1. EINFÜHRUNG, LINEARE UNGLEICHUNGEN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie kennen die grafische Darstellung von linearen und quadratischen Termen sowie vom Betrag linearer Terme.
- Sie können einfache Rechenoperationen an Ungleichungen durchführen und lineare Ungleichungen lösen.
- Auch die grafische Lösung linearer Ungleichungen ist Ihnen möglich.

Ungleichungen treten in Anwendungen oft auf, wenn Grenzwerte nicht über- oder unterschritten werden dürfen (Schadstoffanteil, Kosten, Datenübertragungsrate). Ungleichungen werden mit den Vergleichszeichen $<, >, \leq$ und $\geq$ beschrieben, die im Abschnitt Abschnitt I.1.5 eingeführt wurden. Im Gegensatz zu den in Kapitel II behandelten Gleichungen in einer Variablen, bei denen die Lösungsmenge meist aus einer oder wenigen Zahlen besteht, ist die typische Lösungsmenge einer Ungleichung ein Intervall, z.B. $\mathbb{L} = (0; \infty) = \mathbb{R}^+$ für die Ungleichung $x > 0$.

1.1 Rechnen mit Vergleichszeichen

Um die Lösungsmenge einer Ungleichung zu bestimmen, sind folgende äquivalente Umformungen nützlich. (Siehe Kapitel II.1 Aussagen, Folgerungen, Äquivalenzen, Lösungsmengen zu äquivalenten Aussagen.)

Werden die beiden Seiten einer Ungleichung vertauscht, dreht sich das Vergleichszeichen um. Für zwei Zahlen oder Terme a, b gilt

$$\begin{aligned} a < b &\iff b > a, \\ a \leq b &\iff b \geq a. \end{aligned}$$

Wird auf beiden Seiten einer Ungleichung dieselbe Zahl oder derselbe Term c addiert, so bleibt die Ungleichung erhalten:

$$\begin{aligned} a < b &\iff a + c < b + c, \\ a \geq b &\iff a + c \geq b + c \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

$$2 \geq x \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 2, \qquad \mid \text{Vertauschen der Seiten}$$

$$\begin{aligned} & x + 3 > 5 \qquad \mid +(-3) \\ \Leftrightarrow \quad & x + 3 + (-3) > 5 + (-3) \quad \Leftrightarrow \quad x > 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2x < x \qquad \mid +(-x) \\ \Leftrightarrow \quad & 2x - x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0, \end{aligned}$$

$$5x + 2 \geq -3 \quad \Leftrightarrow \quad 5x + 3 \geq -2.$$

Ergänzen Sie die Terme, so dass die Ungleichungen äquivalent sind. Benutzen Sie Regel 1.
(Geben Sie Potenzen wie x^3 als „x^3" ein.)

$2x > 9 \quad \iff \quad 9 <$? ,

$x^2 - 5 \leq 8 \quad \iff \quad$? $\leq 5.$

Prüfen Lösung anzeigen

Bei der Multiplikation beider Seiten einer Ungleichung mit einer positiven Zahl $c > 0$ bleibt die Ungleichung unverändert. Bei der Multiplikation mit einer negativen Zahl $d < 0$ wird das Vergleichszeichen aber umgekehrt, wie folgende Beispiele (Multiplikation mit -1) illustrieren:

$$5 > 0 \iff -5 < 0, \qquad x < 0 \iff -x > 0.$$

Für zwei reelle Zahlen oder Terme a und b und eine Zahl $c > 0$ gilt

$$a < b \iff c \cdot a < c \cdot b, \qquad a \leq b \iff c \cdot a \leq c \cdot b,$$

und bei Multiplikation mit $d < 0$

$$a < b \iff d \cdot a > d \cdot b, \qquad a \leq b \iff d \cdot a \geq d \cdot b.$$

Da Division durch $c > 0$ bzw. $d < 0$ gleich der Multiplikation mit dem Kehrwert $\frac{1}{c} > 0$ bzw. $\frac{1}{d} < 0$ ist, gilt auch

$$a < b \iff \tfrac{a}{c} < \tfrac{b}{c}, \qquad a < b \iff \tfrac{a}{d} > \tfrac{b}{d} \text{ etc.}$$

Beispiel 1

$$\begin{aligned} \tfrac{x}{3} &\geq -6 \qquad \Big| \cdot 3 \\ \Leftrightarrow \quad x &\geq -18 \end{aligned}$$

Beispiel 2

$$2x^2 < 4x - 6 \iff x^2 < 2x - 3$$

Beispiel 3

$$\begin{aligned} -\tfrac{x^2}{6} + \tfrac{x}{3} - 1 &> 0 \qquad \Big| \cdot (-6) \\ \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 6 &< 0. \end{aligned}$$

Beispiel 4

$$-7x \leq 14 \iff x \geq -2$$

Ergänzen Sie die Terme, so dass die Ungleichungen äquivalent sind. Benutzen Sie Regel 1.
(Geben Sie Potenzen wie x^3 als „x^3" ein.)

$\frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} > 9 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{?} \quad > 72.$

Prüfen Lösung anzeigen

Bei Multiplikation (Division) mit Termen, die von der Variablen x abhängen, müssen die Fälle unterschieden werden, in denen der Term positiv oder negativ ist. Solche Fallunterscheidungen werden in Abschnitt III.3.2 behandelt.

Eine weitere nützliche Regel für äquivalente Umformungen von Ungleichungen behandelt Potenzen.

Für zwei positive reelle Zahlen oder Terme a und b bleibt die Ungleichung bei Potenzierung beider Seiten mit einer positiven Potenz $p > 0$ erhalten:

$$a, b > 0: \qquad a < b \iff a^p < b^p, \qquad a \leq b \iff a^p \leq b^p.$$

Mit positiven Potenzen $p = 2$ und $p = \frac{1}{2}$ gilt z.B. für $x > 0$:

$$x \geq 9 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 \geq 81 \quad \Longleftrightarrow \quad x^{1/2} = \sqrt{x} \geq 3.$$

Ergänzen Sie die Terme, so dass die Ungleichungen äquivalent sind. Für $x > 0$ gilt

$x \leq 16 \iff \sqrt{x} \leq \boxed{?}$, $\qquad x < 3 \iff x^2 < \boxed{?}$.

Prüfen Lösung anzeigen

1.2 Rechnerische Lösung linearer Ungleichungen

Bei linearen Ungleichungen stehen auf beiden Seiten des Vergleichszeichens lineare Terme oder Konstanten, z.B. $5x - 4 \leq 2x + 2$ oder $7 - 3x > 2$.

Ungleichungen der Form

$$ax + b < cx + d \qquad \text{oder} \qquad ax + b \leq cx + d$$

mit reellen Konstanten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ heißen *lineare Ungleichungen*.

Die *Lösungsmenge* einer Ungleichung ist die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für welche die Ungleichung erfüllt ist.

Da $ax + b < cx + d \quad \Longleftrightarrow \quad cx + d > ax + b$ sind auch die Vergleichszeichen $>$ und $\geq$ bei dieser Definition eingeschlossen.

Die lineare Ungleichung $3x - 1 \leq 2x + 2$ hat z.B. $x = 0$ als Lösung, denn Einsetzen von $x = 0$ ergibt $-1 \leq 2$, eine richtige Ungleichung. Setzt man aber z.B. $x = 4$ ein, erhält man die falsche Ungleichung

$11 \leq 10$. Deshalb gehört $x = 4$ nicht zur Lösungsmenge. Um die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung systematisch zu bestimmen, ist es zweckmäßig, durch Addition oder Subtraktion alle Terme mit x auf eine Seite des Vergleichszeichens und alle Konstanten auf die andere Seite zu bringen, z.B.

$$3x - 1 \leq 2x + 2 \iff 3x - 2x \leq 1 + 2 \iff x \leq 3.$$

Die lineare Ungleichung wurde „nach x aufgelöst”. Es wurden nur Äquivalenzumformungen durchgeführt, daher sind die Lösungen der ursprünglichen Ungleichung genau alle x, die die Ungleichung $x \leq 3$ erfüllen. Das kann folgendermaßen notiert werden:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 3x - 1 \leq 2x + 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}.$$

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Ungleichung ist also das Intervall

$$\mathbb{L} = (-\infty; 3].$$

Für alle x, die links von 3 auf dem Zahlenstrahl liegen, sowie für $x = 3$ ist diese Ungleichung erfüllt. Einige weitere Beispiele:

Beispiel 1

$5x - 4 \geq 2x + 2$

$$\begin{aligned} & 5x - 4 \geq 2x + 2 && \mid -2x + 4 \\ \Leftrightarrow\ & 3x \geq 6 && \mid :3 \\ \Leftrightarrow\ & x \geq 2. \end{aligned}$$

Die lineare Ungleichung wurde „nach x aufgelöst”.
Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} = [2; \infty)$.

Beispiel 2

(a) $2x + 5 \leq 2x - 3$ und (b) $2x + 5 > 2x - 3$

$$\begin{array}{rrcll} & 2x+5 & \leq & 2x-3 & \quad \mid -2x \\ \Leftrightarrow & 5 & \leq & -3. & \end{array}$$

Diese Aussage ist falsch, also ist Ungleichung (a) für kein x erfüllt, die Lösungsmenge ist leer, $\mathbb{L} = \{\} = \emptyset$.

Die umgekehrte Ungleichung (b)

$$2x + 5 > 2x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad 5 > -3$$

ist richtig, Ungleichung (b) ist für alle x erfüllt, $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

Beispiel 3

$7 - 3x > 2$

$$7 - 3x > 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 7 - 2 > 3x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{5}{3} > x.$$

Alle x, die links von $\frac{5}{3}$ auf dem Zahlenstrahl liegen, erfüllen die Ungleichung. Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$.

Beispiel 4

$7x + 8 > 4x - 1$

$$7x + 8 > 4x - 1 \iff 7x - 4x > -8 - 1 \iff 3x > -9 \iff x > -3.$$

Alle x, die rechts von -3 auf dem Zahlenstrahl liegen, erfüllen die Ungleichung. Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = (-3; \infty)$.

Beispiel 5

$-5x < 15$

$$\begin{array}{rrcll} & -5x & < & 15 & \quad \mid :(-5) \\ \Leftrightarrow & x & > & -3. & \end{array}$$

(Beachten Sie die Umkehrung des Vergleichszeichens bei Division durch eine negative Zahl.)
Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = (-3; \infty)$.

Lösen Sie die linearen Ungleichungen nach x auf.

$3\,x + 5 < 7 \quad \Longleftrightarrow \quad x <$? ,

$\frac{x}{-3} + 3 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq$? .

Prüfen Lösung anzeigen

1.3 Grafische Darstellung linearer und quadratischer Terme

Zur Veranschaulichung von Ungleichungen und zur grafischen Bestimmung von deren Lösungsmengen ist es zweckmäßig, die auftretenden Terme in einem zweidimensionalen Koordinatensystem darzustellen. Das wird hier für die in diesem Kapitel behandelten linearen und quadratischen Terme sowie für Beträge linearer Terme erläutert. Es sind Spezialfälle von Graphen von Funktionen, die allgemeiner in Kapitel VI.1 eingeführt werden und für Geraden eingehend in Kapitel IX.1. Hier werden die für dieses Kapitel hilfreichen Ergebnisse kurz zusammengefasst.

Zur Darstellung von linearen Termen wie $3x + 4$, oder allgemein $ax + b$ mit Konstanten a und b, ist es üblich, die Variable x im zweidimensionalen Koordinatensystem auf der horizontalen Achse (der „x-Achse”) abzutragen, und die für diese x berechneten Werte des Terms $y = ax + b$ nach oben auf der vertikalen Achse (der „y-Achse”) abzutragen. Ebenso werden quadratische Terme $y = ax^2 + bx + c$ mit Konstanten $a \neq 0$, b und c und andere Terme behandelt.

Diese Darstellung linearer Terme ergibt immer *Geraden* und quadratische Terme werden durch *Parabeln* dargestellt. Der Verlauf dieser Kurven für einen gegebenen Term kann grob mit einer *Wertetabelle* bestimmt werden. Dazu wird der Wert des Ausdrucks für verschiedene x aus einem Bereich berechnet und in eine Tabelle eingetragen. Diese Tabelle deutet das Verhalten des Terms in diesem Bereich an.

Beispiel 1

Eine mögliche Wertetabelle für den Term $x+1$ ist

x	**-2**	**-1,5**	**-1**	**-0,5**	**0**	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**
$x+1$	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Beispiel 2

Eine mögliche Wertetabelle für den linearen Term $5x+2$ ist

x	**-2**	**-1,5**	**-1**	**-0,5**	**0**	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**
$5x+2$	-8	-5,5	-3	-0,5	2	4,5	7	9,5	12

Beispiel 3

Eine mögliche Wertetabelle für den quadratischen Term x^2-2x-1 ist

x	**-2**	**-1,5**	**-1**	**-0,5**	**0**	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**
x^2-2x-1	7	4,25	2	0,25	-1	-1,75	-2	-1,75	-1

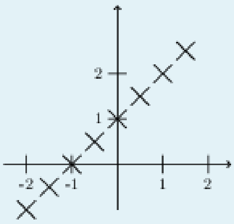
Trägt man die berechneten Punkte in ein Koordinatensystem ein, so sieht man, dass sie in den Beispielen 1 und 2 auf Geraden liegen. Im Beispiel 3 liegen sie auf einer „nach oben offenen Parabel".

Beispiel 1

Die Tabelle aus dem vorherigen Beispiel 1 in 3

x	**-2**	**-1,5**	**-1**	**-0,5**	**0**	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**
$x+1$	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

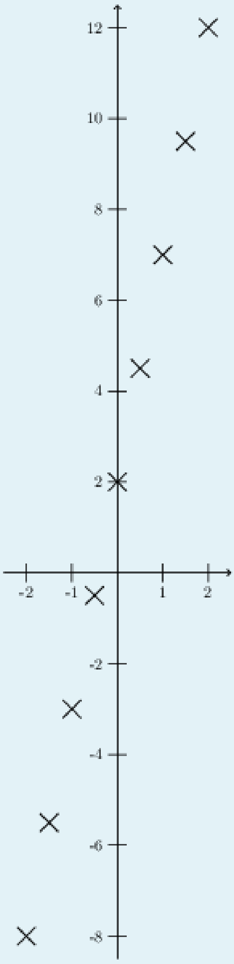
wird folgendermaßen im Koordinatensystem eingetragen



Beispiel 2

x	**-2**	**-1,5**	**-1**	**-0,5**	**0**	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**
$5x+2$	-8	-5,5	-3	-0,5	2	4,5	7	9,5	12

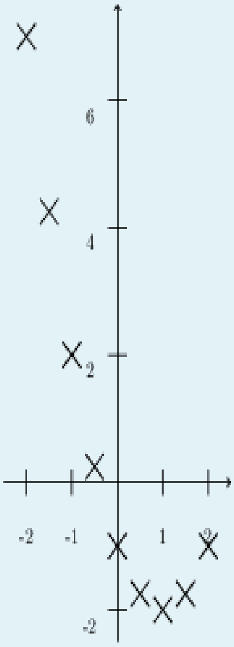
Diese Werte aus Beispiel 2 in 3 ergeben folgendes Bild im Koordinatensystem:



Beispiel 3

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
x^2-2x-1	7	4,25	2	0,25	-1	-1,75	-2	-1,75	-1

Die Punkte im Koordinatensystem für Beispiel 3 in 3:



Mit den folgenden **Visualisierungen** können Sie lineare und quadratische Terme sowie den Betrag linearer Terme grafisch darstellen. Einige Punkte mit ganzzahligem x-Wert sind im ersten Fall hervorgehoben. In diesem Abschnitt werden nur Ungleichungen mit linearen Termen behandelt, Ungleichungen mit quadratischen Termen und Beträgen in den beiden folgenden Abschnitten.

Visualisierungen

Lineare Terme

[online-only]

Quadratische Terme

[online-only]

Betrag linearer Terme

Die Darstellung des Betrages eines linearen Terms $|ax+b|,\ a \neq 0,$ erhält man, indem man die beiden Geraden für $ax+b$ und $-(ax+b)$ zeichnet (sie schneiden sich auf der x-Achse) und nur die Teile oberhalb und auf der x-Achse nimmt. Das ist die „V-förmige" blaue Kurve (ohne die gelben Teile der Geraden unterhalb der x-Achse).

[online-only]

1.4 Grafische Lösung linearer Ungleichungen

Eine anschauliche Möglichkeit, Ungleichungen zu lösen, bietet das grafische Verfahren. Hierbei werden beide Seiten einer Ungleichung in einem Koordinatensystem dargestellt, z.B. zur Unterscheidung in verschiedenen Farben. Im Fall einer linearen Ungleichung, z.B. $2x+1 > -x+4$ erhält man zwei Geraden. Wenn der Term auf der linken Seite blau dargestellt ist und der Term auf der rechten Seite rot, dann ist die Ungleichung „links $>$ rechts" für alle die Werte von x erfüllt, für die die blaue Kurve höher als die rote ist. In der Visualisierung unten können Sie ablesen, dass das in diesem Beispiel für $x > 1$ erfüllt ist. Entsprechend für andere Vergleichszeichen.

Wenn die Kurven sich schneiden, dann gehört bei den Vergleichszeichen $\geq$ und $\leq$ der x-Wert des Schnittpunktes auch zur Lösungsmenge, bei den strikten Ungleichungen $>$ und $<$ ist er ausgeschlossen.

Durch Experimentieren mit grafischen Lösungen erhält man einen Überblick über mögliche Arten von Lösungsmengen für die betrachteten Typen von Ungleichungen. Die grafischen Lösungen können auch zur „Rechenkontrolle" der Äquivalenzumformungen bei der rechnerischen Lösung dienen. Bei „einfachen runden Zahlen" kann man die Lösungsmenge aus der Grafik ablesen, aber schon in einfachen Beispielen wie $\mathbb{L} = [\frac{7}{13}; \infty)$ wird das mit der Grafik alleine nicht gelingen. Die Rechnung ist zur genauen Bestimmung der Lösungsmenge nötig.

Die Visualisierung erlaubt es, je einen linearen Term in den Farben blau und rot darzustellen.

Visualisierung

[online-only]

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Formen Sie eine Ungleichung äquivalent so um, dass die „linke" und „rechte" Seite der neuen Ungleichung die vorgegebene Form hat.

a) $5x+12 \leq -5(x-1)+3$, neue linke Seite: x, rechts keine Vielfachen von x

b) $3x^2+1 \geq 6x^2+9x-5$, neue linke Seite: x^2, rechts keine Vielfachen von x^2

c) $2x^2+4x-5 < x+2\left|7+x^2\right|$, neue linke Seite: $\left|7+x^2\right|$, rechts kein Betrag

d) $4x\,(x-2)-x > 9\,(1-x)$, neue linke Seite: $|x|$, rechts kein Betrag

Antwort

a) $x \leq -\frac{2}{5}$

b) $x^2 \leq -3x+2$

c) $\left|7+x^2\right| > x^2+\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$

d) $|x| > \frac{3}{2}$

Lösung a

Zunächst werden alle Vielfachen von x „auf die linke Seite gebracht" und die Zahlen auf die rechte. Dann wird durch den Koeffizienten von x dividiert.

$$\begin{array}{rlll} & 5x+12 & \leq & -5\,(x-1)+3 & \mid \text{ Ausmultiplizieren} \\ \Leftrightarrow & 5x+12 & \leq & -5x+8 & \mid +5x \\ \Leftrightarrow & 10x+12 & \leq & 8 & \mid -12 \\ \Leftrightarrow & 10x & \leq & -4 & \mid :10 \\ \Leftrightarrow & x & \leq & -\frac{2}{5}. & \end{array}$$

Das Ergbnis ist in der gewünschten Form.

Lösung b

Zunächst werden alle Vielfachen von x^2 „auf die linke Seite gebracht" und die anderen Terme auf die rechte. Dann wird durch den Koeffizienten von x^2 dividiert.

$$\begin{array}{rrcll} & 3x^2+1 & \geq & 6x^2+9x-5 & \mid\ -6x^2-1 \\ \Leftrightarrow & -3x^2 & \geq & 9x-6 & \mid\ :(-3) \\ \Leftrightarrow & x^2 & \leq & -3x+2. & \end{array}$$

Beachten Sie, dass bei Division durch eine negative Zahl das Vergleichszeichen umgekehrt wird.

Lösung c

Durch Subtraktion von x wird das Vielfache des Betrags auf der rechten Seite „isoliert" und dann wird durch den Koeffizienten dividiert. Danach werden die Seiten vertauscht mit Umkehr des Vergleichszeichens.

$$\begin{array}{rlcll} & 2x^2+4x-5 & < & x+2\left|7+x^2\right| & \mid\ -x \\ \Leftrightarrow & 2x^2+3x-5 & < & 2\left|7+x^2\right| & \mid\ :2 \\ \Leftrightarrow & x^2+\frac{3}{2}x-\frac{5}{2} & < & \left|7+x^2\right| & \mid\ \text{Seiten vertauschen} \\ \Leftrightarrow & \left|7+x^2\right| & > & x^2+\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}. & \end{array}$$

Lösung d

Zunächst wird $x^2 = |x|^2$ auf der linken Seite isoliert. Es zeigt sich, dass dann die rechte Seite dieser Ungleichung unabhängig von x (eine Zahl) ist.

$$\begin{array}{rlcll} & 4x\,(x-2)-x & > & 9\,(1-x) & \mid\ \text{Ausmultiplizieren} \\ \Leftrightarrow & 4x^2-9x & > & 9-9x & \mid\ +9x \\ \Leftrightarrow & 4x^2 & > & 9 & \mid\ :4 \\ \Leftrightarrow & x^2 & > & \frac{9}{4} & \mid\ \sqrt{\cdot} \\ \Leftrightarrow & |x| & > & \frac{3}{2}. & \end{array}$$

Da beide Seiten der Ungleichung größer gleich Null sind, kann die Ungleichung durch Wurzelziehen auf beiden Seiten äquivalent umgeformt werden. Diese Ungleichung konnte in die gewünschte Form umgeformt werden.

Bemerkung: Die Aufgabe dient dazu, äquivalente Umformungen von Ungleichungen zu üben. Ob die Umformung für einen bestimmten Zweck nützlich ist, wird hier nicht betrachtet.

ÜBUNG 2

Lösen Sie die linearen Ungleichungen durch äquivalente Umformungen nach x auf: Für eines der Vergleichszeichen $<$, $>$, $\leq$ und $\geq$ bringen Sie die Ungleichung in die Form $x \leq a$ oder $x > a$ oder $\ldots$ mit einer Zahl a (wenn das möglich ist).

Geben Sie dann die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Ungleichung an.

a) $7x - 1 \geq 5x + 8$

b) $3x + 4 > 5(x - 1) + 3$

c) $3x + 15 \geq x + 2\,(7 + x)$

d) $\frac{7x}{5} - 2 < 2\,\left(x - \frac{3}{4}\right)$

Antwort

a) $x \geq \frac{9}{2}$, $\mathbb{L} = \left[\frac{9}{2}; \infty\right)$,

b) $x < 3$, $\mathbb{L} = (-\infty; 3)$,

c) Auflösen nach x ist nicht möglich, $\mathbb{L} = \mathbb{R} = (-\infty; \infty)$,

d) $x > -\frac{5}{6}$, $\mathbb{L} = \left(-\frac{5}{6}; \infty\right)$.

Lösung a

Durch Addition oder Subtraktion von Termen werden alle Vielfachen von x „auf die linke Seite gebracht" und die Zahlen rechts zusammengefasst. Dann wird durch den Koeffizienten von x dividiert.

$$\begin{array}{rlll} & 7x - 1 & \geq & 5x + 8 \quad | \quad -5x + 1 \\ \Leftrightarrow & 2x & \geq & 9 \quad\quad\;\; | \quad : 2 \\ \Leftrightarrow & x & \geq & \frac{9}{2}. \end{array}$$

Die Ungleichung ist „nach x aufgelöst".

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ enthält alle x, die rechts von $\frac{9}{2}$ auf dem Zahlenstrahl liegen sowie den Randpunkt, also das Intervall $\left[\frac{9}{2}; \infty\right)$.

Lösung b

Durch Addition oder Subtraktion von Termen werden alle Vielfachen von x „auf die linke Seite gebracht" und die Zahlen rechts zusammengefasst. Dann wird durch den Koeffizienten von x dividiert.

$$\begin{array}{rlcll} & 3x+4 & > & 5\,(x-1)+3 & \mid \ \text{Ausmultiplizieren} \\ \Leftrightarrow & 3x+4 & > & 5x-2 & \mid \ -5x-4 \\ \Leftrightarrow & -2x & > & -6 & \mid \ :(-2) \\ \Leftrightarrow & x & < & 3. & \end{array}$$

Beachten Sie, dass im letzten Schritt bei Division durch eine negative Zahl das Vergleichszeichen umgekehrt wurde. Die Ungleichung ist „nach x aufgelöst".

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ enthält alle x, die links von 3 liegen, also das Intervall $\mathbb{L} = (-\infty; 3)$.

Lösung c

Durch Addition oder Subtraktion von Termen werden alle Vielfachen von x „auf die linke Seite gebracht" und die Zahlen rechts zusammengefasst.

$$\begin{array}{rlcll} & 3x+15 & \geq & x+2\,(7+x) & \mid \ \text{Ausmultiplizieren} \\ \Leftrightarrow & 3x+15 & \geq & 3x+14 & \mid \ -3x-15 \\ \Leftrightarrow & 0 & \geq & -1. & \end{array}$$

Die resultierende äquivalente Ungleichung ist eine wahre Aussage, die von x unabhängig ist.

Die Ungleichung ist für alle x erfüllt, die Lösungsmenge enthält alle reellen Zahlen, $\mathbb{L} = \mathbb{R} = (-\infty; \infty)$.

Bemerkung: Die umgekehrte Ungleichung $3x+15 \leq x+2\,(7+x) \Leftrightarrow 0 \leq -1$ ist falsch, sie ist für kein x erfüllt, die Lösungsmenge ist in diesem Fall die leere Menge $\emptyset = \{\}$.

Lösung d

Durch Addition oder Subtraktion von Termen werden alle Vielfachen von x „auf die linke Seite gebracht" und die Zahlen rechts zusammengefasst. Dann wird durch den Koeffizienten von x dividiert.

$$\begin{array}{rrcll} & \frac{7x}{5}-2 & < & 2\left(x-\frac{3}{4}\right) & \mid \text{ Ausmultiplizieren} \\ \Leftrightarrow & \frac{7x}{5}-2 & < & 2x-\frac{3}{2} & \mid -2x+2 \\ \Leftrightarrow & -\frac{3}{5}x & < & \frac{1}{2} & \mid \cdot\left(-\frac{5}{3}\right) \\ \Leftrightarrow & x & > & -\frac{5}{6}. & \end{array}$$

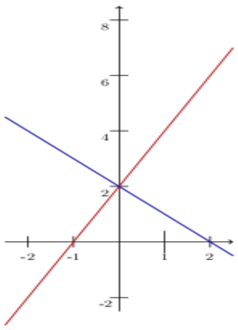
Beachten Sie, dass bei Multiplikation mit einer negativen Zahl das Vergleichszeichen umgekehrt wird. Das Ergbnis ist „nach x aufgelöst".

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \left(-\frac{5}{6};\infty\right)$.

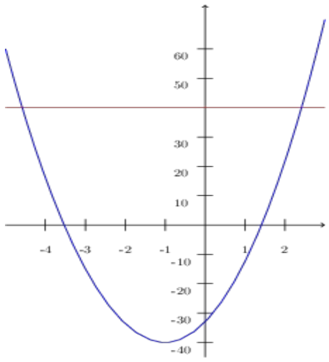
ÜBUNG 3

Geben Sie an, ob in den Abbildungen jeweils ein linearer Term, ein quadratischer oder der Betrag eines linearen Terms dargestellt ist.

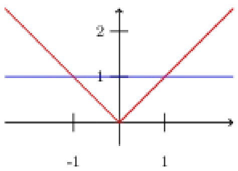
a)



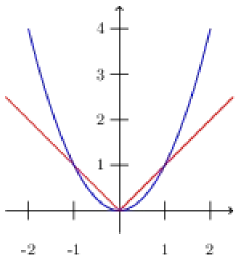
b)



c)



d)



Antwort

- a) zwei lineare Terme (rot und blau)
- b) ein linearer (rot), ein quadratischer Term (blau)
- c) ein linearer Term (blau) und der Betrag eines linearen Terms (rot)
- d) ein quadratischer Term (blau) und der Betrag eines linearen Terms (rot)

Lösung

Lineare Terme werden durch Geraden grafisch dargestellt.

Quadratische Terme werden durch Parabeln grafisch dargestellt.

Der Betrag eines linearen Terms wird durch zwei Halbgeraden grafisch dargestellt, die „V-förmig" zusammengesetzt sind.

ÜBUNG 4

Bestimmen Sie mit Hilfe der Grafik die Lösungsmengen $\mathbb{L}$ der folgenden linearen Ungleichungen.

Die linke Seite ist der Term $\frac{x}{3} - 1$, der als blaue Gerade dargestellt ist. Die rechte Seite ist $-x + b$, als rote Gerade dargestellt. Der Parameter b kann in der Grafik interaktiv verändert werden.

[online-only]

a) $b = \quad 3: \quad \frac{x}{3} - 1 \geq -x + 3$

b) $b = -1: \quad \frac{x}{3} - 1 < -x - 1$

c) $b = \frac{1}{3}: \quad \frac{x}{3} - 1 > -x + \frac{1}{3}$

d) $b = \quad 1: \quad \frac{x}{3} - 1 \leq -x + 1$

Antwort

a) $\mathbb{L} = [3; \infty)$

b) $\mathbb{L} = (-\infty; 0)$

c) $\mathbb{L} = (1; \infty)$

d) $\mathbb{L} = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$

Lösung a

Geben Sie in der Visualisierung $b = 3$ ein. Die Ungleichung „blau $\geq$ rot” ist an der Schnittstelle $x = 3$ und für alle x rechts davon auf dem Zahlenstrahl erfüllt. Daher ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = [3; \infty)$.

Lösung b

Geben Sie in der Visualisierung $b = -1$ ein. Die Ungleichung „blau $<$ rot” ist links von der Schnittstelle $x = 0$ auf dem Zahlenstrahl erfüllt. Daher ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = (-\infty; 0)$.

Lösung c

Geben Sie in der Visualisierung $b = \frac{1}{3}$ ein. Die Ungleichung „blau $>$ rot” ist für alle x rechts von der Schnittstelle $x = 1$ auf dem Zahlenstrahl erfüllt. Daher ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = (1; \infty)$.

Lösung d

Geben Sie in der Visualisierung $b = 1$ ein. Die Ungleichung „blau $\leq$ rot" ist an der Schnittstelle $x = \frac{3}{2}$ und für alle x links davon auf dem Zahlenstrahl erfüllt. Daher ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

2. QUADRATISCHE UNGLEICHUNGEN

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie können Ungleichungen mit quadratischen Termen grafisch und rechnerisch lösen.

2.1 Quadratische Terme

Quadratische Terme enthalten Vielfache der Variablen x und ihres Quadrats x^2 sowie Konstanten, also Ausdrücke der Form

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Bei $a = 0$ sind das lineare Terme, die im vorigen Abschnitt besprochen wurden. Wir betrachten deshalb hier den Fall $a \neq 0$. Nach Division aller Koeffizienten durch a erhält man die Normalform

$$x^2 + px + q, \qquad p, q \in \mathbb{R}.$$

2.2 Quadratische Ungleichungen

Quadratische Ungleichungen enthalten quadratische Terme, z.B. $5x^2 - 3 > 2x^2 + 4x - 2$ oder $7x \leq x^2 + 7x + 4$.

Durch Subtraktion des Terms auf der rechten Seite des Vergleichszeichens kann jede solche Ungleichung in die äquivalente Form mit Null auf der rechten Seite des Vergleichszeichens überführt werden.

Beispiel 1

$$\begin{array}{rrcl} & x^2 - 2x & \leq & 1 \qquad\qquad | -1 \\ \Leftrightarrow & x^2 - 2x - 1 & \leq & 0 \end{array}$$

Beispiel 2

$$\begin{array}{rrcl} & 2x & > & x^2 - 3x + 1 \qquad\qquad | -x^2 + 3x - 1 \\ \Leftrightarrow & -x^2 + 5x - 1 & > & 0 \end{array}$$

Formen Sie die Ungleichungen durch Subtraktion des rechts vom Vergleichszeichen stehenden Terms äquivalent um, so dass rechts vom Vergleichszeichen Null steht.

$3 \geq 5x - 2x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad$? $\geq 0,$

$x^2 + 1 < 7x^2 - 7x + 8 \quad \Longleftrightarrow \quad$? $< 0.$

Prüfen | Lösung anzeigen

Wenn der quadratische Term nach dieser Umformung kein Vielfaches von x^2 mehr enthält (z.B. bei $3x^2 + 5x < 4 + 3x^2 \Longleftrightarrow 5x - 4 < 0$), dann liegt der Fall einer linearen Ungleichung vor, der bereits im vorigen Abschnitt behandelt wurde. Hier werden jetzt nur noch quadratische Terme $ax^2 + \ldots$ mit $a \neq 0$ behandelt. Oft ist es zweckmäßig, diese mit Hilfe der Division durch a in äquivalente Ungleichungen in „Normalform" umzuwandeln. Wenn $a > 0$ ist, bleibt das Vergleichszeichen unverändert, bei $a < 0$ wird es umgekehrt.

$$\begin{array}{rcl} 2x^2 + 3x - 6 > 0 & \Leftrightarrow & x^2 + \frac{3}{2}x - 3 > 0, \\ \frac{x^2}{3} - x \leq 0 & \Leftrightarrow & x^2 - 3x \leq 0, \\ -2x^2 + 3x - 6 \geq 0 & \Leftrightarrow & x^2 - \frac{3}{2}x + 3 \leq 0, \\ -\frac{x^2}{2} + 4 < 0 & \Leftrightarrow & x^2 - 8 > 0. \end{array}$$

Die nachfolgenden **Visualisierungen** zeigen links einige Standardfälle. Rechts kann ein quadratischer Term frei eingegeben werden. Sie können zur Veranschaulichung der Ungleichungen in diesem Abschnitt benutzt werden.

Standardfälle

Die Normalform eines quadratischen Terms entspricht der blauen Kurve (nach oben offene Parabel). Der grüne quadratische Term ist immer das Negative des blauen.

Wenn die Zahl im editierbaren Eingabefeld unter der Grafik Null ist, dann ist der blaue Term für alle x positiv (blaue Kurve oberhalb der horizontalen x-Achse) und der grüne negativ (unterhalb der x-Achse).

Wenn man im Eingabefeld die Zahl 2 eingibt, dann ist der blaue Term $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ für genau einen Wert von x, für $x = -1$, gleich Null und für alle anderen Werte von x positiv. Der grüne Term ist für $x = -1$ ebenfalls Null und sonst negativ.

Wenn man im Eingabefeld z.B. 4 eingibt, dann ist der blaue Term für zwei Werte von x gleich Null. Zwischen diesen Stellen ist er negativ und weiter außen ist er positiv. Für den grünen Term ist es umgekehrt.

[online-only]

freie Eingabe quadratischer Terme

Hier können Sie einen beliebigen quadratischen Term eingeben. Vergewissern Sie sich, dass die Kurve, eine Parabel, immer „nach oben offen" ist, wenn der Koeffizient vor x^2 positiv ist, und „nach unten offen" ist, wenn der Koeffizient vor x^2 negativ ist.

Insbesondere erkennt man an diesen Beispielen, dass ein quadratischer Term nur dann sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann, wenn er an zwei verschiedenen Stellen Null ist.

Die Konstante Null, die rechte Seite der vereinfachten Ungleichung, (x-Achse) ist rot markiert.

(Wenn der Koeffizient vor x^2 gleich Null ist, erhält man einen linearen Term, der durch eine Gerade dargestellt wird, dieser Fall wurde im vorigen Abschnitt behandelt).

[online-only]

Um die Lösungsmengen von quadratischen Ungleichungen zu bestimmen, genügt es also, alle $x \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, für die ein quadratischer Term positiv, gleich Null oder negativ ist.

Dass ein quadratischer Term gleich Null ist, also $ax^2 + bx + c = 0$ bzw. $x^2 + px + q = 0$, wird als „*quadratische Gleichung*" bezeichnet. Ihre Lösungen sind „*Nullstellen des quadratischen Terms*" $ax^2 + bx + c$ bzw. $x^2 + px + q$. Das Lösen quadratischer Gleichungen wurde im vorigen Kapitel in Abschnitt I.2 behandelt. Quadratische Gleichungen können keine, genau eine oder zwei reelle Lösungen haben.

Folgende Fälle treten in der Visualisierung der Standardfälle auf, zunächst für positive Koeffizienten von x^2 (blaue, nach oben offene Parabel):
1. Der quadratische Term ist für alle x positiv, wenn er keine Nullstelle hat (die quadratische Gleichung keine Lösung hat).
2. Wenn die quadratische Gleichung genau eine Lösung hat, dann ist der quadratische Term für alle x größer gleich Null, dabei ist er für einen Wert von x gleich Null und sonst positiv.
3. Wenn die quadratische Gleichung zwei Lösungen $x_1 < x_2$ hat, dann ist der quadratische Term zwischen x_1 und x_2 negativ und außerhalb des Intervalls $[x_1; x_2]$ positiv.
Wenn der Koeffizient von x^2 negativ ist (grüne, nach unten offene Parabel), dann sind alle Vorzeichen umgekehrt.
Man kann zeigen, dass es keine weiteren Fälle bei quadratischen Termen (mit $a \neq 0$) gibt.

In den folgenden Beispielen werden alle diese Fälle erläutert. Der erste Schritt zur Lösung ist immer, zu bestimmen, wie viele Nullstellen der quadratische Term hat, d.h. wie viele Lösungen die quadratische Gleichung hat.

Quadratische Terme ohne Nullstellen
Dieser Fall liegt vor, wenn die quadratische Gleichung $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ bzw. $x^2 + px + q = 0$ keine (reelle) Lösung hat. Die Lösungsmengen der zugehörigen quadratischen Ungleichungen sind dann entweder die Menge aller reellen Zahlen oder die leere Menge.

Beispiel 1

$x^2 > -4x - 5$

Zuerst wird die rechte Seite der Ungleichung subtrahiert, so dass die äquivalente Ungleichung

$$x^2 + 4x + 5 > 0$$

einen quadratischen Term mit Null vergleicht. Die *quadratische Gleichung* $x^2 + 4x + 5 = 0$ hat keine (reelle) Lösung, wie z.B. die p-q-Formel zeigt. Die Diskriminante $D = (p/2)^2 - q = (2)^2 - 5 < 0$ ist negativ.

Wenn Sie den quadratischen Term oben in die Visualisierung eingeben, sehen Sie, dass der Term für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv ist. Die Parabel ist „nach oben offen", denn der Koeffizient von x^2, die Zahl 1, ist positiv. Die Lösungsmenge der Ungleichung ist

$$\mathbb{L} = \mathbb{R}\,.$$

Eine Möglichkeit, durch eine Rechnung einfach zu erkennen, dass für alle x die Ungleichung $x^2 + 4x + 5 > 0$ erfüllt ist, ist die quadratische Ergänzung .

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= \left(x + \tfrac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 \\ &= x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 5 - 2^2 = (x+2)^2 + 1. \end{aligned}$$

Da ein Quadrat immer größer gleich Null ist, ist dieser Term immer positiv.

Beispiel 2

(a) $x^2 \geq -4x-5,$ (b) $x^2 < -4x-5,$ (c) $x^2 \leq -4x-5.$

In Beispiel 1 wurde gezeigt, dass alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $x^2 > -4x-5$ erfüllen, dann gilt auch (a) $x^2 \geq -4x-5$ für alle x, die Lösungsmenge ist $\mathbb{L}_a = \mathbb{R}$.

Damit gilt auch, dass die umgekehrten Ungleichungen (b) $x^2 < -4x-5$ und (c) $x^2 \leq -4x-5$ für kein $x \in \mathbb{R}$ erfüllt sind, in diesen beiden Fällen ist die Lösungsmenge leer: $\mathbb{L}_b = \mathbb{L}_c = \emptyset$.

Beispiel 3

(a) $6x-14 > 2x^2$ und (b) $6x-14 < 2x^2$

(a) $6x-14 > 2x^2 \iff -2x^2+6x-14 > 0.$
Ausklammern des Koeffizienten -2 von x^2 und quadratische Ergänzung ergibt

$$\begin{aligned}-2x^2+6x-14 = -2(x^2-3x+7) &= -2\left(\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 + 7\right)\\ &= -2\left(\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2 + \tfrac{19}{4}\right)\ .\end{aligned}$$

Dieser Term ist für alle x negativ, die Lösungsmenge ist leer: $\mathbb{L}_a = \emptyset$.

Statt -2 auszuklammern, kann man die Ungleichung auch durch -2 teilen und erhält $-2x^2+6x-14 > 0 \iff x^2-3x+7 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} < 0$ und natürlich dieselbe leere Lösungsmenge.

Es folgt daraus, dass die umgekehrte Ungleichung (b) für alle x erfüllt ist, $\mathbb{L}_b = \mathbb{R}$.

Quadratische Terme mit genau einer Nullstelle

Dieser Fall liegt vor, wenn die quadratische Gleichung $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ bzw. $x^2 + px + q = 0$ genau eine Lösung hat. Die Beispiele illustrieren die Lösungsmengen der zugehörigen Ungleichungen.

Beispiel 1

$x^2 > 4x - 4$

Zuerst wird die rechte Seite der Ungleichung subtrahiert, so dass die äquivalente Ungleichung

$$x^2 - 4x + 4 > 0$$

einen quadratischen Term mit Null vergleicht. Die *quadratische Gleichung* $x^2 - 4x + 4 = 0$ hat genau eine Lösung $x = 2$, wie z.B. die p-q-Formel zeigt. Die Diskriminante $D = (p/2)^2 - q = (-2)^2 - 4 = 0$ ist gleich Null. Da der Koeffizient 1 von x^2 positiv ist, gilt für alle x: $x^2 - 4x + 4 \geq 0$. Die Lösungsmenge der gegebenen Ungleichung ist deshalb

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\} = \mathbb{R} \setminus \{2\} = (-\infty; 2) \cup (2; \infty).$$

Mit der zweiten binomischen Formel $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ erhält man dasselbe Ergebnis.

Beispiel 2

(a) $x^2 \geq 4x - 4\,,$ (b) $x^2 \leq 4x - 4\,,$ (c) $x^2 < 4x - 4\,.$

Wie in Beispiel 1 gezeigt wurde, gilt die Ungleichung (a) für alle x, also $\mathbb{L}_a = \mathbb{R}$.

Die Ungleichung (b) ist nur für $x = 2$ erfüllt, $\mathbb{L}_b = \{2\} = [2; 2]$.

Die Ungleichung (c) ist für kein x erfüllt, $\mathbb{L}_c = \emptyset$.

Beispiel 3

(a) $-2x^2 < 4x + 2\,,$ (b) $-2x^2 \geq 4x + 2\,.$

(a): $-2x^2 < 4x + 2 \Longleftrightarrow -2x^2 - 4x - 2 < 0$. Mit $-2x^2 - 4x - 2 = -2(x+1)^2 \leq 0$ folgt, dass die Ungleichung (a) für alle $x \neq -1$ erfüllt ist und die entgegengesetzte Ungleichung (b) nur für $x = -1$. Also gilt

$$\mathbb{L}_a = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)\,, \quad \mathbb{L}_b = \{-1\} = [-1; -1].$$

Quadratische Terme mit zwei Nullstellen

Dieser Fall liegt vor, wenn die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ bzw. $x^2 + px + q = 0$ zwei (reelle) Lösungen hat. Die Lösungsmenge ist entweder ein offenes oder abgeschlossenes Intervall oder das Komplement davon.

Beispiel 1

$x^2 > 2x$

Zuerst wird die rechte Seite der Ungleichung subtrahiert, so dass die äquivalente Ungleichung

$$x^2 - 2x > 0$$

einen quadratischen Term mit Null vergleicht. Die *quadratische Gleichung* $x^2 - 2x = 0$ hat zwei Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$. Die Diskriminante $D = (p/2)^2 - q = (-1)^2 - 0 = 1$ ist positiv.

Da der Koeffizient 1 von x^2 positiv ist, gilt zwischen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$: $x^2 - 2x < 0$ und außerhalb des Intervalls $[x_1; x_2]$: $x^2 - 2x > 0$. Die Lösungsmenge ist also

$$\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus [0;2] = (-\infty;0) \cup (2;\infty).$$

Dasselbe Ergebnis erhält man durch Faktorisierung: $x^2 - 2x = x(x-2)$. Das Produkt ist genau dann positiv, wenn beide Faktoren positiv oder beide negativ sind, also für $x > 2$ sowie für $x < 0$.

Beispiel 2

(a) $x^2 \geq 2x$, (b) $x^2 < 2x$, (c) $x^2 \leq 2x$.

Wie in Beispiel 1 gezeigt wurde, gilt die Ungleichung (a) $x^2 \geq 2x \iff x^2 - 2x \geq 0$ „weiter außen" als die Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ und außerdem an den Stellen x_1 und x_2. Also ist die Lösungsmenge $\mathbb{L}_a = (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$.

Die Ungleichung (b) $x^2 < 2x \iff x^2 - 2x < 0$ gilt zwischen den Nullstellen, also $\mathbb{L}_b = (0;2)$.

Die Ungleichung (c) $x^2 \leq 2x \iff x^2 - 2x \leq 0$ gilt zusätzlich an den Nullstellen, also $\mathbb{L}_c = [0;2]$.

Beispiel 3

$\frac{x^2}{2} + 3x + 2 \leq 0$

Durch Multiplikation mit 2 wird die Ungleichung in die äquivalente Ungleichung $x^2 + 6x + 4 \leq 0$ in Normalform überführt. Mit der p-q-Formel werden die Nullstellen berechnet.

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-4}\,, \qquad x_1 = -3 - \sqrt{5}, \quad x_2 = -3 + \sqrt{5}\,.$$

Der quadratische Term ist zwischen den Nullstellen negativ und an den Nullstellen gleich Null. Die Lösungsmenge der Ungleichung ist

$$\mathbb{L} = [-3 - \sqrt{5}\,;\, -3 + \sqrt{5}\,]\,.$$

Beispiel 4

$12x < 4x^2 + 5$

$12x < 4x^2 + 5 \Longleftrightarrow -4x^2 + 12x - 5 < 0$. Division durch -4 ergibt die äquivalente Ungleichung $x^2 - 3x + \frac{5}{4} > 0$ in Normalform (mit Umkehrung des Vergleichszeichens!). Die Nullstellen von $x^2 - 3x + \frac{5}{4}$ sind $x_1 = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{5}{4}} = \frac{1}{2}$ und $x_2 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$. Der quadratische Term ist für alle x „weiter außen" als die Nullstellen positiv. Die Lösungsmenge der Ungleichung ist

$$\mathbb{L} = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; \infty\right)\,.$$

Beispiel 5

$(x+2)\cdot(5-x)\geq 0$

Wenn der quadratische Term in faktorisierter Form vorliegt, kann man ohne Rechnung die Nullstellen ablesen, hier $x_1 = -2$ und $x_2 = 5$. Das Produkt ist Null, wenn ein Faktor Null ist, also für $x = -2$ und für $x = 5$.

Das Produkt ist positiv, wenn beide Faktoren positiv oder beide negativ sind.

Der erste Faktor $(x+2)$ ist positiv, wenn $x > -2$ ist. Der zweite Faktor $(5-x)$ ist positiv, wenn $x < 5$ ist. Damit ist das Produkt für $x \in (-2;5)$ positiv.
Der erste Faktor $(x+2)$ ist negativ, wenn $x < -2$ ist, der zweite Faktor $(5-x)$ ist negativ, wenn $x > 5$ ist. Es gibt kein x, das diese beiden Bedingungen erfüllt.

Die Lösungsmenge dieser Ungleichung ist also

$$\mathbb{L} = [-2;5]\,.$$

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Formen Sie die Ungleichungen äquivalent um in die „Normalform" $x^2 + (px + q) \leq 0$ oder $x^2 + (px + q) > 0$ oder $\ldots$ mit Zahlen p und q sowie einem Vergleichszeichen ($<$, $>$, $\leq$ oder $\geq$) vor der Null (wenn das möglich ist).

a) $3x^2 + 1 \geq 5x - 8$

b) $2x^2 + 4x + 15 < x + 2\,(7 + x^2)$

c) $x^2 - 3x + 4 \leq 3x^2 - 5(x-1) + 3$

d) $\frac{x^2}{2} - x - 2 < (x-1)^2$

Antwort

a) $x^2 - \frac{5}{3}x + 3 \geq 0$

b) nicht möglich

c) $x^2 - x + 2 \geq 0$

d) $x^2 - 2x + 6 > 0$

Lösung a

Durch Subtraktion der Terme auf der rechten Seite werden „alle Terme auf die linke Seite gebracht" und zusammengefasst. Dann wird durch den Koeffizienten von x^2 dividiert.

$$\begin{array}{rrcll} & 3x^2 + 1 & \geq & 5x - 8 & \mid\ -5x + 8 \\ \Leftrightarrow & 3x^2 - 5x + 9 & \geq & 0 & \mid\ : 3 \\ \Leftrightarrow & x^2 - \frac{5}{3}x + 3 & \geq & 0. & \end{array}$$

Das Ergbnis ist in der gewünschten Normalform.

Lösung b

Durch Subtraktion der Terme auf der rechten Seite werden „alle Terme auf die linke Seite gebracht" und zusammengefasst.

$$\begin{array}{rrcll} & 2x^2 + 4x + 15 & < & x + 2\,(7 + x^2) & \mid\ -x - 14 - 2x^2 \\ \Leftrightarrow & 3x + 1 & < & 0. & \end{array}$$

Die Ungleichung ist eine lineare Ungleichung, sie kann nicht in die gewünschte Normalform äquivalent umgeformt werden.

Lösung c

Durch Subtraktion der Terme auf der rechten Seite werden „alle Terme auf die linke Seite gebracht" und zusammengefasst. Dann wird durch den Koeffizienten von x^2 dividiert.

$$\begin{array}{rrcll} & x^2-3x+4 & \leq & 3x^2-5(x-1)+3 & \mid \; -3x^2+5x-8 \\ \Leftrightarrow & -2x^2+2x-4 & \leq & 0 & \mid \; :(-2) \\ \Leftrightarrow & x^2-x+2 & \geq & 0. & \end{array}$$

Beachten Sie, dass bei Division durch eine negative Zahl das Vergleichszeichen umgekehrt wird. Das Ergbnis ist in der gewünschten Normalform.

Lösung d

Durch Subtraktion der Terme auf der rechten Seite werden „alle Terme auf die linke Seite gebracht" und zusammengefasst. Dann wird durch den Koeffizienten von x^2 dividiert.

$$\begin{array}{rrcll} & \frac{x^2}{2}-x-2 & < & (x-1)^2 & \mid \; \text{ausmultiplizieren} \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2}{2}-x-2 & < & x^2-2x+1 & \mid \; -x^2+2x-1 \\ \Leftrightarrow & -\frac{x^2}{2}+x-3 & < & 0 & \mid \; \cdot(-2) \\ \Leftrightarrow & x^2-2x+6 & > & 0. & \end{array}$$

Beachten Sie, dass bei Multiplikation mit einer negativen Zahl das Vergleichszeichen umgekehrt wird. Das Ergbnis ist in der gewünschten Normalform.

ÜBUNG 2

Geben Sie die Lösungsmengen $\mathbb{L}$ für folgende quadratische Ungleichungen an.

a) $x^2 - 2x + 3 \geq 0$

b) $-2x^2 - 8 < 8x$

c) $3x^2 + 9 \leq 12x - x^2$

d) $x^2 + 8x \leq 2(-x^2 - 3)$

Antwort

a) $\mathbb{L} = \mathbb{R} = (-\infty; \infty)$

b) $\mathbb{L} = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$

c) $\mathbb{L} = \left\{\frac{3}{2}\right\} = \left[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$

d) $\mathbb{L} = \emptyset = \{\}$

Lösung a

Mit der quadratischen Ergänzung kann der quadratische Term auf der linken Seite der Ungleichung umgeschrieben werden.

$$x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 1 + (3 - 1) = \underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0} + 2 \geq 2.$$

Also ist erst recht die Ungleichung $x^2 - 2x + 3 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Oder man benutzt die p-q-Formel: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1^2 - 3}$. Sie zeigt, dass es keine reellen Nullstellen gibt. Da der Koeffizient von x^2 (die Eins) positiv ist, folgt, dass $x^2 - 2x + 3 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \mathbb{R} = (-\infty; \infty)$.

Lösung b

Es ist zweckmäßig, die Ungleichung zunächst in „Normalform” zu überführen.

$$\begin{array}{lrcll} & -2x^2-8 & < & 8x & \mid\ +2x^2+8 \\ \Leftrightarrow & 0 & < & 2x^2+8x+8 & \mid\ :2 \\ \Leftrightarrow & 0 & < & x^2+4x+4 & \mid\ \text{Seiten Vertauschen} \\ \Leftrightarrow & x^2+4x+4 & > & 0 & \mid\ \text{1. binomische Formel} \\ \Leftrightarrow & (x+2)^2 & > & 0. & \end{array}$$

Wenn man die mögliche Umformung mit der binomischen Formel $x^2+4x+4=(x+2)^2$ nicht erkennt, zeigt die p-q-Formel, $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-4}=-2$, dass $x_1=-2$ die einzige Nullstelle von x^2+4x+4 ist. Da der Koeffizient von x^2 (die Eins) positiv ist, folgt, dass $x^2+4x+4>0$ für alle $x\neq-2$ gilt.

Diese Ungleichung ist genau für alle $x\neq-2$ erfüllt. Die Lösungsmenge ist

$$\mathbb{L}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq-2\}=(-\infty;-2)\cup(-2;\infty).$$

Lösung c

Es ist zweckmäßig, die Ungleichung zunächst in „Normalform” zu überführen.

$$\begin{array}{llcll} & 3x^2+9 & \leq & 12x-x^2 & \mid\ +x^2-12x \\ \Leftrightarrow & 4x^2-12x+9 & \leq & 0 & \mid\ :4 \\ \Leftrightarrow & x^2-3x+\frac{9}{4} & \leq & 0 & \mid\ \text{2. binomische Formel} \\ \Leftrightarrow & \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 & \leq & 0. & \end{array}$$

Diese Ungleichung ist genau an der einzigen Nullstelle von $x^2-3x+\frac{9}{4}$, nämlich $x=\frac{3}{2}$ erfüllt.

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L}=\left\{\frac{3}{2}\right\}=\left[\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$.

Lösung d

Es ist zweckmäßig, die Ungleichung zunächst in „Normalform” zu überführen.

$$\begin{array}{rlll} & x^2+8x & \leq & 2(-x^2-3) & \mid \; +2x^2+6 \\ \Leftrightarrow & 3x^2+8x+6 & \leq & 0 & \mid \; :3 \\ \Leftrightarrow & x^2+\frac{8}{3}x+2 & \leq & 0 & \mid \; \text{quadratische Ergänzung} \\ \Leftrightarrow & \left(x+\frac{4}{3}\right)^2+\frac{2}{9} & \leq & 0. & \end{array}$$

Der Term auf der linken Seite der Ungleichung ist für alle x positiv, es gibt keine Lösungen der Ungleichung.

Die Lösungsmenge ist die leere Menge $\mathbb{L}=\emptyset=\{\}$.

ÜBUNG 3

Geben Sie die Lösungsmengen $\mathbb{L}$ für folgende quadratische Ungleichungen an.

a) $x^2 - 4 < 0$

b) $2x^2 \geq 2x + 12$

c) $2x^2 - 6x + 4 \geq 10\left(x^2 + x + 1\right)$

d) $6\left(x^2 + 1\right) > 15x$

Antwort

a) $\mathbb{L} = (-2; 2)$

b) $\mathbb{L} = (-\infty; -2] \cup [3; \infty)$

c) $\mathbb{L} = \left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]$

d) $\mathbb{L} = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; \infty)$

Lösung a

Der quadratische Term $x^2 - 4$ hat die beiden Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$. Da der Koeffizient von x^2 (die Eins) positiv ist, folgt, dass der Term zwischen den Nullstellen negativ und außen positiv ist.

Die Ungleichung ist also für alle x zwischen -2 und 2 erfüllt. Die Lösungsmenge ist das Intervall $\mathbb{L} = (-2; 2)$.

Lösung b

Es ist zweckmäßig, die Ungleichung zunächst in „Normalform" zu überführen.

$$\begin{array}{rlll} & 2x^2 & \geq 2x + 12 & \mid\; -2x - 12 \\ \Leftrightarrow & 2x^2 - 2x - 12 & \geq 0 & \mid\; : 2 \\ \Leftrightarrow & x^2 - x - 6 & \geq 0. & \end{array}$$

Die Bestimmung der Nullstellen des quadratischen Terms $x^2 - x - 6$ (z.B. mit der p-q-Formel) ergibt $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$. Der Term ist zwischen den Nullstellen negativ und außen positiv.

Die Ungleichung ist also für $x \leq -2$ und für $x \geq 3$ erfüllt. Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = (-\infty; -2] \cup [3; \infty)$.

Lösung c

Es ist zweckmäßig, die Ungleichung zunächst in „Normalform” zu überführen.

$$\begin{array}{llll} & 2x^2-6x+4 & \geq & 10\,(x^2+x+1) \quad | \quad -10x^2-10x-10 \\ \Leftrightarrow & -8x^2-16x-6 & \geq & 0 \quad | \quad :(-8) \\ \Leftrightarrow & x^2+2x+\frac{3}{4} & \leq & 0. \end{array}$$

Der quadratische Term $x^2+2x+\frac{3}{4}$ hat zwei Nullstellen (die man z.B. mit der p-q-Formel bestimmen kann) $x_1 = -\frac{3}{2}$ und $x_2 = -\frac{1}{2}$. Zwischen den Nullstellen ist er negativ.

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]$.

Lösung d

Es ist zweckmäßig, die Ungleichung zunächst in „Normalform” zu überführen.

$$\begin{array}{llll} & 6\,(x^2+1) & > & 15x \quad | \quad -15x \\ \Leftrightarrow & 6x^2-15x+6 & > & 0 \quad | \quad :6 \\ \Leftrightarrow & x^2-\frac{5}{2}x+1 & > & 0. \end{array}$$

Mit der p-q-Formel können die Nullstellen des Terms $x^2-\frac{5}{2}x+1$ bestimmt werden: $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = 2$. Der Term ist positiv links von $x_1 = \frac{1}{2}$ auf dem Zahlenstrahl sowie rechts von $x_2 = 2$.

Die Vereinigung der beiden Teile der Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; \infty)$.

ÜBUNG 4

Der quadratische Term $2x^2 - 8x + 6$ ist als blaue Parabel grafisch dargestellt.
Bestimmen Sie die Lösungsmengen $\mathbb{L}$ der folgenden Ungleichungen mit Hilfe der Grafiken.

[online-only]

a) $2x^2 - 8x + 6 < 0$

b) $2x^2 - 8x + 6 > -2$

c) $2x^2 - 8x + 6 \geq 0$

d) $2x^2 - 8x + 6 < -2$

Antwort

a) $\mathbb{L} = (1; 3)$

b) $\mathbb{L} = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$

c) $\mathbb{L} = (-\infty; 1] \cup [3; \infty)$

d) $\mathbb{L} = \emptyset = \{\}$

Lösung a

Sie können die Zahl Null, mit der der quadratische Term verglichen wird, in der Visualisierung eingeben.

Grafische Bestimmung der Lösungsmenge: Für alle x, bei denen die blaue Kurve unterhalb der roten Geraden (Konstante Null) verläuft, ist die Ungleichung erfüllt.

Das sind alle x zwischen 1 und 3 (ohne die Randpunkte).

Deshalb ist die Lösungsmenge das offene Intervall $\mathbb{L} = (1; 3)$.

Lösung b

Sie können die Zahl -2, mit der der quadratische Term verglichen wird, in der Visualisierung eingeben.

Wenn die blaue Kurve oberhalb der roten Geraden (Konstante -2) verläuft, ist die Ungleichung erfüllt.

Das ist für alle x richtig mit der einzigen Ausnahme: Für $x = 2$ haben die blaue und rote Kurve dieselbe Höhe.

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\} = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$.

Lösung c

Sie können die Zahl Null, mit der der quadratische Term verglichen wird, in der Visualisierung eingeben.

Die Ungleichung ist für alle x erfüllt, bei denen die blaue Kurve oberhalb der roten Geraden (Konstante Null) verläuft oder mit ihr auf gleicher Höhe ist.

Das ist für alle x rechts von $x = 3$ sowie links von $x = 1$ richtig und auch an den beiden Randpunkten $x = 1$ und $x = 3$.

Die Lösungsmenge ist die Vereinigung von zwei getrennten Intervallen $\mathbb{L} = (-\infty; 1] \cup [3; \infty)$.

Lösung d

Sie können die Zahl -2, mit der der quadratische Term verglichen wird, in der Visualisierung eingeben.

Für alle x verläuft die blaue Kurve oberhalb der roten Geraden (Konstante -2) oder auf gleicher Höhe, es gibt kein x, für das die blaue Kurve unterhalb der roten verläuft.

Die Lösungsmenge ist die leere Menge, die auf zwei Weisen geschrieben werden kann, $\mathbb{L} = \emptyset = \{\}$
.

3. UNGLEICHUNGEN MIT BETRÄGEN SOWIE MIT DER VARIABLEN IM NENNER EINES BRUCHS

Inhalt

Wenn Sie denken, dass Sie den Inhalt des Abschnitts schon beherrschen, können Sie zu den zugehörigen Übungs-, Trainings- und Quizaufgaben gehen.

Lernziele

- Sie können Ungleichungen mit Beträgen grafisch und rechnerisch lösen.
- Sie können Ungleichungen lösen, bei denen die Variable im Nenner eines Bruchs steht.

3.1 Beträge in Ungleichungen

Der Betrag $|a|$ einer reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ wurde in Abschnitt I.6.2 eingeführt.

$$|a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0, \\ -a & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

Steht ein Term zwischen den Betragsstrichen, so ist z.B.

$$|x-b| = \sqrt{(x-b)^2} = \begin{cases} x-b & \text{für } x \geq b, \\ b-x & \text{für } x < b, \end{cases}$$

der Abstand auf der Zahlengeraden zwischen x und b.

Geben Sie einen Term an, der den Abstand zwischen x und der Zahl 9 beschreibt (der Betrag kann durch abs $(\ldots)$ oder $|\ldots|$ eingegeben werden.): ? .

Der Abstand zwischen x und der Zahl -2 ist ? .

Prüfen Lösung anzeigen

Die nachfolgende Visualisierung zeigt den Betrag eines frei einzugebenden Terms (blau) sowie einen weiteren Term, z.B. eine Konstante (rot) zum Vergleich. Sie kann zur Veranschaulichung der Ungleichungen in diesem Abschnitt benutzt werden, insbesondere für die graphischen Lösungen in Beispiel 3.1. (Die grafische

Darstellung des Betrags eines linearen Terms wurde in Abschnitt III.1 eingeführt.)

Visualisierung

[online-only]

In diesem Abschnitt werden Beträge nur von linearen Termen behandelt, also Terme der Form $|cx+b|$ mit Konstanten $b, c \in \mathbb{R}$.

Für die **grafische Lösung** von einfachen Ungleichungen mit Beträgen, z.B. $|x-1| < 2$, skizziert man zweckmäßig in einem Koordinatensystem den Term auf der linken Seite der Ungleichung, im Beispiel $|x-1|$, in einer Farbe (z.B. blau) und den Term auf der rechten Seite, im Beispiel die Konstante 2, in einer anderen Farbe (z.B. rot), so wie oben in der Visualisierung gezeigt. Die Lösungsmenge der Ungleichung „blau $<$ rot", im Beispiel $|x-1| < 2$, ist die Menge der x-Werte, für die die blaue Kurve unterhalb der roten verläuft. Wie die Visualisierung zeigt, sind das alle $x \in (-1;3)$.

Die Ungleichung „blau $>$ rot", im Beispiel $|x-1| > 2$, ist für alle die x-Werte erfüllt, für die die blaue Kurve oberhalb der roten verläuft. Bei den Vergleichszeichen $\leq$ und $\geq$ gehören auch die x-Werte zur Lösungsmenge, an denen die blaue und rote Kurve zusammenfallen. Das sind die Lösungen der entsprechenden Betragsgleichungen aus Abschnitt II.5 .

Zugleich bedeutet $|x-b| < c$, dass der Abstand zwischen x und der Zahl b kleiner als c ist, und bei $|x-b| > c$ ist der Abstand größer als c. Je nach dem Vergleichszeichen und dem Wert von c kann die Lösungsmenge ein offenes (bei $<$) oder abgeschlossenes ($\leq$) Intervall oder die leere Menge sein. Bei den umgekehrten Vergleichszeichen ist die Lösungsmenge das Komplement des Intervalls oder der ganze Zahlenstrahl $\mathbb{R}$.

> Beispiel 1
>
> $|x| \leq 3$.
> Die Lösungsmenge sind alle $x \in \mathbb{R}$, deren Abstand vom Ursprung auf der Zahlengeraden kleiner gleich 3 ist. Das sind alle Zahlen von -3 bis 3. Da das Vergleichszeichen $\leq$ die Gleichheit einschließt, gehören die Randpunkte des Intervalls, $x=-3$ und $x=3$, wegen $|-3| = |3| = 3$ zur Lösungsmenge. Also gilt $\mathbb{L} = [-3;3]$.
>
> Wenn Sie in der **Visualisierung oben** auf der linken Seite (blau) den Term x eingeben und rechts (rot) die Zahl 3, so sehen Sie, dass in der Grafik die blaue Kurve für $|x|$ unterhalb der roten Geraden liegt, wenn $-3 < x < 3$. An den Randpunkten schneiden sich beide.

Beispiel 2

$|x-1| > 2$.
Die Lösungsmenge sind alle $x \in \mathbb{R}$, deren Abstand von der Zahl 1 auf der Zahlengeraden größer als 2 ist. Das sind alle Zahlen links von -1 und rechts von 3. Da das Vergleichszeichen $>$ die Gleichheit ausschließt, gehören die Randpunkte der Intervalle, $x=-1$ und $x=3$, wegen $|-1-1| = 2 = |3-1|$ nicht zur Lösungsmenge. Also gilt $\mathbb{L} = (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$.

Wenn Sie in der Visualisierung oben auf der linken Seite (blau) den Term $x-1$ eingeben und rechts (rot) die Zahl 2, so sehen Sie, dass in der Grafik die blaue Kurve für $|x-1|$ oberhalb der roten Geraden liegt, wenn $x < -1$ sowie wenn $x > 3$. An den Randpunkten schneiden sich beide.

Beispiel 3

$|x| \geq 1$.
Die Lösungsmenge sind alle $x \in \mathbb{R}$, deren Abstand vom Ursprung auf der Zahlengeraden größer gleich 1 ist. Das sind alle Zahlen links von -1 und rechts von 1. Da das Vergleichszeichen $\geq$ die Gleichheit einschließt, gehören die Randpunkte der Intervalle bei $x=-1$ und $x=1$, wegen $|-1| = 1 = |1|$ zur Lösungsmenge. Also gilt $\mathbb{L} = (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$.

Wenn Sie in der Visualisierung oben auf der linken Seite (blau) den Term x eingeben und rechts (rot) die Zahl 1, so sehen Sie, dass in der Grafik die blaue Kurve für $|x|$ oberhalb der roten Geraden liegt, wenn $x < -1$ sowie wenn $x > 1$. An den Randpunkten schneiden sich beide.

Beispiel 4

$|x+2| < 1$.
Die Lösungsmenge sind alle $x \in \mathbb{R}$, deren Abstand von der Zahl -2 auf der Zahlengeraden kleiner als 1 ist. Das sind alle Zahlen zwischen -3 und -1. Da das Vergleichszeichen $<$ die Gleichheit ausschließt, gehören die Randpunkte der Intervalle bei $x=-3$ und $x=-1$, wegen $|-3+2| = 1 = |-1+2|$ nicht zur Lösungsmenge. Also gilt $\mathbb{L} = (-3; -1)$.

Wenn Sie in der Visualisierung oben auf der linken Seite (blau) den Term $x+2$ eingeben und rechts (rot) die Zahl 1, so sehen Sie, dass in der Grafik die blaue Kurve für $|x+2|$ unterhalb der roten Geraden liegt, wenn $-3 < x < -1$. An den Randpunkten schneiden sich beide.

Beispiel 5

(a) $|x-4|<0$ und (b) $|x-4|>-2$.

(a) Da Abstände zwischen Zahlen auf dem Zahlenstrahl immer positiv oder Null sind, gibt es kein x, für das der Abstand von 4 negativ ist. Die Lösungsmenge ist leer, $\mathbb{L}=\emptyset$.

(b) Alle $x \in \mathbb{R}$ haben einen Abstand größer gleich Null von 4 und damit ist der Abstand größer als -2 . Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L}=\mathbb{R}$.

Für die **rechnerische Bestimmung der Lösungsmenge einer Ungleichung** mit Beträgen ist meist eine *Fallunterscheidung* erforderlich. (Von einer Fallunterscheidung bei der Lösung einer Aufgabe spricht man, wenn für verschiedene Fälle, z.B. verschiedene Vorzeichen eines Terms, unterschiedliche Lösungswege benutzt werden.) Wenn der Term zwischen den Betragsstrichen größer gleich Null ist, können die Betragsstriche durch Klammern ersetzt werden (oder weggelassen werden). Wenn der Term zwischen den Betragsstrichen negativ ist, muss zuvor das Vorzeichen des gesamten Terms umgekehrt werden:

$$|x+4| = \begin{cases} (x+4) = x+4 & \text{wenn } x+4 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq -4, \\ -(x+4) = -x-4 & \text{wenn } x+4 < 0 \;\Leftrightarrow\; x < -4. \end{cases}$$

$$2 \cdot |x-3| = \begin{cases} 2(x-3) = 2x-6 & \text{wenn } \; x-3 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq 3, \\ 2 \cdot (-(x-3)) = -2x+6 & \text{wenn } \; x-3 < 0 \;\Leftrightarrow\; x < 3. \end{cases}$$

Geben Sie jeweils einen Term *ohne Betrag* an, so dass für die angegebenen Werte der Variablen x die Gleichheit gilt:

Für $x \geq 2$ gilt $|x-2| =$? , für $x < 2$ gilt $|x-2| =$? .

Für $x \geq -3$ gilt $8\,|x+3| =$? , für $x < -3$ gilt $8\,|x+3| =$? .

Prüfen Lösung anzeigen

Beispiel 1

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung

$$|x-2| < 4$$

erfüllen. Es gibt die beiden Fälle $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ und $x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$ zu unterscheiden, denn

$$|x-2| = \begin{cases} (x-2) = x-2 & \text{wenn} \quad x \geq 2, \\ -(x-2) = -x+2 = 2-x & \text{wenn} \quad x < 2. \end{cases}$$

Im ersten Fall, für alle x mit $x \geq 2$, lautet die Ungleichung: $x-2 < 4 \Leftrightarrow x < 6$.
Alle x, die $x \geq 2$ **und** $x < 6$ erfüllen, das sind alle x im Intervall $[2;6)$, gehören zur Lösungsmenge der Ungleichung.

Im zweiten Fall, für alle x mit $x < 2$, lautet die Ungleichung: $2-x < 4 \Leftrightarrow -2 < x$.
Alle x, die $x < 2$ **und** $x > -2$ erfüllen, das sind alle x im Intervall $(-2;2)$, gehören zur Lösungsmenge der Ungleichung.

Die Lösungsmenge der Ungleichung ist die Vereinigung der beiden Teile der Lösungsmenge, das sind alle x, die $x > -2$ und $x < 6$ erfüllen, also

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 6\} = (-2;6)\,.$$

Beispiel 2

$|2x+5| \leq 7$.

$$|2x+5| = \begin{cases} 2x+5 & \text{wenn} \quad 2x+5 \geq 0, \\ -2x-5 & \text{wenn} \quad 2x+5 < 0. \end{cases}$$

Im ersten Fall mit $2x+5 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -5 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{2}$ lautet die Ungleichung $2x+5 \leq 7 \Leftrightarrow 2x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 1$. Der erste Teil der Lösungsmenge ist das Intervall $\left[-\frac{5}{2}; 1\right]$.

Im zweiten Fall mit $2x+5 < 0 \Leftrightarrow 2x < -5 \Leftrightarrow x < -\frac{5}{2}$ lautet die Ungleichung $-2x-5 \leq 7 \Leftrightarrow -12 \leq 2x \Leftrightarrow -6 \leq x$. Der zweite Teil der Lösungsmenge ist das Intervall $\left[-6; -\frac{5}{2}\right)$.

Die Lösungsmenge der Ungleichung ist die Vereinigung der beiden Teile der Lösungsmenge, das sind alle x, die $x \geq -6$ und $x \leq 1$ erfüllen, also

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x \leq 1\} = [-6; 1] .$$

Beispiel 3

$|12x-15| \leq -4$.

Da $|a| \geq 0$ für alle a, gilt auch $|12x-15| \geq 0$ für alle x. Es gibt kein x, das die Ungleichung erfüllt, die Lösungsmenge ist die leere Menge,

$$\mathbb{L} = \{\} = \emptyset .$$

Auch bei $|12x-15| < 0$ gilt $\mathbb{L} = \emptyset$ und $|12x-15| \leq 0$ ist nur erfüllt, wenn $12x-15 = 0$, also besteht dann die Lösungsmenge nur aus einem Punkt, $\mathbb{L} = \left\{\frac{5}{4}\right\} = \left[\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right]$. (Die Menge mit einem Punkt ist ein spezielles abgeschlossenes Intervall.) Die Ungleichung $|12x-15| \geq -4$ wird von allen x erfüllt, in diesem Fall ist

$$\mathbb{L} = \mathbb{R} .$$

In den folgenden Beispielen treten jeweils Paare von verschiedenen Ungleichungen auf, die „in dieselbe Richtung zeigen", z.B.: „ $x < 2$ und $x < -3$ " oder: „ $x \geq -4$ und $x > 3$ " etc. (Eine Ungleichung kommt von der Fallunterscheidung, die andere von der zu lösenden Ungleichung.) In allen solchen Fällen ist eine Ungleichung die stärker einschränkende, wenn sie erfüllt ist, gilt auch die andere. Wenn $x < -3$ gilt auch $x < 2$, wenn $x > 3$ gilt auch $x \geq -4$. Es genügt, die stärker einschränkende Ungleichung weiter zu berücksichtigen.

Geben Sie die stärker einschränkende Ungleichung an.

$x > -9$ und $x > -4$: $x >$ **?** .

Prüfen Lösung anzeigen

Beispiel 1

$|3x-7| \geq 1$.

$$|3x-7| = \begin{cases} 3x-7 & \text{wenn } 3x-7 \geq 0, \\ -3x+7 & \text{wenn } 3x-7 < 0. \end{cases}$$

Im ersten Fall mit $3x-7 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 7 \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{3}$ lautet die Ungleichung $3x-7 \geq 1 \Leftrightarrow 3x \geq 8 \Leftrightarrow x \geq \frac{8}{3}$. Da $\frac{8}{3} > \frac{7}{3}$, ist $x \geq \frac{8}{3}$ die stärker einschränkende Ungleichung. Alle x mit $x \geq \frac{8}{3}$ erfüllen die Ungleichung. Der erste Teil der Lösungsmenge ist das Intervall $\left[\frac{8}{3}; \infty\right)$.

Im zweiten Fall mit $3x-7 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{7}{3}$ lautet die Ungleichung $-3x+7 \geq 1 \Leftrightarrow 6 \geq 3x \Leftrightarrow 2 \geq x$. Die Ungleichung $x \leq 2$ ist stärker einschränkend als $x < \frac{7}{3}$. Deshalb ist der zweite Teil der Lösungsmenge das Intervall $(-\infty; 2]$.

Die Lösungsmenge der Ungleichung ist die Vereinigung der beiden Teile der Lösungsmenge, das sind alle x, die $x \geq \frac{8}{3}$ oder $x \leq 2$ erfüllen, also

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{8}{3} \text{ oder } x \leq 2 \right\} = (-\infty; 2] \cup \left[\frac{8}{3}; \infty\right) .$$

Beispiel 2

$|-4x-9| > 2$.

$$|-4x-9| = \begin{cases} -4x-9 & \text{wenn } -4x-9 \geq 0, \\ 4x+9 & \text{wenn } -4x-9 < 0. \end{cases}$$

Im ersten Fall mit $-4x-9 \geq 0 \Leftrightarrow -9 \geq 4x \Leftrightarrow -\frac{9}{4} \geq x$ lautet die Ungleichung $-4x-9 > 2 \Leftrightarrow -11 > 4x \Leftrightarrow -\frac{11}{4} > x$. Da $-\frac{11}{4} < -\frac{9}{4}$, erfüllen alle x mit $x < -\frac{11}{4}$ die Ungleichung. Der erste Teil der Lösungsmenge ist das Intervall $\left(-\infty; -\frac{11}{4}\right)$.

Im zweiten Fall mit $-4x-9 < 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{4} < x$ lautet die Ungleichung $4x+9 > 2 \Leftrightarrow 4x > -7 \Leftrightarrow x > -\frac{7}{4}$. Die Ungleichung $x > -\frac{7}{4}$ ist stärker einschränkend als $x > -\frac{9}{4}$. Deshalb ist der zweite Teil der Lösungsmenge das Intervall $\left(-\frac{7}{4}; \infty\right)$.

Die Lösungsmenge der Ungleichung ist die Vereinigung der beiden Teile der Lösungsmenge, das sind alle x, die $x > -\frac{7}{4}$ oder $x < -\frac{11}{4}$ erfüllen, also

$$\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{11}{4} \text{ oder } x > -\frac{7}{4}\right\} = \left(-\infty; -\frac{11}{4}\right) \cup \left(-\frac{7}{4}; \infty\right) .$$

Bemerkung: Da $|a| = |-a|$, also $|-4x-9| = |4x+9|$, hätte man auch die äquivalente Ungleichung $|4x+9| > 2$ behandeln können. Das Ergebnis ist natürlich auf beiden Wegen dasselbe.

Wie schon in Abschnitt III.1 beschrieben wurde (und ausprobiert werden kann), ist die grafische Darstellung von $|ax+b|$ der „obere, V-förmige Teil" der beiden Geraden, die die linearen Terme $ax+b$ und $-(ax+b)$ darstellen. An der Grafik kann man leicht erkennen, dass die Betragsungleichung $|ax+b| < c$ genau dann erfüllt ist, wenn die linearen Ungleichungen $ax+b < c$ und $-(ax+b) < c$ beide erfüllt sind. Die Lösungsmenge der Betragsungleichung ist der Durchschnitt der Lösungsmengen der beiden linearen Ungleichungen:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |ax+b| < c\} = \{x \in \mathbb{R} \mid ax+b < c\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid -(ax+b) < c\} .$$

Dasselbe gilt, wenn das Vergleichszeichen $<$ überall durch $\leq$ ersetzt wird. Im Gegensatz dazu gehört x bereits zur Lösungsmenge der umgekehrten Betragsungleichung $|ax+b| > c$, wenn eine der beiden linearen Ungleichungen $ax+b > c$ oder $-(ax+b) > c$ erfüllt ist. Die Lösungsmenge der Betragsungleichung ist nun die Vereinigung der Lösungsmengen der beiden linearen Ungleichungen (analog, wenn $>$ durch $\geq$ ersetzt wird):

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |ax+b| > c\} = \{x \in \mathbb{R} \mid ax+b > c\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -(ax+b) > c\} .$$

Auf diesem Wege erhält man natürlich dieselben Lösungsmengen wie mit Hilfe der Fallunterscheidung. Davon wird in Kapitel IX in Abschnitt IX.2 Koordinatenbereiche Gebrauch gemacht. Die folgenden Grafiken veranschaulichen das.

Visualisierung |x-b|≤c

[online-only]

Visualisierung |x-b|≥c

[online-only]

Anzeigen

3.2 Ungleichungen mit der Variablen im Nenner eines Bruchs

In diesem Abschnitt werden Ungleichungen behandelt mit Brüchen, bei denen ein Term mit der Variablen im Nenner steht, z.B. $\frac{5}{x^2+2} < 1$, $\frac{1}{x-2} < 3$ oder $\frac{2}{\sqrt{x}-1} \geq 1$. Werte der Variablen x, an denen Terme nicht definiert sind, müssen vorab ausgeschlossen werden. Im ersten Beispiel sind alle $x \in \mathbb{R}$ zu untersuchen, im zweiten ist $x = 2$ auszuschließen (keine Division durch Null), im dritten Beispiel sind negative x auszuschließen ($\sqrt{x}$ ist nur für $x \geq 0$ definiert) und auch $x = 1$ ist auszuschließen (keine Division durch Null).

Um für die verbleibenden Werte von x die Lösungsmenge zu bestimmen, ist es meist zielführend, die Ungleichung mit dem Nenner zu multiplizieren. Wenn der Nenner für alle x dasselbe Vorzeichen hat, erhalten wir dabei eine äquivalente Ungleichung. Wenn der Nenner aber verschiedene Vorzeichen hat, dann muss eine Fallunterscheidung gemacht werden, denn bei negativem Nenner kehrt sich bei der Multiplikation das Vergleichszeichen um, bei positivem Nenner bleibt es unverändert. In verschiedenen Bereichen der x-Werten erhalten wir unterschiedliche äquivalente Ungleichungen. Die folgenden Beispiele erläutern das Vorgehen.

Kein Vorzeichenwechsel im Nenner.

Beispiel 1

$1 \leq \frac{2}{x^2+1}$.

Der Nenner $x^2 + 1 \geq 1$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv. Multiplikation mit $x^2 + 1$ ergibt die äquivalenten Ungleichungen

$$x^2 + 1 \leq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 1 \leq 0 \,.$$

Die quadratische Gleichung $x^2 - 1 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$. Die Lösungsmenge ist

$$\mathbb{L} = [-1; 1] \,.$$

Beispiel 2

$\frac{3}{\sqrt{x}} < 1$.

Die Wurzel ist nur für $x > 0$ sowohl definiert als auch ungleich Null. Dann kann die Ungleichung mit $\sqrt{x} > 0$ multipliziert werden:

$$\frac{3}{\sqrt{x}} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 3 < \sqrt{x} \quad \Longleftrightarrow \quad 9 < x \,.$$

Bei der zweiten Äquivalenz wurde die Regel über Potenzierung in Ungleichungen benutzt: Für $a, b \geq 0$ gilt $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$. Die Lösungsmenge ist

$$\mathbb{L} = (9; \infty) \,.$$

Beispiel 3

$2 \leq \frac{14}{|2x+5|}$.

Die Nullstelle des Nenners bei $x = -\frac{5}{2}$ ist auszuschließen, für alle anderen x ist der Nenner positiv. Daher gilt für $x \neq -\frac{5}{2}$

$$2 \leq \frac{14}{|2x+5|} \quad \Longleftrightarrow \quad 2\,|2x+5| \leq 14 \quad \Longleftrightarrow \quad |2x+5| \leq 7\,.$$

Bei der zweiten Äquivalenz wurde die Ungleichung durch $2 > 0$ dividiert. Die Lösungsmenge der Ungleichung $|2x+5| \leq 7$ wurde oben in 1 Beispiel 2 zu $[-6;1]$ bestimmt. Mit der Einschränkung $x \neq -\frac{5}{2}$ erhält man die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left[-6; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{2}; 1\right]\,.$$

Multiplikation (Division) mit Termen, die verschiedene Vorzeichen haben können.

Beispiel 1

$\frac{1}{1-x} > 3$.

Die Nullstelle des Nenners $x = 1$ ist auszuschließen. Für $x < 1$ ist der Nenner positiv, für $x > 1$ negativ. Deshalb gelten folgende äquivalente Umformungen

$$\begin{array}{lllll} \text{für } x < 1: & \frac{1}{1-x} > 3 & \Leftrightarrow \quad 1 > 3(1-x) & \Leftrightarrow \quad x > \frac{2}{3}, \\ \text{für } x > 1: & \frac{1}{1-x} > 3 & \Leftrightarrow \quad 1 < 3(1-x) & \Leftrightarrow \quad x < \frac{2}{3}. \end{array}$$

Die Ungleichung in der ersten Zeile ist für $\frac{2}{3} < x < 1$ erfüllt, in der zweiten Zeile widersprechen sich die Bedingungen $x > 1$ und $x < \frac{2}{3}$. Die Lösungsmenge ist

$$\mathbb{L} = \left(\frac{2}{3}; 1\right)\,.$$

Beispiel 2

$\frac{1}{x-2} \leq -x$.

Die Nullstelle des Nenners $x = 2$ ist auszuschließen. Für $x > 2$ ist der Nenner positiv, für $x < 2$ negativ. Deshalb gelten folgende äquivalente Umformungen

$$\begin{aligned} &\text{für } x > 2: \quad && \tfrac{1}{x-2} \leq -x \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq -x^2 + 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \leq 0, \\ &\text{für } x < 2: \quad && \tfrac{1}{x-2} \leq -x \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geq -x^2 + 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \geq 0. \end{aligned}$$

$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \leq 0$ gilt nur für $x = 1$, das widerspricht aber der Bedingung $x > 2$. In der zweiten Zeile ist $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$ für alle x erfüllt, deshalb gehören alle $x < 2$ zur Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = (-\infty; 2) \ .$$

Beispiel 3

$x^2 \leq x$.

Da beide Seiten der Ungleichung Vielfache von x sind, liegt es hier nahe, durch den gemeinsamen Faktor $x \neq 0$ zu teilen, und dabei das Vorzeichen zu beachten.

$$\begin{aligned} &\text{für } x > 0: \quad && x^2 \leq x \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 1, \\ &\text{für } x < 0: \quad && x^2 \leq x \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1. \end{aligned}$$

Die erste Zeile zeigt, dass $(0; 1]$ zur Lösungsmenge gehört, in der zweiten Zeile widersprechen sich die Bedingungen $x < 0$ und $x \geq 1$. Im verbleibenden Fall $x = 0$ ist die Ungleichung auch erfüllt. Die Lösungsmenge ist daher

$$\mathbb{L} = [0; 1] \, .$$

Man kann diese quadratische Ungleichung natürlich auch mit dem im vorigen Abschnitt behandelten Verfahren lösen.

Noch Fragen? Dann schauen Sie bitte ins Forum oder fragen per Skype bei OMB+ tutor (ombplus).

ÜBUNG 1

Schreiben Sie die folgenden Terme ohne Betrag. Benutzen Sie dafür eine Fallunterscheidung.

Lösen Sie die Bedingung an die Variable nach x auf, d.h. geben Sie die Bedingung in der Form $x > \ldots$, $x \leq \ldots$ etc. an.

a) $|x+2|$

b) $2\,|3-2x|$

c) $7x-5-|3x-2|$

d) $5x-7-3\,|-6x-4|$

Antwort

a) $|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{falls } \ x \geq -2, \\ -x-2 & \text{sonst.} \end{cases}$

b) $2\,|3-2x| = \begin{cases} 6-4x & \text{falls } \ x \leq \frac{3}{2}, \\ 4x-6 & \text{sonst.} \end{cases}$

c) $7x-5-|3x-2| = \begin{cases} 4x-3 & \text{falls } \ x \geq \frac{2}{3}, \\ 10x-7 & \text{sonst.} \end{cases}$

d) $5x-7-3\,|-6x-4| = \begin{cases} 23x+5 & \text{falls } \ x \leq -\frac{2}{3}, \\ -13x-19 & \text{sonst.} \end{cases}$

Lösung a

Es gilt $|x+2| = x+2$ falls $x+2 \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \geq -2\,.$

Andernfalls, für $x < -2$, ist $|x+2| = -(x+2) = -x-2\,.$

Mit der üblichen Schreibweise einer Fallunterscheidung:

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{falls } \ x \geq -2, \\ -x-2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lösung b

Für $3-2x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; 3 \geq 2x \;\Leftrightarrow\; x \leq \frac{3}{2}$ gilt $2\,|3-2x| = 2\,(3-2x) = 6-4x$.

Andernfalls gilt $2\,|3-2x| = 2\cdot(-(3-2x)) = 4x-6$.

Eine solche Fallunterscheidung wird gewöhnlich geschrieben:

$$2\,|3-2x| = \begin{cases} 6-4x & \text{falls } \; x \leq \frac{3}{2}, \\ 4x-6 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lösung c

Es gilt $|3x-2| = 3x-2$ falls $3x-2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq \frac{2}{3}$. Daraus folgt
$7x-5-(3x-2) = 4x-3$ im ersten Fall.

Andernfalls gilt $|3x-2| = 2-3x$ und damit $7x-5-(2-3x) = 10x-7$.

Zusammengefasst:

$$7x-5-|3x-2| = \begin{cases} 4x-3 & \text{falls } \; x \geq \frac{2}{3}, \\ 10x-7 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lösung d

Für $-6x-4 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; -4 \geq 6x \;\Leftrightarrow\; x \leq -\frac{2}{3}$ gilt
$3\,|-6x-4| = 3(-6x-4) = -18x-12$. Im ersten Fall folgt daraus
$5x-7-(-18x-12) = 23x+5$.

Andernfalls gilt $3\,|-6x-4| = 3(6x+4) = 18x+12$ und damit
$5x-7-(18x+12) = -13x-19$.

Das schreibt man:

$$5x-7-3\,|-6x-4| = \begin{cases} 23x+5 & \text{falls } \; x \leq -\frac{2}{3}, \\ -13x-19 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ÜBUNG 2

Geben Sie die Lösungsmengen $\mathbb{L}$ für folgende Ungleichungen an.

a) $|x+2| \leq 5$

b) $|3-x| > 4$

c) $|3x-2| < 5$

d) $|-5x-7| \geq 4$

Antwort

a) $\mathbb{L} = [-7; 3]$

b) $\mathbb{L} = (-\infty; -1) \cup (7; \infty)$

c) $\mathbb{L} = \left(-1; \frac{7}{3}\right)$

d) $\mathbb{L} = \left(-\infty; -\frac{11}{5}\right] \cup \left[-\frac{3}{5}; \infty\right)$

Lösung a

Da $|x+2|$ den Abstand zwischen x und -2 beschreibt, besteht die Lösungsmenge von $|x+2| \leq 5$ aus allen Punkten x auf dem Zahlenstrahl, deren Abstand von -2 kleiner gleich 5 ist.

Anschauliche Bestimmung der Lösungsmenge: Die beiden Punkte -7 und 3 auf dem Zahlenstrahl haben von -2 den Abstand 5. Deshalb bilden diese beiden Punkte und alle Punkte dazwischen die Lösungsmenge: $\mathbb{L} = [-7; 3]$.

Rechnerische Bestimmung der Lösungsmenge: Mit der Fallunterscheidung

$$|x+2| \leq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \leq 5 & \text{falls} \quad x \geq -2, \\ -x-2 \leq 5 & \text{sonst}, \end{cases}$$

muss für $x \geq -2$ die Ungleichung $x+2 \leq 5 \Leftrightarrow x \leq 3$ gelten, das ergibt das Intervall $[-2; 3]$ als Teil der Lösungsmenge.
Und für $x < -2$ muss $-x-2 \leq 5 \Leftrightarrow -x \leq 7 \Leftrightarrow x \geq -7$ gelten, das ergibt $[-7; -2)$ als weiteres Teilintervall der Lösungsmenge. Die Vereinigung der beiden Teile der Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = [-7; 3]$.

Lösung b

Da $|3-x|$ den Abstand zwischen x und 3 beschreibt, besteht die Lösungsmenge von $|3-x|>4$ aus allen Punkten x auf dem Zahlenstrahl, deren Abstand von 3 größer als 4 ist.

Anschauliche Bestimmung der Lösungsmenge: Die beiden Punkte -1 und 7 auf dem Zahlenstrahl haben von 3 den Abstand 4. Deshalb bilden alle Punkte, die von 3 weiter entfernt sind als diese beiden Punkte, die Lösungsmenge: $\mathbb{L}=(-\infty;-1)\cup(7;\infty)$.

Rechnerische Bestimmung der Lösungsmenge: Mit der Fallunterscheidung

$$|3-x|>4 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x>4 & \text{falls } \; 3-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 3, \\ x-3>4 & \text{sonst,} \end{cases}$$

muss für $x\leq 3$ die Ungleichung $3-x>4 \Leftrightarrow -x>1 \Leftrightarrow x<-1$ gelten. Die Ungleichung $x<-1$ ist stärker einschränkend als $x\leq 3$, das ergibt das Intervall $(-\infty;-1)$ als Teil der Lösungsmenge.
Und für $x>3$ muss $\; x-3>4 \Leftrightarrow x>7$ gelten, was stärker einschränkend als $x>3$ ist. Das ergibt $(7;\infty)$ als weiteres Teilintervall der Lösungsmenge. Die Vereinigung der beiden Teile der Lösungsmenge ist $\mathbb{L}=(-\infty;-1)\cup(7;\infty)$.

Lösung c

Da die Variable x einen Vorfaktor ungleich 1 hat, ist die rechnerische Lösung naheliegend.

Rechnerische Bestimmung der Lösungsmenge: Mit der Fallunterscheidung

$$|3x-2|<5 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2<5 & \text{falls } \; 3x\geq 2 \Leftrightarrow x\geq \frac{2}{3}, \\ -3x+2<5 & \text{sonst,} \end{cases}$$

muss für $x\geq\frac{2}{3}$ die Ungleichung $3x-2<5 \Leftrightarrow x<\frac{7}{3}$ gelten, das ergibt das Intervall $\left[\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right)$ als Teil der Lösungsmenge.
Und für $x<\frac{2}{3}$ muss $\; -3x+2<5 \Leftrightarrow -3x<3 \Leftrightarrow x>-1$ gelten, das ergibt $\left(-1;\frac{2}{3}\right)$ als weiteres Teilintervall der Lösungsmenge. Die Vereinigung der beiden Teile der Lösungsmenge ist $\mathbb{L}=\left(-1;\frac{7}{3}\right)$.

Lösung d

Da die Variable x einen Vorfaktor ungleich 1 hat, ist die rechnerische Lösung naheliegend.

Rechnerische Bestimmung der Lösungsmenge: Mit der Fallunterscheidung

$$|-5x-7| \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} -5x-7 \geq 4 & \text{falls} \quad -5x \geq 7 \Leftrightarrow x \leq -\frac{7}{5}, \\ 5x+7 \geq 4 & \text{sonst,} \end{cases}$$

muss für $x \leq -\frac{7}{5}$ die Ungleichung $-5x-7 \geq 4 \Leftrightarrow -x \geq \frac{11}{5} \Leftrightarrow x \leq -\frac{11}{5}$ gelten. Die Ungleichung $x \leq -\frac{11}{5}$ ist stärker einschränkend als $x \leq -\frac{7}{5}$, das ergibt das Intervall $\left(-\infty; -\frac{11}{5}\right]$ als Teil der Lösungsmenge.
Und für $x > -\frac{7}{5}$ muss $5x+7 \geq 4 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{5}$ gelten, was stärker einschränkend als $x > -\frac{7}{5}$ ist. Das ergibt $\left[-\frac{3}{5}; \infty\right)$ als weiteres Teilintervall der Lösungsmenge. Die Vereinigung der beiden Teile der Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \left(-\infty; -\frac{11}{5}\right] \cup \left[-\frac{3}{5}; \infty\right)$.

ÜBUNG 3

Geben Sie die Lösungsmengen $\mathbb{L}$ für folgende Ungleichungen an.

a) $\frac{2}{\sqrt{3x}} < \frac{3}{4}$

b) $\frac{3}{\sqrt{5x-10}} \geq \frac{2}{3}$

c) $\frac{5}{|3x-1|} \leq 1$

d) $\frac{7}{|-5x+2|} \geq 1$

Antwort

a) $\mathbb{L} = \left(\frac{64}{27}; \infty\right)$

b) $\mathbb{L} = \left(2; \frac{121}{20}\right]$

c) $\mathbb{L} = \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right] \cup [2; \infty)$

d) $\mathbb{L} = \left[-1; \frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{5}; \frac{9}{5}\right]$

Lösung a

Die Wurzel ist nur für $3x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ definiert. Damit der Nenner ungleich Null ist, muss auch $x = 0$ ausgeschlossen werden. Für $x > 0$ ist $\sqrt{3x} > 0$.

Die Ungleichung kann mit $\sqrt{3x}$ und 4 multipliziert und durch 3 geteit werden und man erhält die äquivalente Ungleichung

$$\frac{2}{\sqrt{3x}} < \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8}{3} < \sqrt{3x}.$$

Für $a, b \geq 0$ gilt: $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$. Daher kann die Ungleichung durch Quadrieren weiter äquivalent umgeformt werden zu

$$\frac{8}{3} < \sqrt{3x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{64}{9} < 3x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{64}{27} < x.$$

Die Ungleichung ist „nach x aufgelöst". Die Ungleichung $x > \frac{64}{27}$ ist stärker einschränkend als $x > 0$ von oben. Die Lösungsmenge ist also $\mathbb{L} = \left(\frac{64}{27}; \infty\right)$.

Lösung b

Die Wurzel ist nur für $5x - 10 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ definiert. Damit der Nenner ungleich Null ist, muss auch $x = 2$ ausgeschlossen werden. Für $x > 2$ ist $\sqrt{5x-10} > 0$.

Die Ungleichung kann mit $\sqrt{5x-10}$ und 3 multipliziert und durch 2 geteit werden und man erhält die äquivalente Ungleichung

$$\frac{3}{\sqrt{5x-10}} \geq \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9}{2} \geq \sqrt{5x-10}.$$

Für $a, b \geq 0$ gilt: $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$. Daher kann die Ungleichung durch Quadrieren weiter äquivalent umgeformt werden zu

$$\frac{9}{2} \geq \sqrt{5x-10} \;\Leftrightarrow\; \frac{81}{4} \geq 5x - 10 \;\Leftrightarrow\; \frac{121}{4} \geq 5x \;\Leftrightarrow\; \frac{121}{20} \geq x.$$

Die Ungleichung ist „nach x aufgelöst". Die Lösungsmenge ist also (mit der Einschränkung $x > 2$ von oben) $\mathbb{L} = \left(2; \frac{121}{20}\right]$.

Lösung c

Damit der Nenner ungleich Null ist, muss $3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ ausgeschlossen werden. Für $x \neq \frac{1}{3}$ ist $|3x - 1| > 0$.

Multiplikation der Ungleichung mit $|3x-1| > 0$ ergibt die äquivalente Ungleichung $5 \leq |3x - 1|$. Der Betrag wird nun durch eine Fallunterscheidung aufgelöst:

$$|3x-1| \geq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 \geq 5 & \text{falls } \; x > \frac{1}{3}, \\ -3x + 1 \geq 5 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im ersten Fall ist die Ungleichung $3x - 1 \geq 5 \Leftrightarrow x \geq 2$ stärker einschränkend als $x > \frac{1}{3}$. Das Intervall $[2; \infty)$ gehört zur Lösungsmenge.

Im zweiten Fall ist die Ungleichung $-3x + 1 \geq 5 \Leftrightarrow x \leq -\frac{4}{3}$ stärker einschränkend als $x < \frac{1}{3}$. Man erhält $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right]$ als weiteres Teilintervall der Lösungsmenge. Die Vereinigung der beiden Teile der Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right] \cup [2; \infty)$.

Lösung d

Damit der Nenner ungleich Null ist, muss $-5x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{5}$ ausgeschlossen werden. Für $x \neq \frac{2}{5}$ ist $|-5x+2|>0$.

Multiplikation der Ungleichung mit $|-5x+2|>0$ ergibt die äquivalente Ungleichung $7 \geq |-5x+2|$. Der Betrag wird nun durch eine Fallunterscheidung aufgelöst:

$$|-5x+2| \leq 7 \Leftrightarrow \begin{cases} -5x+2 \leq 7 & \text{falls } \ x<\frac{2}{5}, \\ 5x-2 \leq 7 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im ersten Fall ist die Ungleichung $-5x+2 \leq 7 \Leftrightarrow x \geq -1$. Mit der Einschränkung $x<\frac{2}{5}$ erhält man $\left[-1; \frac{2}{5}\right)$ als Teilintervall der Lösungsmenge.

Im zweiten Fall ist die Ungleichung $5x-2 \leq 7 \Leftrightarrow x \leq \frac{9}{5}$, mit $x>\frac{2}{5}$ erhält man $\left(\frac{2}{5}; \frac{9}{5}\right]$ als weiteres Teilintervall der Lösungsmenge. Die Vereinigung der beiden Teile der Lösungsmenge ist $\mathbb{L}=\left[-1; \frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{5}; \frac{9}{5}\right]$.

ÜBUNG 4

Geben Sie die Lösungsmengen $\mathbb{L}$ für folgende Ungleichungen an.

a) $\frac{2}{x} > 3$

b) $\frac{3}{2-x} \leq 4$

c) $\frac{5}{3x-1} \leq -3$

d) $\frac{7}{3-5x} > -2$

Antwort

a) $\mathbb{L} = \left(0; \frac{2}{3}\right)$

b) $\mathbb{L} = \left(-\infty; \frac{5}{4}\right] \cup (2; \infty)$

c) $\mathbb{L} = \left[-\frac{2}{9}; \frac{1}{3}\right)$

d) $\mathbb{L} = \left(-\infty; \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{13}{10}; \infty\right)$

Lösung a

Damit der Nenner ungleich Null ist, muss $x = 0$ ausgeschlossen werden. Für $x \neq 0$ ist eine Fallunterscheidung nötig, wenn die Ungleichung mit dem Nenner multipliziert wird. Bei Multiplikation mit einer negativen Zahl kehrt sich das Vergleichszeichen um.

Wenn man die Ungleichung mit x multipliziert, erhält man die folgenden äquivalenten Ungleichungen:

$$\frac{2}{x} > 3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2 > 3x & \text{falls} \quad x > 0, \\ 2 < 3x & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im ersten Fall führt die Ungleichung $2 > 3x \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$ zusammen mit $x > 0$ auf das Intervall $\left(0; \frac{2}{3}\right)$ als Teil der Lösungsmenge.

Im zweiten Fall steht die Ungleichung $2 < 3x \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$ im Widerspruch zu $x < 0$, es gibt kein x, das beide Ungleichungen erfüllt. Links von Null gibt es keinen weiteren Teil der Lösungsmenge. Also ist $\mathbb{L} = \left(0; \frac{2}{3}\right)$.

(Dass kein $x < 0$ die Ungleichung erfüllt, kann man auch ohne Rechnung daran sehen, dass dort $\frac{2}{x}$ negativ ist und daher nie größer als 3 sein kann.)

Lösung b

Damit der Nenner ungleich Null ist, muss $x = 2$ ausgeschlossen werden. Für $x \neq 2$ ist eine Fallunterscheidung nötig, wenn die Ungleichung mit dem Nenner multipliziert wird. Bei Multiplikation mit einer negativen Zahl kehrt sich das Vergleichszeichen um.

Wenn man die Ungleichung mit $2 - x$ multipliziert, erhält man die folgenden äquivalenten Ungleichungen:

$$\frac{3}{2-x} \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3 \leq 8 - 4x & \text{falls } \; x < 2, \\ 3 \geq 8 - 4x & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im ersten Fall ist die Ungleichung $3 \leq 8 - 4x \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{4}$ stärker einschränkend als $x < 2$. Das Intervall $\left(-\infty; \frac{5}{4}\right]$ ist Teil der Lösungsmenge.

Im zweiten Fall ist die Ungleichung $3 \geq 8 - 4x \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{4}$ für alle $x > 2$ erfüllt, daher ist $(2; \infty)$ ein weiterer Teil der Lösungsmenge. Also ist $\mathbb{L} = \left(-\infty; \frac{5}{4}\right] \cup (2; \infty)$.

(Dass alle $x > 2$ die Ungleichung erfüllen, kann man auch ohne Rechnung daran sehen, dass dort $\frac{3}{2-x} < 0$ ist und daher immer kleiner gleich 4 ist.)

Lösung c

Damit der Nenner ungleich Null ist, muss $3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ ausgeschlossen werden. Multiplikation mit dem Nenner für $x \neq \frac{1}{3}$ erfordert eine Fallunterscheidung. Bei Multiplikation mit einer negativen Zahl kehrt sich das Vergleichszeichen um.

Wenn man die Ungleichung mit $3x - 1$ multipliziert, erhält man die folgenden äquivalenten Ungleichungen:

$$\frac{5}{3x-1} \leq -3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5 \leq -9x + 3 & \text{falls } \; x > \frac{1}{3}, \\ 5 \geq -9x + 3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im ersten Fall führt die Ungleichung $5 \leq -9x + 3 \Leftrightarrow \frac{2}{9} \leq -x \Leftrightarrow x \leq -\frac{2}{9}$ auf einen Widerspruch zu $x > \frac{1}{3}$. Es gibt dort keine Lösungen.

Im zweiten Fall führt die Ungleichung $5 \geq -9x + 3 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{9}$ zusammen mit $x < \frac{1}{3}$ auf das Intervall $\left[-\frac{2}{9}; \frac{1}{3}\right)$. Also ist $\mathbb{L} = \left[-\frac{2}{9}; \frac{1}{3}\right)$.

(Dass kein $x > \frac{1}{3}$ die Ungleichung erfüllt, kann man auch ohne Rechnung daran sehen, dass dort $\frac{5}{3x-1}$ positiv ist und daher nie kleiner gleich -3 sein kann.)

Lösung d

Für $x \neq \frac{3}{5}$ ist der Nenner ungleich Null. Bei Multiplikation mit dem Nenner sind die Fälle $x < \frac{3}{5}$ und $x > \frac{3}{5}$ zu unterscheiden.

Multiplikation der Ungleichung mit $3-5x$ ergibt die äquivalenten Ungleichungen:

$$\frac{7}{3-5x} > -2 \Leftrightarrow \begin{cases} 7 > -6+10x & \text{falls } \; x < \frac{3}{5}, \\ 7 < -6+10x & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im ersten Fall ist die Ungleichung $7 > -6+10x \Leftrightarrow x < \frac{13}{10}$ für alle x mit $x < \frac{3}{5}$ bereits erfüllt, man erhält $\left(-\infty; \frac{3}{5}\right)$ als Teilintervall der Lösungsmenge.

Im zweiten Fall ist die Ungleichung $7 < -6+10x \Leftrightarrow x > \frac{13}{10}$ stärker einschränkend als $x > \frac{3}{5}$, dehalb ist $\left(\frac{13}{10}; \infty\right)$ ein weiteres Teilintervall der Lösungsmenge. Die Vereinigung der beiden Teile der Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \left(-\infty; \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{13}{10}; \infty\right)$.

(Dass jedes $x < \frac{3}{5}$ die Ungleichung erfüllt, folgt ohne Rechnung daraus, dass dort $\frac{7}{3-5x} > 0$ ist und daher immer größer als -2 ist.)