Datei Edit Einfügen Aktion

WR 11.5 Prof. Paditz 11.01.2017

a) Berechnung der Wkt. **P(I>6)=P(U>6R)** (R>0)
R und U rechteckverteilt über [30,50] bzw. [200,240]

DelVar r,u

done

Ansatz P(I>6)=

$$\int_{200}^{240}\int_{30}^{\frac{u}{6}}\frac{1}{800}\,dr\,du$$

$$\frac{1}{3}$$

Ergebnis: P(I>6)= $\frac{1}{3}$

b)
R und U normalverteilt mit N(40,10) bzw. N(220,40)

P(R≤0)=
normCDf$(-\infty,0,\sqrt{10},40)$

5.657418951E-37

P(U≤100)=
normCDf$(-\infty,100,\sqrt{40},220)$

1.407842152E-80

Damit kann davon ausgegangen werden, dass R>0 und U>100 gilt.

Ansatz P(I>6)=

$$\lim_{b\to\infty}\left(\int_{0}^{b}\int_{0}^{\frac{u}{6}}\text{normPDf}(u,\sqrt{40},220)\,\text{normPDf}(r,\sqrt{10},40)\,dr\,du\right)$$

$$\lim_{b\to\infty}\left(\int_{0}^{b}\int_{0}^{\frac{u}{6}}\text{normPDf}(r,\sqrt{10},40)\cdot\text{normPDf}(u,2\cdot\sqrt{10},220)\,dr\,du\right)$$

Der TR kann dieses kompliziertes Doppelintegral nicht auswerten.

Algeb Standard Reell 2π

Datei Edit Einfügen Aktion

Verkleinerung der Integrationsintervalle und innere Integration mit normCDf(...) darstellen:

$$\int_{200}^{240}\int_{0}^{\frac{u}{6}} \text{normPDf}(u,\sqrt{40},220)\,\text{normPDf}(r,\sqrt{10},40)\,dr\,du=$$

$$\int_{200}^{240} \text{normPDf}(u,\sqrt{40},220)*\int_{0}^{\frac{u}{6}} \text{normPDf}(r,\sqrt{10},40)\,dr\,du=$$

$$\int_{200}^{240} \text{normPDf}(u,\sqrt{40},220)\,\text{normCDf}\left(30,\frac{u}{6},\sqrt{10},40\right)du$$

0.1574431853

Schrittweise Vergrößerung des Intervalls:

$$\int_{200}^{240} \text{normPDf}(u,\sqrt{40},220)\,\text{normCDf}\left(20,\frac{u}{6},\sqrt{10},40\right)du$$

0.158224661

$$\int_{150}^{300} \text{normPDf}(u,\sqrt{40},220)\,\text{normCDf}\left(0,\frac{u}{6},\sqrt{10},40\right)du$$

0.1586552539

$$\int_{0}^{300} \text{normPDf}(u,\sqrt{40},220)\,\text{normCDf}\left(0,\frac{u}{6},\sqrt{10},40\right)du$$

0.1586552539

$$\int_{0}^{500} \text{normPDf}(u,\sqrt{40},220)\,\text{normCDf}\left(0,\frac{u}{6},\sqrt{10},40\right)du$$

0.1586552539

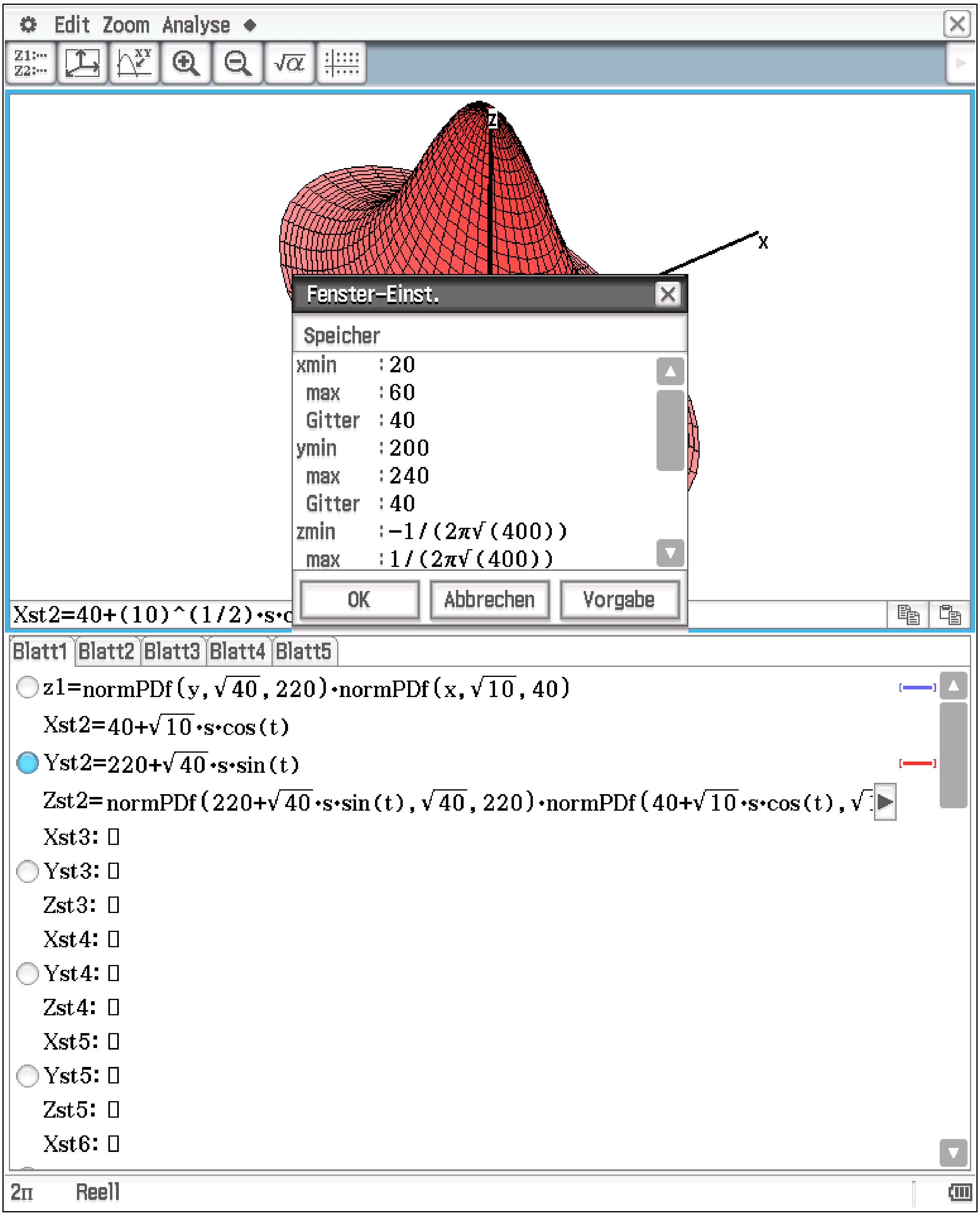
$$\int_{0}^{\infty} \text{normPDf}(u,\sqrt{40},220)\,\text{normCDf}\left(0,\frac{u}{6},\sqrt{10},40\right)du$$

0.1586552539

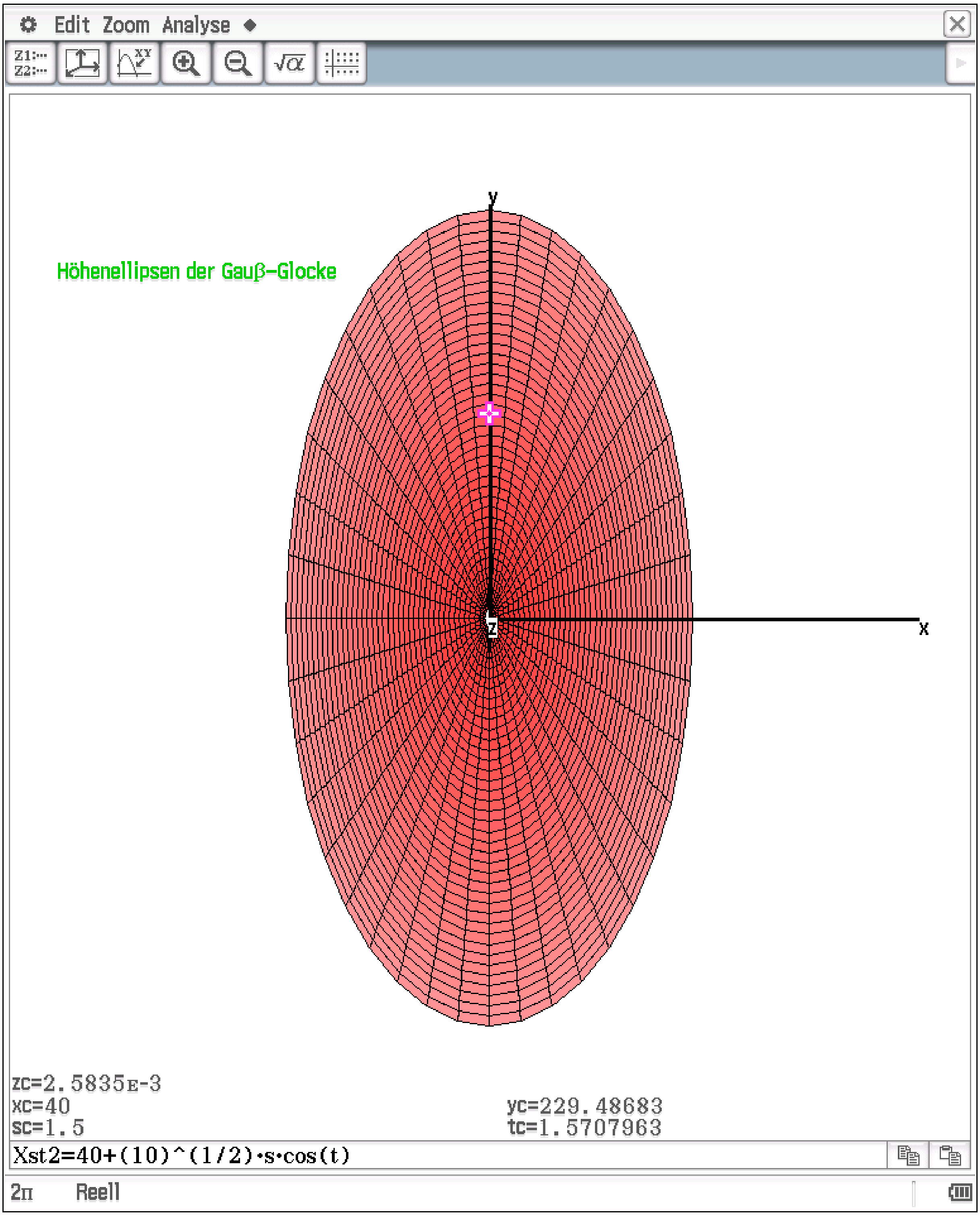
Ergebnis: **P(I>6)**$\approx$0.158655

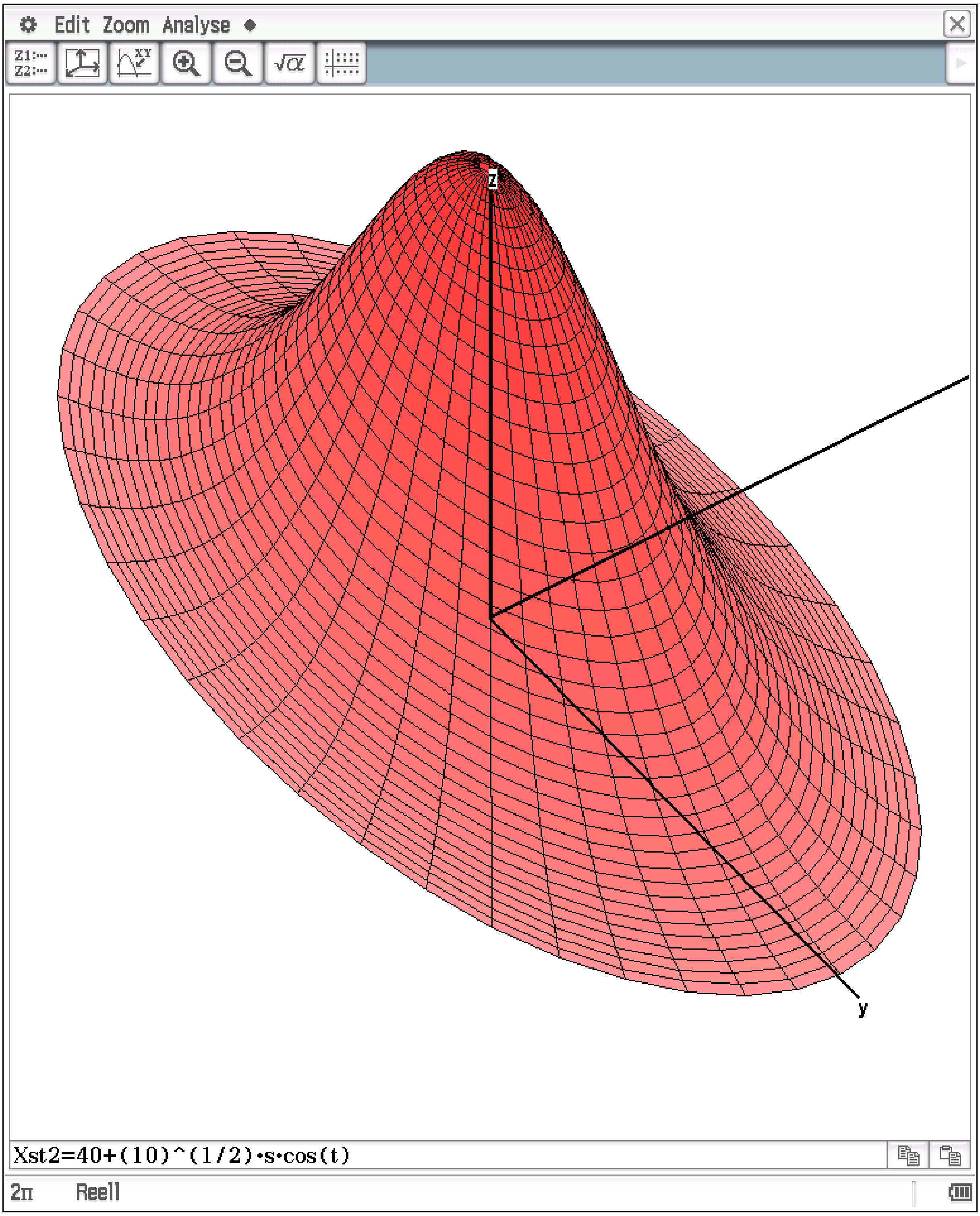
3D-Grafik der Glocke

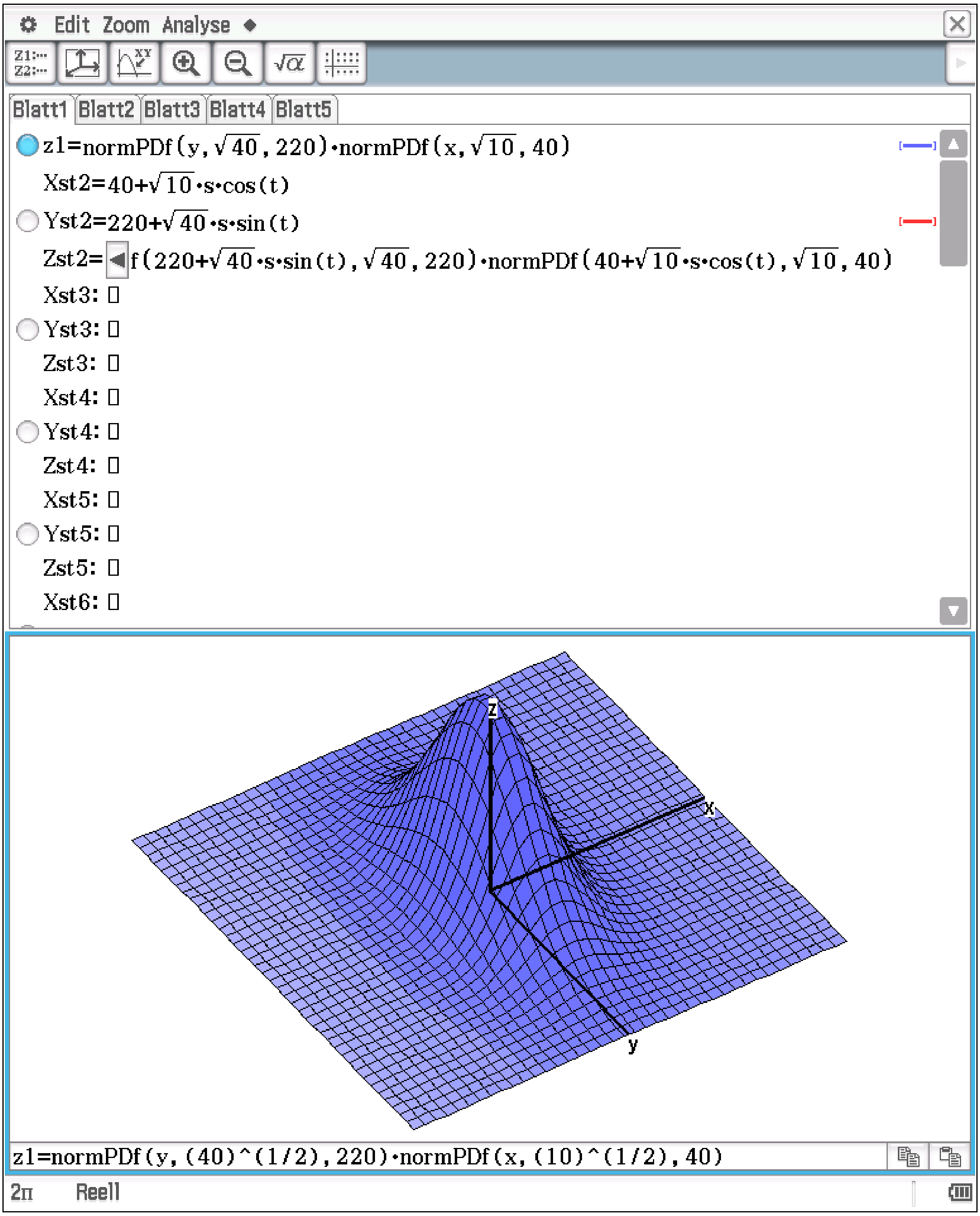
Algeb Standard Reell 2π



Edit Zoom Analyse
z
x
Fenster-Einst.
Speicher
xmin :20
max :60
Gitter :40
ymin :200
max :240
Gitter :40
zmin :−1/(2π√(400))
max :1/(2π√(400))
OK
Abbrechen
Vorgabe
Xst2=40+(10)^(1/2)•s•c
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
z1=normPDf(y,√40,220)•normPDf(x,√10,40)
Xst2=40+√10•s•cos(t)
Yst2=220+√40•s•sin(t)
Zst2=normPDf(220+√40•s•sin(t),√40,220)•normPDf(40+√10•s•cos(t),√
Xst3:
Yst3:
Zst3:
Xst4:
Yst4:
Zst4:
Xst5:
Yst5:
Zst5:
Xst6:
2π Reell


Edit Zoom Analyse
Höhenellipsen der Gauβ-Glocke
y
x
z
zc=2.5835E-3
xc=40
sc=1.5
yc=229.48683
tc=1.5707963
Xst2=40+(10)^(1/2)·s·cos(t)
2π Reell


Edit Zoom Analyse
z
y
Xst2=40+(10)^(1/2)·s·cos(t)
2π Reell


Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
z1=normPDf(y,√40,220)·normPDf(x,√10,40)
Xst2=40+√10·s·cos(t)
Yst2=220+√40·s·sin(t)
Zst2=f(220+√40·s·sin(t),√40,220)·normPDf(40+√10·s·cos(t),√10,40)
Xst3:
Yst3:
Zst3:
Xst4:
Yst4:
Zst4:
Xst5:
Yst5:
Zst5:
Xst6:
z
x
y
z1=normPDf(y,(40)^(1/2),220)·normPDf(x,(10)^(1/2),40)
2π Reell

Datei Edit Einfügen Aktion

WR 11.4

a) P(Xa≤2 ∧ Xb≤2)=P({Xa≤2}∩{Xb≤2})=

P(Xa≤2)*P(Xb≤2)=

poissonCDf(0,2,2)*poissonCDf(0,2,3)

0.2863627475

$$\sum_{k=0}^{2}\left(e^{-2}\frac{2^k}{k!}\right)*\sum_{l=0}^{2}\left(e^{-3}\frac{3^l}{l!}\right)$$

$$\frac{85\cdot e^{-5}}{2}$$

approx(ans)

0.2863627475

b) Formel der totalen Wkt. nutzen

P(Xa+Xb>4)=1−P(Xa+Xb≤4)=

$$1-\sum_{k=0}^{4}(P(k+Xb\leq 4\mid Xa=k)*P(Xa=k))=$$

$$1-\sum_{k=0}^{4}(P(Xb\leq 4-k\mid Xa=k)*P(Xa=k))=$$

$$1-\sum_{k=0}^{4}(P(Xb\leq 4-k)*P(Xa=k))$$

wegen der stochast. Unabhängigkeit von Xa und Xb.

$$1-\sum_{k=0}^{4}(P(Xb\leq 4-k)*P(Xa=k))=$$

$$1-\sum_{k=0}^{4}(\mathrm{poissonCDf}(0,4-k,3)*\mathrm{poissonPDf}(k,2))$$

0.5595067149

elementar:

$$1-\sum_{k=0}^{4}\left(e^{-2}\frac{2^k}{k!}*\sum_{l=0}^{4-k}\left(e^{-3}\frac{3^l}{l!}\right)\right)$$

$$-\sum_{k=0}^{4}\left(\frac{2^k\cdot\sum_{l=0}^{-k+4}\left(\frac{3^l\cdot e^{-3}}{l!}\right)\cdot e^{-2}}{k!}\right)+1$$

Doppelsumme wird nicht ausgewertet!

Algeb Standard Reell 2π

Datei Edit Einfügen Aktion

$1-\sum\limits_{k=0} (P(Xb\le 4-k)*P(Xa=k))$

wegen der stochast. Unabhängigkeit von Xa und Xb.

$1-\sum\limits_{k=0}^{4} (P(Xb\le 4-k)*P(Xa=k))=$

$1-\sum\limits_{k=0}^{4} (\mathrm{poissonCDf}(0,4-k,3)*\mathrm{poissonPDf}(k,2))$

$$0.5595067149$$

elementar:

$1-\sum\limits_{k=0}^{4}\left(e^{-2}\frac{2^k}{k!}*\sum\limits_{l=0}^{4-k}\left(e^{-3}\frac{3^l}{l!}\right)\right)$

$$-\sum_{k=0}^{4}\left(\frac{2^k\cdot\sum\limits_{l=0}^{-k+4}\left(\frac{3^l\cdot e^{-3}}{l!}\right)\cdot e^{-2}}{k!}\right)+1$$

Doppelsumme wird nicht ausgewertet!

Schrittweise:

$\mathrm{seq}\left(e^{-2}\frac{2^k}{k!}*\sum\limits_{l=0}^{4-k}\left(e^{-3}\frac{3^l}{l!}\right),k,0,4,1\right)\Rightarrow \mathrm{list1}$

$$\left\{\frac{131\cdot e^{-5}}{8},26\cdot e^{-5},17\cdot e^{-5},\frac{16\cdot e^{-5}}{3},\frac{2\cdot e^{-5}}{3}\right\}$$

$1-\mathrm{sum}(\mathrm{list1})$

$$\frac{-523\cdot e^{-5}}{8}+1$$

approx(ans)

$$0.5595067149$$

c) $P(Xa\ge 1)\le 0.8$ ergibt

$1-P(Xa=0)\le 0.8$

$0.2\le P(Xa=0)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!}=e^{-\lambda}$

$\mathrm{solve}(0.2\le e^{-\lambda},\lambda)$

$$\{\lambda\le \ln(5)\}$$

approx(ans)

$$\{\lambda\le 1.609437912\}$$

Algeb Standard Reell 2π

Datei Edit Einfügen Aktion

WR 8.3

DelVar x, y, k

done

Define $f(x,y)=k*(1+x*y*(x^2-y^2))$

done

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx\,dy=1$$

$4\cdot k=1$

solve(ans, k)

$\left\{k=\frac{1}{4}\right\}$

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx \mid k=\frac{1}{4}$$

$\frac{1}{8}$

3D-Grafik

Berechnung der Kovarianz cov(X, Y)=E(X*Y)−E(X)*E(Y)

Randdichten:

Define $f(x,y)=\frac{1}{4}*(1+x*y*(x^2-y^2))$

done

$$f_x(x)=\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dy$$

$f_x(x)=\frac{1}{2}$

Rechteckdichte: $f_x(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1\le x\le 1\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$

$$f_y(y)=\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx$$

$f_y(y)=\frac{1}{2}$

Algeb Standard Reell 2π

Datei Edit Einfügen Aktion

$\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx \mid k=\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{8}$$

3D-Grafik

Berechnung der Kovarianz cov(X,Y)=E(X*Y)-E(X)*E(Y)

Randdichten:

Define $f(x,y)=\frac{1}{4}*(1+x*y*(x^2-y^2))$

done

$f_x(x)=\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dy$

$$f_x(x)=\frac{1}{2}$$

Rechteckdichte: $f_x(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1\le x\le 1\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$

$f_y(y)=\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx$

$$f_y(y)=\frac{1}{2}$$

Rechteckdichte: $f_y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1\le y\le 1\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$

Es gilt $f(x,y)\neq f_x(x)*f_y(y)=\frac{1}{4}$ für $|x|\le 1$, $|y|\le 1$

Damit sind X,Y stochastisch abhängig, aber unkorreliert:

E(X)=E(Y)=0 und

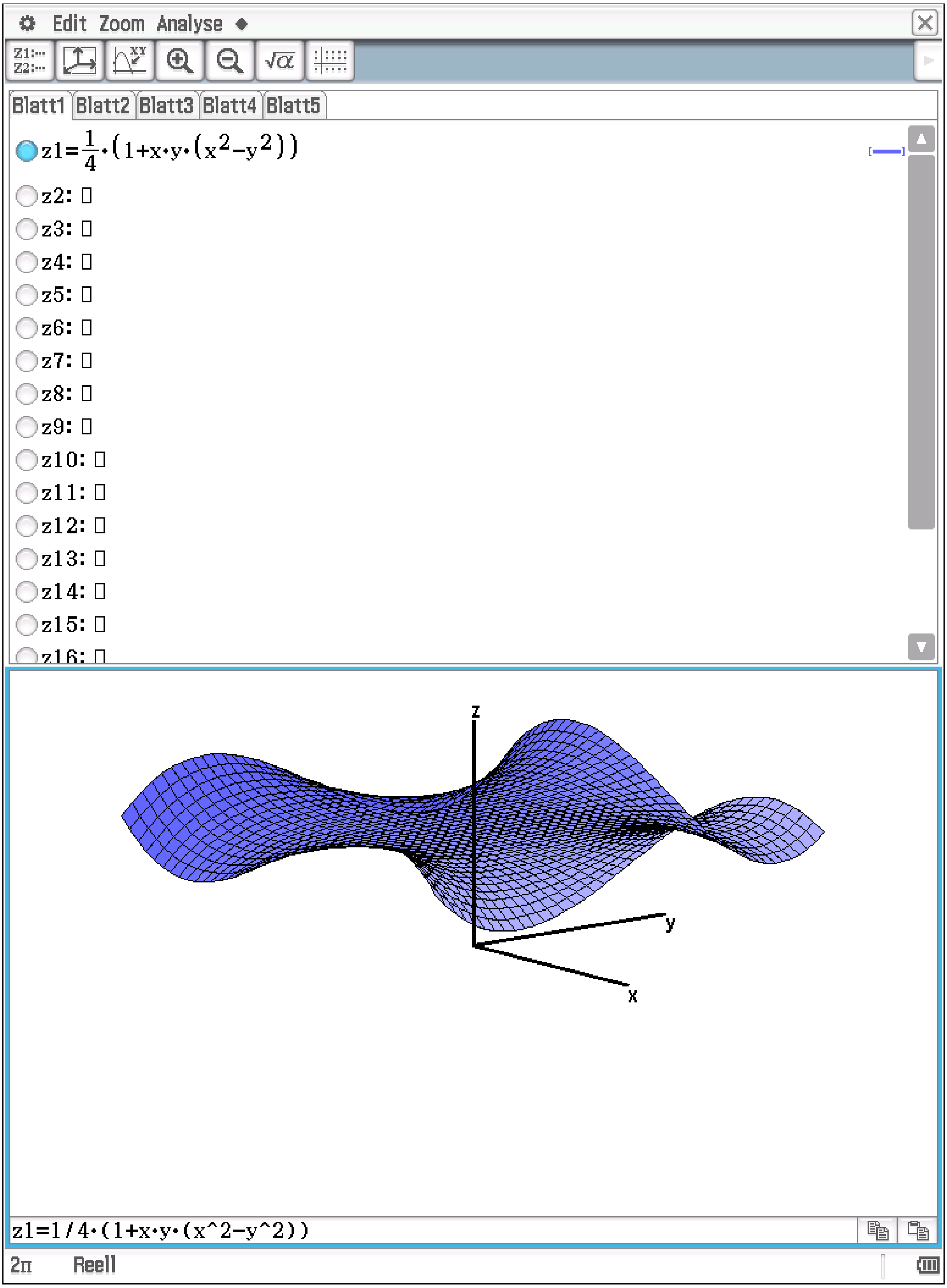
$E(X*Y)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x*y*f(x,y)\,dy\,dx$

$$E(X\cdot Y)=0$$

d.h. coy(X,Y)=0 und damit $\rho=0$.

(analog zu **WR 8.**6).

Algeb Standard Reell 2π


Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
z1=1/4·(1+x·y·(x^2−y^2))
z2:
z3:
z4:
z5:
z6:
z7:
z8:
z9:
z10:
z11:
z12:
z13:
z14:
z15:
z16:
z
y
x
z1=1/4·(1+x·y·(x^2−y^2))
2π Reell