**SS2018 – Ausblick – Prof. Paditz**

**Aufg. 6.2.1**

Ermitteln Sie die Funktionen z(x, y), die folgenden

Gleichungen genügen:

$\frac{\partial z}{\partial x}=x^2+y^2$ und $\frac{\partial z}{\partial y}=2xy-\frac{1}{y^2}$

**Lösung:**

geg.: Gradient $grad(z(x,y))=\begin{bmatrix} x^2+y^2 \\ 2xy-\frac{1}{y^2} \end{bmatrix}$

ges.: Stammfunktion F(x, y)

$F(x,y)=\int_{\square}^{\square} x^2+y^2 dx+C(y)$

$$F(x,y)=C(y)+\frac{x^3}{3}+x\cdot y^2$$

$\frac{d}{dy}(ans)$

$$\frac{d}{dy}(F(x,y))=\frac{d}{dy}(C(y))+2\cdot x\cdot y$$

$\frac{d}{dy}(C(y))=-\frac{1}{y^2}$

$$\frac{d}{dy}(C(y))=\frac{-1}{y^2}$$

$$\int_{\square}^{\square} ans\,dy$$

$$\int \frac{d}{dy}(C(y))\,dy=\frac{1}{y}$$

Define $F(x,y)=\frac{1}{y}+\frac{x^3}{3}+x\cdot y^2+C$

done

**Aufg. 6.2.2**

Gegeben ist das System linearer Differenzialgleichungen erster Ordnung

$x'(t)=-3x+2y$

$y'(t)=2x-3y.$

a) Schreiben Sie das System in Matrixform $\mathbf{z'=Az}$ mit $\mathbf{z}=(x,y)^T$.

b) Machen Sie in Analogie zur Differentialgleichung $y'=ay$ mit der Lösung $y(t)=be^{rt}$ den Ansatz $\mathbf{x}(t)=\mathbf{b}e^{rt}$ mit $\mathbf{b}\in\mathbf{R}^2$ und $r\in\mathbf{R}$ und bestimmen Sie $\mathbf{b}$ und r so, dass das System von Differentialgleichungen erfüllt wird.

c) Wie lautet die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems?

d) Ermitteln Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix **A**.

**Lösung:** lineares Dgl.-System der Gesamtordnung 2 (zwei Einzelgl. der Ordnug 2)

**a)** $\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$

**b)** $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b1e^{rt} \\ b2e^{rt} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b1re^{rt} \\ b2re^{rt} \end{bmatrix}$

DelVar b1, b2, r, t

done

$$\begin{bmatrix} b1*re^{r*t} \\ b2*re^{r*t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b1e^{r*t} \\ b2e^{r*t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b1\cdot r\cdot e^{r\cdot t}+3\cdot b1\cdot e^{r\cdot t}-2\cdot b2\cdot e^{r\cdot t} \\ -2\cdot b1\cdot e^{r\cdot t}+b2\cdot r\cdot e^{r\cdot t}+3\cdot b2\cdot e^{r\cdot t} \end{bmatrix}$$

factorOut(ans, $e^{r*t}$)

$$\begin{bmatrix} (b1\cdot r+3\cdot b1-2\cdot b2)\cdot e^{r\cdot t} \\ -(-b2\cdot r+2\cdot b1-3\cdot b2)\cdot e^{r\cdot t} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{cases} (b1\cdot r+3\cdot b1-2\cdot b2)\cdot e^{r\cdot t}=0 \\ -(-b2\cdot r+2\cdot b1-3\cdot b2)=0 \\ 0=0 \end{cases}\right|_{b1, b2, r}$$

$\{\{b2=-b1, r=-5\}, \{b2=b1, r=-1\}, \{b1=0, b2=0, r=r\}\}$

triviale Lösung: $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

**nichttriviale Lösungen:**

$$\begin{bmatrix} x1(t) \\ y1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b1e^{-5t} \\ -b1e^{-5t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x2(t) \\ y2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b2e^{-t} \\ b2e^{-t} \end{bmatrix}$$

**c) allgemeine Lösung:**

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} b1e^{-5t} \\ -b1e^{-5t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b2e^{-t} \\ b2e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b2 \cdot e^{-t} + b1 \cdot e^{-5 \cdot t} \\ b2 \cdot e^{-t} - b1 \cdot e^{-5 \cdot t} \end{bmatrix}$$

$$= b2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + b1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-5t}$$

$b1, b2 \in \mathbf{R}$.

**d)**

$$A := \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

eigVl(A)

$$\{-1, -5\}$$

**Eigenwerte:** $\lambda \in \{-1, -5\}$

eigVc(A)

$$\begin{bmatrix} 0.7071067812 & -0.7071067812 \\ 0.7071067812 & 0.7071067812 \end{bmatrix}$$

**normierte Eigenvektoren:**

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

**alternative Lösung:**

Eliminationsverfahren

$x' = -3x + 2y \Rightarrow y = (x' + 3x)/2$

y'=2x−3y ergibt:

(x''+3x')/2=2x−3(x'+3x)/2

$$\frac{x''+3\cdot x'}{2}=\frac{-3\cdot(x'+3\cdot x)}{2}+2\cdot x$$

dSolve(ans, t, x)

$$\{x=e^{-t}\cdot\text{const}(2)+e^{-5\cdot t}\cdot\text{const}(1)\}$$

ans|const(2)=b2 and const(1)=b1

$$\{x=b2\cdot e^{-t}+b1\cdot e^{-5\cdot t}\}$$

$x:=b2\cdot e^{-t}+b1\cdot e^{-5\cdot t}$

$$b2\cdot e^{-t}+b1\cdot e^{-5\cdot t}$$

$y=\left(\frac{d}{dt}(x)+3x\right)/2$

$$y=\frac{-\left(\left(b2\cdot e^{4\cdot t}+5\cdot b1\right)\cdot e^{-5\cdot t}-3\cdot\left(b2\cdot e^{-t}+b1\cdot e^{-5\cdot t}\right)\right)}{2}$$

simplify(ans)

$$y=b2\cdot e^{-t}-b1\cdot e^{-5\cdot t}$$

**Aufg. 6. 2.** 3

Ein System von Reaktionsgleichungen wird durch das folgende Differenzialgleichungssystem **zweier Dgln. erster Ordnung** beschrieben:

x'(t)=−(k1+k2)x+k1y+p,

y'(t)=k1x−(k1+k2)y.

a) Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf der Konzentrationen x(t) und y(t) für folgende spezielle Zahlenwerte: k1=2, k2=1, p=5 mit den Anfangsbedingungen x(0)=2 und y(0)=0.

b) Diskutieren und skizzieren Sie die erhaltenen Lösungen x(t) und y(t).

**Lösung:** Matrixform

DelVar k1,k2,p,a,b,C1,C2

done

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(k1+k2) & k1 \\ k1 & -(k1+k2) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} -(k1+k2) & k1 \\ k1 & -(k1+k2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -k1-k2 & k1 \\ k1 & -k1-k2 \end{bmatrix}$$

eigVl(A|{k1=2,k2=1,p=5})

{-1,-5}

eigVc(A|{k1=2,k2=1,p=5})

$$\begin{bmatrix} 0.7071067812 & -0.7071067812 \\ 0.7071067812 & 0.7071067812 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-t} + C2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot e^{-5 \cdot t} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -(k1+k2) & k1 \\ k1 & -(k1+k2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} \,|\, \{k1=2, k2=1, p=5\}$$

$$\begin{bmatrix} -3 \cdot a + 2 \cdot b + 5 \\ 2 \cdot a - 3 \cdot b \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{cases} -3 \cdot a + 2 \cdot b + 5 = 0 \\ 2 \cdot a - 3 \cdot b = 0 \end{cases} \right|_{a,b}$$

{a=3,b=2}

**Ergebnis:**

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-t} + C2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot e^{-5 \cdot t} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

**AB:**

$$C1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-t} + C2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot e^{-5 \cdot t} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \,|\, t=0$$

$$\begin{bmatrix} C1+C2+3 \\ C1-C2+2 \end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{matrix} C1+C2+3=2 \\ C1-C2+2=0 \end{matrix}\right|_{C1,C2}$$

$$\left\{C1=-\frac{3}{2}, C2=\frac{1}{2}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}=-\frac{5}{2}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot e^{-t}+\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\cdot e^{-5\cdot t}+\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

**Eliminatiosverfahren:**

sei x'=xs

DelVar x,y,xs,ys,xss,k1,k2,p

done

1.Gl. nach y auflösen:

solve(xs=-(k1+k2)x+k1*y+p,y)

$$\left\{y=\frac{k1\cdot x+k2\cdot x-p+xs}{k1}\right\}$$

$$y:=\frac{k1\cdot x+k2\cdot x-p+xs}{k1}$$

$$\frac{k1\cdot x+k2\cdot x-p+xs}{k1}$$

in 2.Gl. y eliminieren: sei y'=ys, x''=xss

$$\frac{k1\cdot xs+k2\cdot xs+xss}{k1}=k1*x-(k1+k2)y$$

$$\frac{k1\cdot xs+k2\cdot xs+xss}{k1}=\frac{-(k1\cdot x+k2\cdot x-p+xs)\cdot(k1+k2)}{k1}+k1\cdot x$$

$$\text{simplify}\left(0=-\frac{k1\cdot xs+k2\cdot xs+xss}{k1}+\frac{-(k1\cdot x+k2\cdot x-p+xs)\cdot(k1+k}{k1}\right.$$

$$0=\frac{-\left(k2^2\cdot x+2\cdot k1\cdot k2\cdot x-k1\cdot p+2\cdot k1\cdot xs-k2\cdot p+2\cdot k2\cdot xs+xss\right)}{k1}$$

ans|{k1=2,k2=1,p=5}

$$0=\frac{-(5\cdot x+xss+6\cdot xs-15)}{2}$$

**Einzeldgl. 2.Ordnug zum Dgl.-System:**

$\text{dSolve}\left(\frac{5\cdot x+x''+6\cdot x'-15}{2}=0,t,x\right)$

$$\{x=e^{-t}\cdot\text{const}(2)+e^{-5\cdot t}\cdot\text{const}(1)+3\}$$

$x:=e^{-t}\cdot C2+e^{-5\cdot t}\cdot C1+3$

$$C2\cdot e^{-t}+C1\cdot e^{-5\cdot t}+3$$

$y:=\frac{k1\cdot x+k2\cdot x-p+\frac{d}{dt}(x)}{k1}\,|\,\{k1=2,k2=1,p=5\}$

$$\frac{C2\cdot e^{-t}-\left(C2\cdot e^{4\cdot t}+5\cdot C1\right)\cdot e^{-5\cdot t}+C1\cdot e^{-5\cdot t}+2\cdot\left(C2\cdot e^{-t}+C1\right.}{2}$$

simplify(ans)

$$C2\cdot e^{-t}-C1\cdot e^{-5\cdot t}+2$$

Define $x(t)=e^{-t}\cdot C2+e^{-5\cdot t}\cdot C1+3$

done

Define $y(t)=C2\cdot e^{-t}-C1\cdot e^{-5\cdot t}+2$

done

$\left\{\begin{array}{l}x(0)=2\\y(0)=0\end{array}\right|C1,C2$

$$\left\{C1=\frac{1}{2},C2=-\frac{3}{2}\right\}$$

$x(t)\,|\,\left\{C1=\frac{1}{2},C2=-\frac{3}{2}\right\}$

$$\frac{-3\cdot e^{-t}}{2}+\frac{e^{-5\cdot t}}{2}+3$$

$y(t)\,|\,\left\{C1=\frac{1}{2},C2=-\frac{3}{2}\right\}$

$$\frac{-3\cdot e^{-t}}{2}-\frac{e^{-5\cdot t}}{2}+2$$

**Ergebnis:**

Define $x(t)=\frac{-3\cdot e^{-t}}{2}+\frac{e^{-5\cdot t}}{2}+3$

done

Define $y(t)=\frac{-3\cdot e^{-t}}{2}-\frac{e^{-5\cdot t}}{2}+2$

done

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}=\frac{-3}{2}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot e^{-t}+\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\cdot e^{-5\cdot t}+\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(Druckfehler im Lösungsheft)

**Probe:**

$\frac{d}{dt}(x(t))=-(k1+k2)x(t)+k1*y(t)+p|\{k1=2,k2=1,p=5\}$

$$\frac{(3\cdot e^{4\cdot t}-5)\cdot e^{-5\cdot t}}{2}=-2\cdot\left(\frac{3\cdot e^{-t}}{2}+\frac{e^{-5\cdot t}}{2}-2\right)+3\cdot\left(\frac{3\cdot e^{-t}}{2}-e^{-}\right.$$

simplify(ans)

$$\frac{3\cdot e^{-t}}{2}-\frac{5\cdot e^{-5\cdot t}}{2}=\frac{3\cdot e^{-t}}{2}-\frac{5\cdot e^{-5\cdot t}}{2}$$

$\frac{d}{dt}(y(t))=k1*x(t)-(k1+k2)y(t)|\{k1=2,k2=1,p=5\}$

$$\frac{(3\cdot e^{4\cdot t}+5)\cdot e^{-5\cdot t}}{2}=3\cdot\left(\frac{3\cdot e^{-t}}{2}+\frac{e^{-5\cdot t}}{2}-2\right)-2\cdot\left(\frac{3\cdot e^{-t}}{2}-\frac{e^{-}}{2}\right.$$

simplify(ans)

$$\frac{3\cdot e^{-t}}{2}+\frac{5\cdot e^{-5\cdot t}}{2}=\frac{3\cdot e^{-t}}{2}+\frac{5\cdot e^{-5\cdot t}}{2}$$

b)

DelVar x,y,t

done

Define $y1(x)=\frac{-3\cdot e^{-x}}{2}+\frac{e^{-5\cdot x}}{2}+3$

done

Define $y2(x)=\frac{-3\cdot e^{-x}}{2}-\frac{e^{-5\cdot x}}{2}+2$

done

**$x_{min}$($t_{min}$):**

$t_{min}$=0.127706432342531

$x_{min}$=1.94386591584792

**Wendepunkt** für x(t):

t_w=0.530065884050022

x_w=2.15246468456178

$\lim_{x\to\infty}(y1(x))$

3

Asymptote x=3

x(t) konvex bis W, dann konkav und streng mon.wachsend

$\lim_{x\to\infty}(y2(x))$

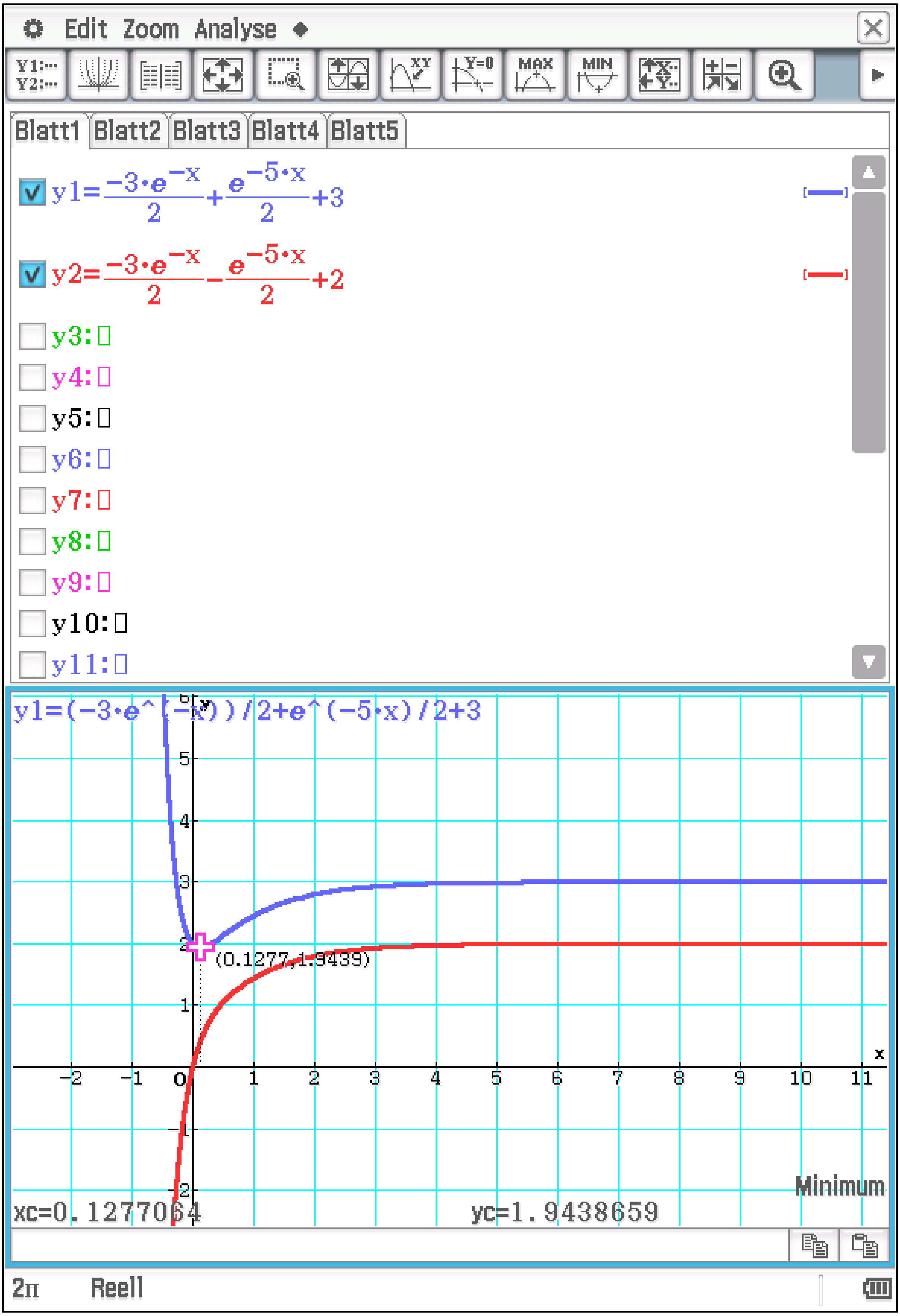
2

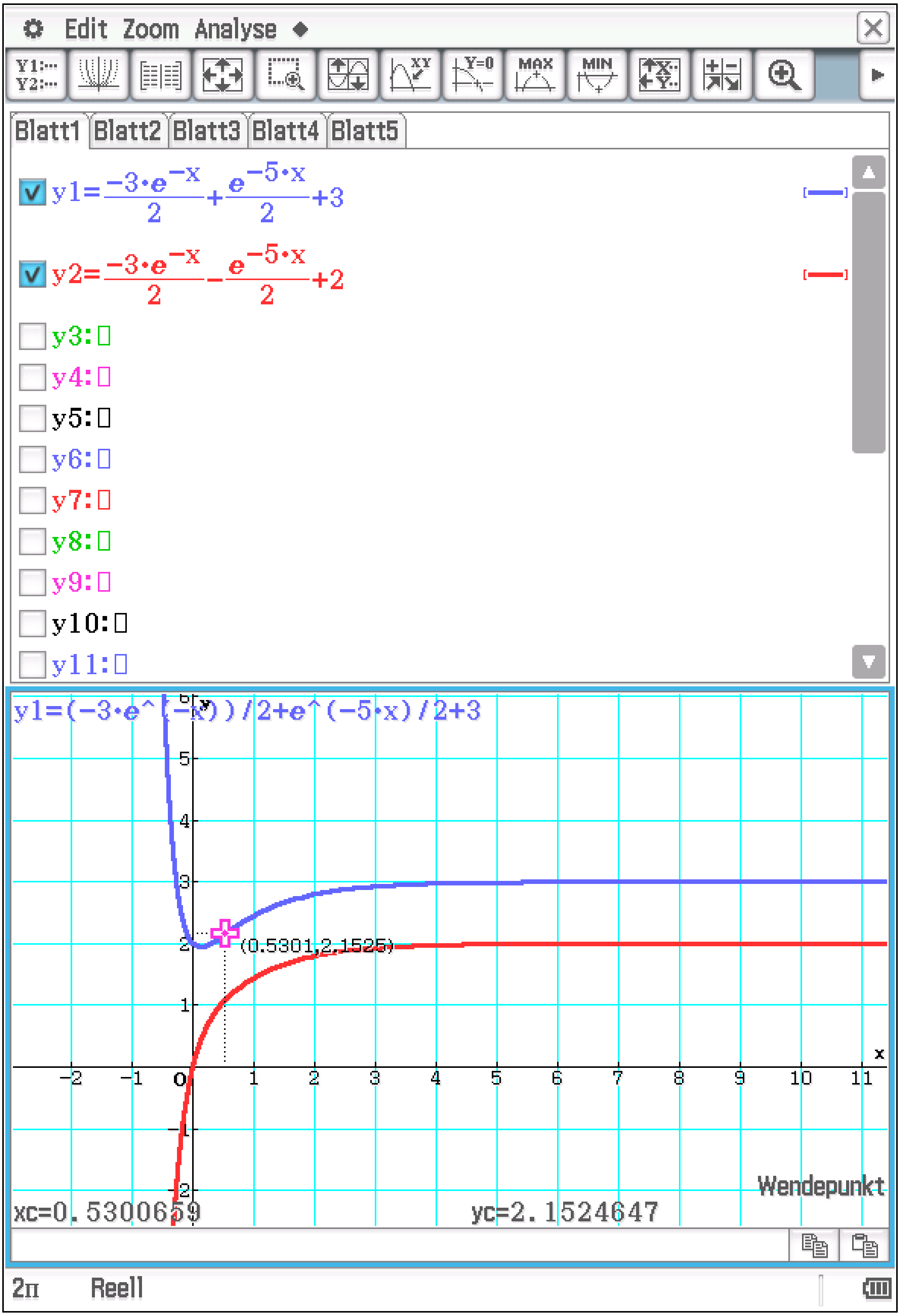
Asymptote y=2

y(t) streng mon.wachsend, konkav

2D-Grafik Y1:… Y2:…

**Zusatz Kapitel 6.2   Aufgabe 6.2.3**




Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
y1=(-3·e^(-x))/2+e^(-5·x)/2+3
y2=(-3·e^(-x))/2-e^(-5·x)/2+2
y3:
y4:
y5:
y6:
y7:
y8:
y9:
y10:
y11:
y1=(-3·e^(-x))/2+e^(-5·x)/2+3
(0.5301,2.1525)
Wendepunkt
xc=0.5300659
yc=2.1524647
2π Reell