Das erfüllt $-\frac{11}{3} < -2$ und gehört damit zur Lösungsmenge.

2. Fall: $\frac{x-3}{x+2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < x < 3$

Aufgelöst wird die Gleichung:

$$-\frac{x-3}{x+2} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3 - x = 4x + 8 \quad \Leftrightarrow \quad -5 = 5x.$$

So folgt $x = -1$ und -1 liegt zwischen -2 und 3.

Es ergeben sich also die Lösungen $x_1 = -\frac{11}{3}$ und $x_2 = -1$.

ÜBUNG 3

Lösen Sie folgende Gleichungen (ohne Taschenrechner).

a) $\sqrt[7]{x+1} = \sqrt[14]{2x+10}$

b) $\left|x^2 - 9\right| = 5$

c) $\sqrt[8]{7x+1} = \sqrt[4]{x+1}$

Antwort

a) $\mathbb{L} = \{3\}$

b) $\mathbb{L} = \left\{-\sqrt{14};\ -2;\ 2;\ \sqrt{14}\right\}$

c) $\mathbb{L} = \{0;\ 5\}$

Lösung zu a

Beide Seiten der Gleichung werden mit dem höheren Wurzelexponenten potenziert.

$$(\sqrt[7]{x+1})^{14} = (\sqrt[14]{2x+10})^{14}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^{\frac{14}{7}} = 2x+10$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 2x+10$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9$$

Daraus folgt: $x_{1,2} = \pm 3.$

Es wird die Probe durchgeführt.

Das Ergebnis $x_2 = -3$ löst die ursprüngliche Gleichung nicht, denn $\sqrt[7]{x+1}$ ist für $x = -3$ nicht definiert, aber $x_1 = 3$ erfüllt die Gleichung.

Damit lautet die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \{3\}.$$

Lösung zu b

Fallunterscheidung für $x^2 - 9 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 3$ oder $x \leq -3$ und für $x^2 - 9 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3 < x < 3$:

1. Fall: $x \leq -3$ oder $x \geq 3$

Aufgelöst wird die Gleichung:

$x^2 - 9 = 5$

und man erhält: $x_1 = -\sqrt{14}$ sowie $x_2 = \sqrt{14}$.

2. Fall: $-3 < x < 3$

Aufgelöst wird die Gleichung:

$-x^2 + 9 = 5$

und man erhält: $x_3 = -2$ sowie $x_4 = 2$.

Damit lautet die Lösungsmenge:

$\mathbb{L} = \left\{-\sqrt{14};\ -2;\ 2;\ \sqrt{14}\right\}$.

Lösung zu c

Beide Seiten der Gleichung werden mit dem höheren Wurzelexponenten potenziert.

$$(\sqrt[8]{7x+1})^8 = (\sqrt[4]{x+1})^8$$

$$\Leftrightarrow (7x+1)^{\frac{8}{8}} = (x+1)^{\frac{8}{4}}$$

$$\Leftrightarrow 7x+1 = (x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 7x+1 = x^2+2x+1$$

$$\Leftrightarrow 5x - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x = 0$$

Es wird faktorisiert:

$$x(x-5) = 0.$$

Das wird gelöst von $x_1 = 0$ und $x_2 = 5$.

Es wird die Probe durchgeführt. Beide Ergebnisse für x ergeben in der Ursprungsgleichung eine wahre Aussage.

Damit lautet die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \{0;\ 5\}.$$

ÜBUNG 4

Lösen Sie folgende Gleichungen (ohne Taschenrechner).

a) $5x^5 - 15x^3 + 10x = 0$

b) $\sqrt[3]{x - 5\sqrt[3]{x+2}} = 2$

c) $|2x + 4| = 6$

d) $|x - 2| = 2x + 5$

Antwort

a) $\mathbb{L} = \left\{0;\ \sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ 1;\ -1\right\}$

b) $\mathbb{L} = \{6\}$

c) $\mathbb{L} = \{1;\ -5\}$

d) $\mathbb{L} = \{-1\}$

Lösung zu a

Die Gleichung wird faktorisiert.

$$x\left(5x^4 - 15x^2 + 10\right) = 0$$

Diese Gleichung ist nach der Nullproduktregel erfüllt für $x_1 = 0$.

Nun wird im zweiten Faktor x^2 mit u substituiert und die Gleichung durch 5 dividiert:

$$u^2 - 3u + 2 = 0.$$

Mit der p-q-Formel erhält man folgende Lösungen (in u): $u_1 = 2$ und $u_2 = 1$.

Es wird resubstituiert und für u wieder x^2 eingesetzt: Damit ergeben sich $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$ sowie $x_{4,5} = \pm 1$.

Die Lösungsmenge ist insgesamt: $\mathbb{L} = \left\{0;\ \sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ 1;\ -1\right\}$.

Lösung zu b

Beide Wurzeln werden miteinander multipliziert.

$$\sqrt[3]{(x-5)(x+2)}=2$$

Nun wird unter der Wurzel ausmultipliziert.

$$\sqrt[3]{x^2+2x-5x-10}=2$$

Jetzt werden beide Seiten der Gleichung mit dem Wurzelexponenten 3 potenziert und anschließend alle Terme auf eine Seite gebracht.

$$x^2-3x-18=0$$

Mit Hilfe der p-q-Formel erhält man: $x_1=6$ und $x_2=-3$.

Es wird die Probe durchgeführt.

Daraus folgt, dass die Zahl -3 keine Lösung der ursprünglichen Gleichung ist, denn $\sqrt[3]{x+2}$ ist für $x<-2$ nicht definiert. Die andere Lösung erfüllt die ursprüngliche Gleichung.

Damit lautet die Lösungsmenge: $\mathbb{L}=\{6\}$.

Lösung zu c

Fallunterscheidung für $2x+4\geq 0$ und für $2x+4<0$:

1. Fall: $x\geq -2$

Die Gleichung $2x+4=6$ wird nach x aufgelöst.

Daraus ergibt sich $x_1=1$.

2. Fall: $x<-2$

Die Gleichung $-2x-4=6$ wird nach x aufgelöst.

Folglich ist $x_2=-5$.

Damit lautet die Lösungsmenge: $\mathbb{L}=\{1;\ -5\}$.

Lösung zu d

Fallunterscheidung für $x-2\geq 0$ und für $x-2<0$:

1. Fall: $x\geq 2$

Die Gleichung $x-2=2x+5$ wird nach x aufgelöst.

Folglich ist $x=-7$.

Diese Lösung liegt nicht im vorher festgelegten Bereich $x\geq 2$.

2. Fall: $x<2$

Die Gleichung $-x+2=2x+5$ wird nach x aufgelöst.

Folglich ist $x_2=-1$.

Damit lautet die Lösungsmenge: $\mathbb{L}=\{-1\}$.