Prof. Dr. L. Paditz, 25.05.2016

9. Übung: D2. 11-12 und **D1.** 1a-c, e-k
====================================

Ziel:
Kurven und Flächen im Raum darstellen
(geeignete Parameterdarstellungen)

D2. 11 (Raumkurve als Schraubenlinie auf Zylinderoberfläche)
R:=1000

1000

$\omega := \frac{1}{7}$

$\frac{1}{7}$

H:=400

400

$b := \frac{H}{6\pi}$

$\frac{200}{3 \cdot \pi}$

Raumkurve:
Define Xst1(s,t)=R*cos(ωt)

done

Define Yst1(s,t)=R*sin(ωt)

done

Define Zst1(s,t)=H-b*ωt

done

senkrechte Gerade (als Hilfslinie):

Define Xst2(s,t)=R

done

Define Yst2(s,t)=0

done

Define Zst2(s,t)=*s*

done

3D–Grafik	Z1:… Z2:…

Geschwindigkeitsvektor:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}(Xst1(s,t)) \\ \frac{d}{dt}(Yst1(s,t)) \\ \frac{d}{dt}(Zst1(s,t)) \end{bmatrix} \Rightarrow v$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-1000\cdot\sin\left(\frac{t}{7}\right)}{7} \\ \frac{1000\cdot\cos\left(\frac{t}{7}\right)}{7} \\ \frac{-200}{21\cdot\pi} \end{bmatrix}$$

v|t=42π

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1000}{7} \\ \frac{-200}{21\cdot\pi} \end{bmatrix}$$

approx(norm(ans))

142.8893047

approx(ans*3.6)

514.4014969

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt der Landung beträgt 514,4km/h (142,9m/s).

Der Aufsetzwinkel (Winkel des Geschwindigkeitsvektors zur x-y-Ebene) beträgt ca. 1,2°:

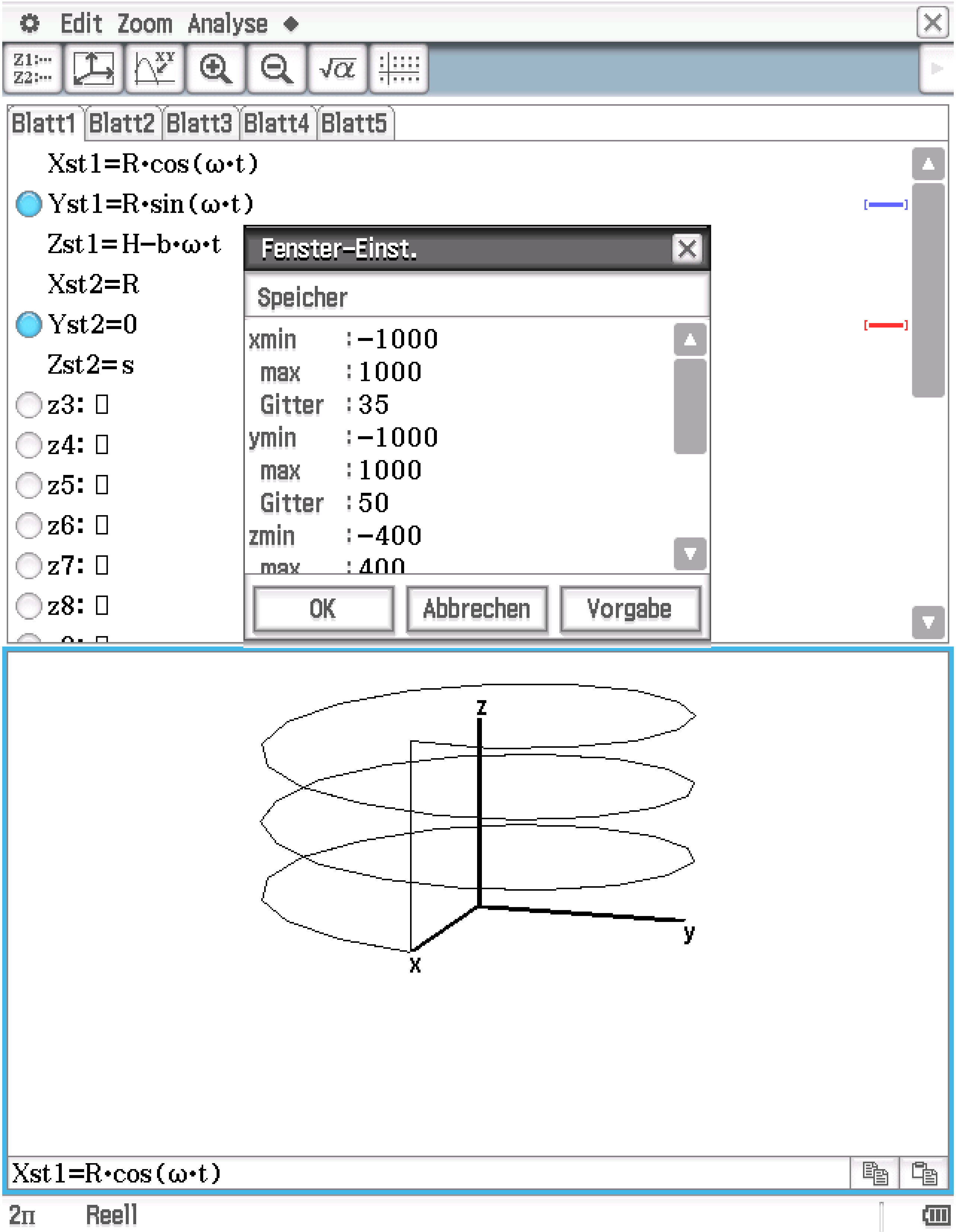
$\tan\left(\frac{v[3,1]}{v[2,1]}\right)|t=42\pi$

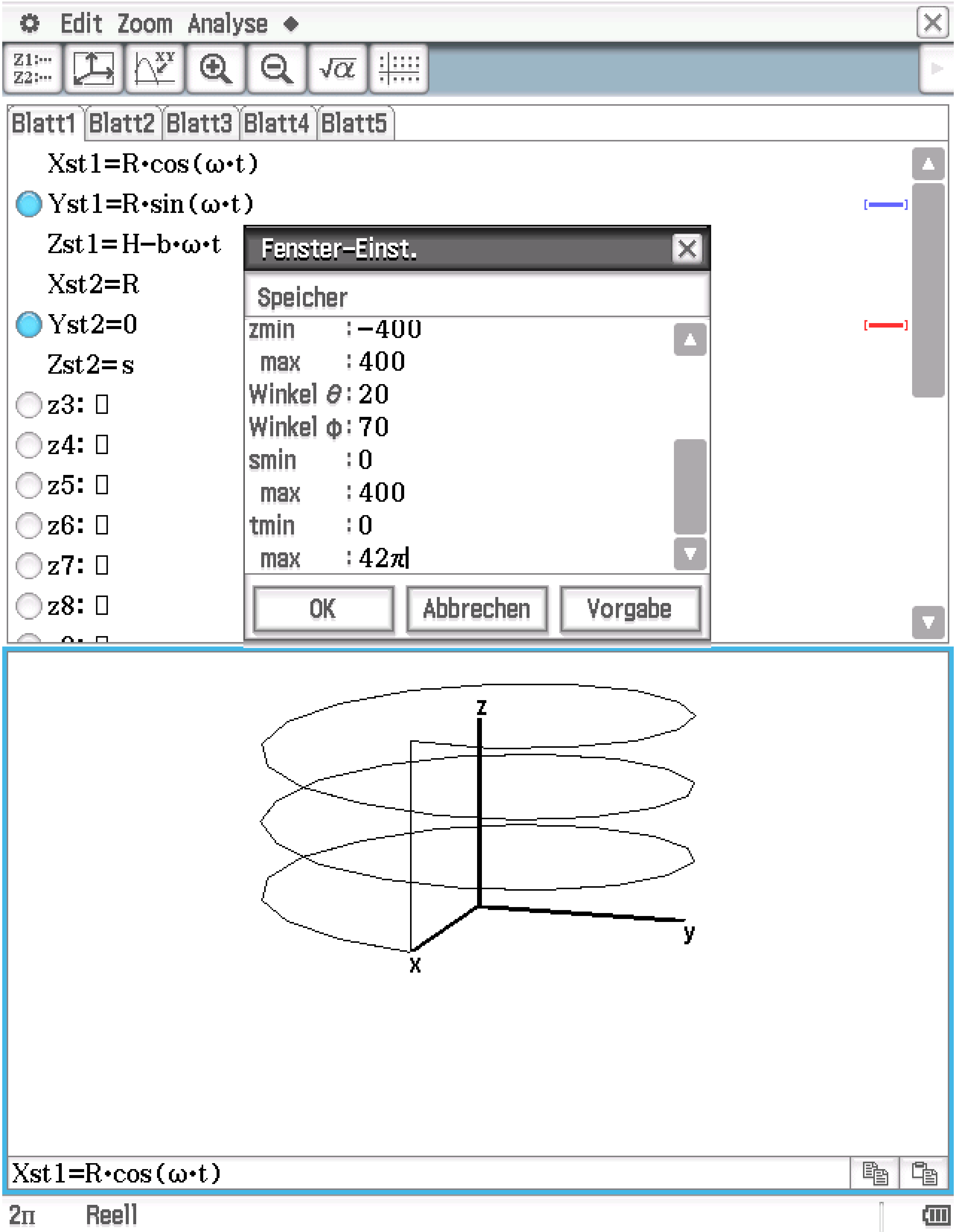
$-\tan\left(\frac{1}{15\cdot\pi}\right)$

$\text{approx}\left(\tan^{-1}(\text{ans})*\frac{180}{\pi}\right)$

-1.215854204

Vermutlich wird es eine harte Landung, die nicht zweckmäßig erscheint.


Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
Xst1=R•cos(ω•t)
Yst1=R•sin(ω•t)
Zst1=H−b•ω•t
Xst2=R
Yst2=0
Zst2=s
z3:
z4:
z5:
z6:
z7:
z8:
Fenster-Einst.
Speicher
xmin :−1000
max :1000
Gitter :35
ymin :−1000
max :1000
Gitter :50
zmin :−400
max :400
OK
Abbrechen
Vorgabe
z
y
x
Xst1=R•cos(ω•t)
2π
Reell


Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
Xst1=R•cos(ω•t)
Yst1=R•sin(ω•t)
Zst1=H−b•ω•t
Xst2=R
Yst2=0
Zst2=s
z3:
z4:
z5:
z6:
z7:
z8:
Fenster-Einst.
Speicher
zmin : −400
max : 400
Winkel θ : 20
Winkel φ : 70
smin : 0
max : 400
tmin : 0
max : 42π
OK
Abbrechen
Vorgabe
z
y
x
Xst1=R•cos(ω•t)
2π
Reell

D2. 12 (Kugeloberfläche)

a:=1

1

Define Xst1(s,t)=a*cos(s)*sin(t)

done

Define Yst1(s,t)=a*sin(s)*sin(t)

done

Define Zst1(s,t)=a*cos(t)

done

Statt u,v, werden die Standardparameter s,t genutzt.

3D−Grafik der Kugeloberfläche

a) Normalenvektor

DelVar a

done

$$\mathrm{crossP}\left(\begin{bmatrix}\frac{d}{ds}(\mathrm{Xst1}(s,t))\\ \frac{d}{ds}(\mathrm{Yst1}(s,t))\\ \frac{d}{ds}(\mathrm{Zst1}(s,t))\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{d}{dt}(\mathrm{Xst1}(s,t))\\ \frac{d}{dt}(\mathrm{Yst1}(s,t))\\ \frac{d}{dt}(\mathrm{Zst1}(s,t))\end{bmatrix}\right)\Rightarrow n$$

$$\begin{bmatrix}-a^2\cdot\cos(s)\cdot(\sin(t))^2\\ -a^2\cdot\sin(s)\cdot(\sin(t))^2\\ -a^2\cdot(\cos(s))^2\cdot\cos(t)\cdot\sin(t)-a^2\cdot(\sin(s))^2\cdot\cos(t)\cdot\sin(t)\end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} -a^2\cdot\cos(s)\cdot(\sin(t))^2 \\ -a^2\cdot\sin(s)\cdot(\sin(t))^2 \\ -a^2\cdot\cos(t)\cdot\sin(t) \end{bmatrix}$$

$$-a*\sin(t)*\begin{bmatrix} a*\cos(s)\cdot\sin(t) \\ a*\sin(s)\cdot\sin(t) \\ a*\cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -a^2\cdot\cos(s)\cdot(\sin(t))^2 \\ -a^2\cdot\sin(s)\cdot(\sin(t))^2 \\ -a^2\cdot\cos(t)\cdot\sin(t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\text{ans}}{\text{norm(ans)}}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{-a^2\cdot\cos(s)\cdot(\sin(t))^2}{\sqrt{a^4\cdot\left(\left((\cos(s))^2+(\sin(s))^2\right)\cdot(\sin(t))^2+(\cos(t))^2\right)\cdot(\sin(t)} \\ \dfrac{-a^2\cdot\sin(s)\cdot(\sin(t))^2}{\sqrt{a^4\cdot\left(\left((\cos(s))^2+(\sin(s))^2\right)\cdot(\sin(t))^2+(\cos(t))^2\right)\cdot(\sin(t)} \\ \dfrac{-a^2\cdot\cos(t)\cdot\sin(t)}{\sqrt{a^4\cdot\left(\left((\cos(s))^2+(\sin(s))^2\right)\cdot(\sin(t))^2+(\cos(t))^2\right)\cdot(\sin(t)} \end{bmatrix}$$

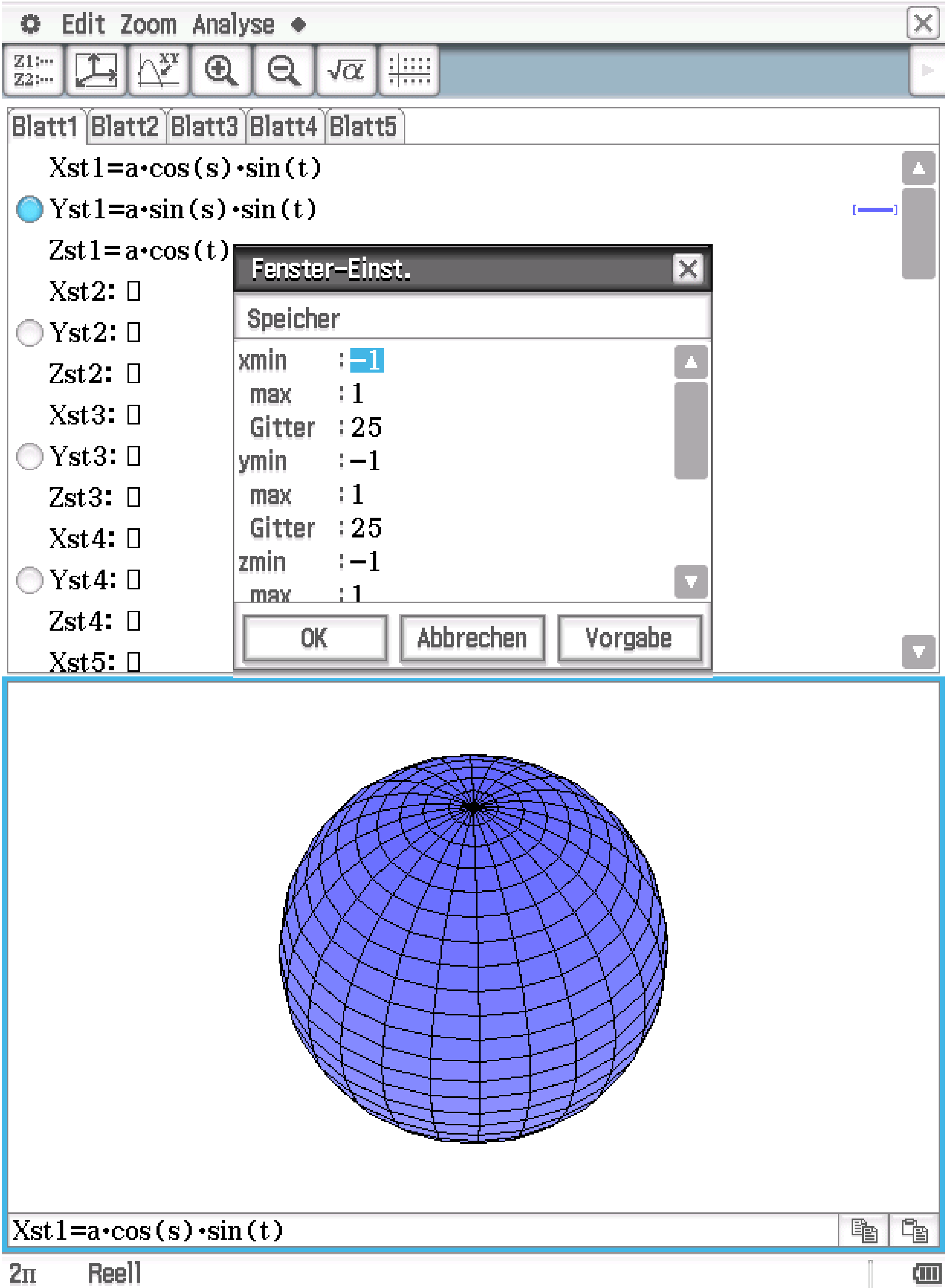
Mit $(\cos(s))^2+(\sin(s))^2=1$ und $(\sin(t))^2+(\cos(t))^2=1$ ergibt sich unschwer für $a>0$ und $\sin(t)>0$:

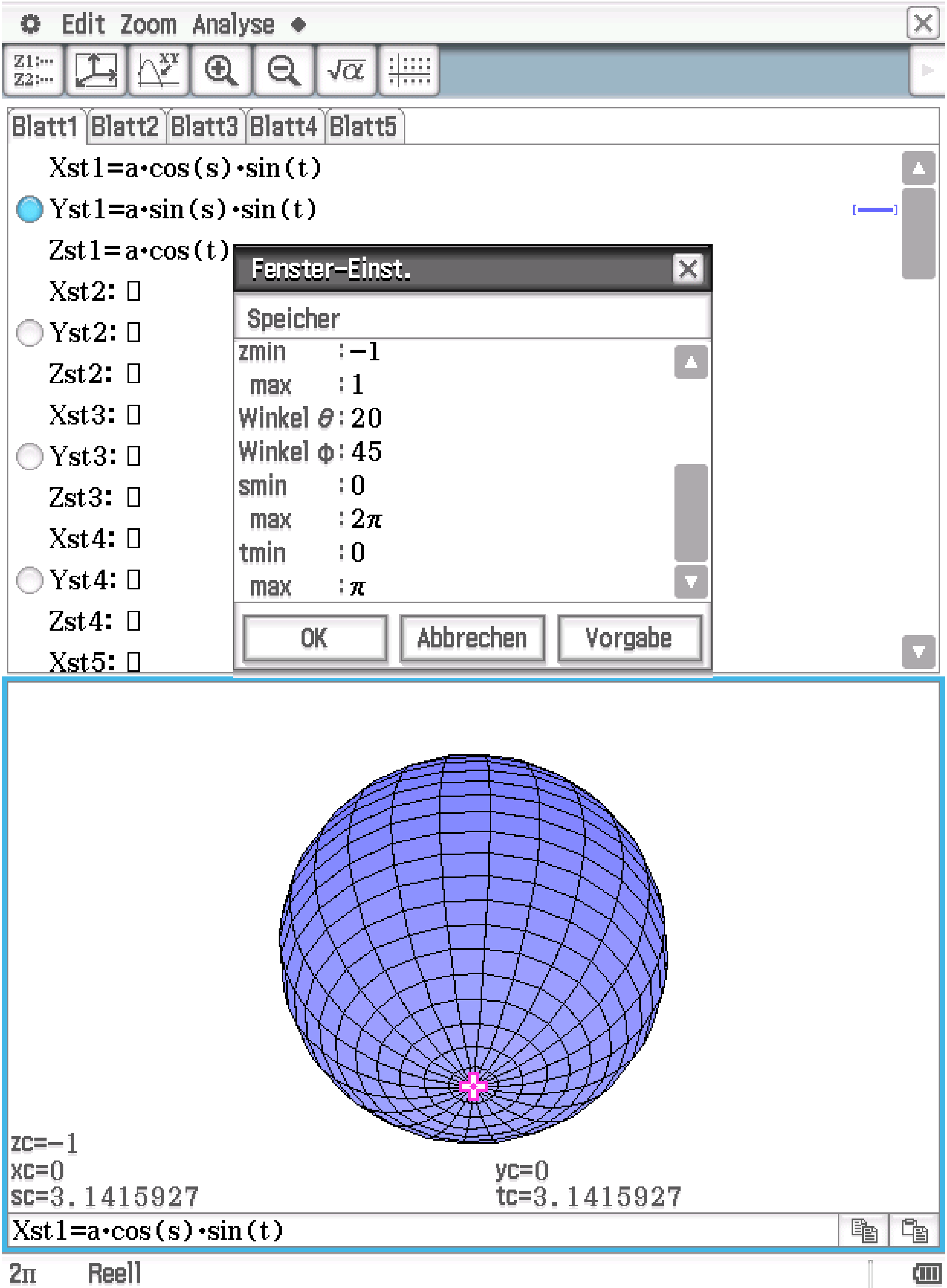
$$\begin{bmatrix} \dfrac{-a^2\cdot\cos(s)\cdot(\sin(t))^2}{\sqrt{a^4\cdot 1\cdot(\sin(t))^2}} \\ \dfrac{-a^2\cdot\sin(s)\cdot(\sin(t))^2}{\sqrt{a^4\cdot 1\cdot(\sin(t))^2}} \\ \dfrac{-a^2\cdot\cos(t)\cdot\sin(t)}{\sqrt{a^4\cdot 1\cdot(\sin(t))^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-\cos(s)\,(\sin(t))^2}{\sqrt{(\sin(t))^2}} \\ \dfrac{-\sin(s)\,(\sin(t))^2}{\sqrt{(\sin(t))^2}} \\ \dfrac{-\cos(t)\sin(t)}{\sqrt{(\sin(t))^2}} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \cos(s)\sin(t) \\ \sin(s)\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

b) Interpretation:

Normalenvektor n ist bis auf den (negativen) Faktor $-a*\sin(t)$, $a>0$, $0<t<\pi$, der Ortsvektor $r(s,t)$. Im Fall $a=1$ ist der Normaleneinheitsvektor gleich dem negativen Ortsvektor.
Der Ortsvektor zeigt auf die Kugeloberfläche, der Normalenvektor steht senkrecht darauf und zeigt zurück zum Koordinatenursprung, egal an welcher Stelle der Oberfläche man den Verktor n ansetzt.

c) wegen b) handelt es sich um eine Kugeloberfläche um den Koordinatenursprung.


Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
Xst1=a·cos(s)·sin(t)
Yst1=a·sin(s)·sin(t)
Zst1=a·cos(t)
Xst2:
Yst2:
Zst2:
Xst3:
Yst3:
Zst3:
Xst4:
Yst4:
Zst4:
Xst5:
Fenster-Einst.
Speicher
xmin :−1
max :1
Gitter :25
ymin :−1
max :1
Gitter :25
zmin :−1
max :1
OK
Abbrechen
Vorgabe
Xst1=a·cos(s)·sin(t)
2π
Reell


Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
Xst1=a·cos(s)·sin(t)
Yst1=a·sin(s)·sin(t)
Zst1=a·cos(t)
Xst2:
Yst2:
Zst2:
Xst3:
Yst3:
Zst3:
Xst4:
Yst4:
Zst4:
Xst5:
Fenster-Einst.
Speicher
zmin :−1
max :1
Winkel θ: 20
Winkel φ: 45
smin :0
max :2π
tmin :0
max :π
OK
Abbrechen
Vorgabe
zc=−1
xc=0
yc=0
sc=3.1415927
tc=3.1415927
Xst1=a·cos(s)·sin(t)
2π
Reell

D1.1a-f Ebenengleichungen in verschiedenen Lagen:

a) z=0 ist die x-y-Ebene

passende (elementare) Parameterdarstellung:

$$r(s,t)=\begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (s,t)\in\mathbf{R}^2,$$

b) z=4 Ebene parallel zu a) durch $P_0(0|0|4)$

passende (elementare) Parameterdarstellung:

$$r(s,t)=\begin{bmatrix} s \\ t \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}+s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (s,t)\in\mathbf{R}^2,$$

c) x+y+z=0 Ebene durch $P_0(0|0|0)$ mit Normalenvektor $n=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

passende (elementare) Parameterdarstellung:

$$r(s,t)=\begin{bmatrix} s \\ t \\ -s-t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (s,t)\in\mathbf{R}^2,$$

passende 3D-Grafiken:

Define Xst1(s,t)=s

done

Define Yst1(s,t)=t

done

Define Zst1(s,t)=0

done

Define Xst2(s,t)=s

done

Define Yst2(s,t)=t

done

Define Zst2(s,t)=4

done

Define Xst3(s,t)=s

done

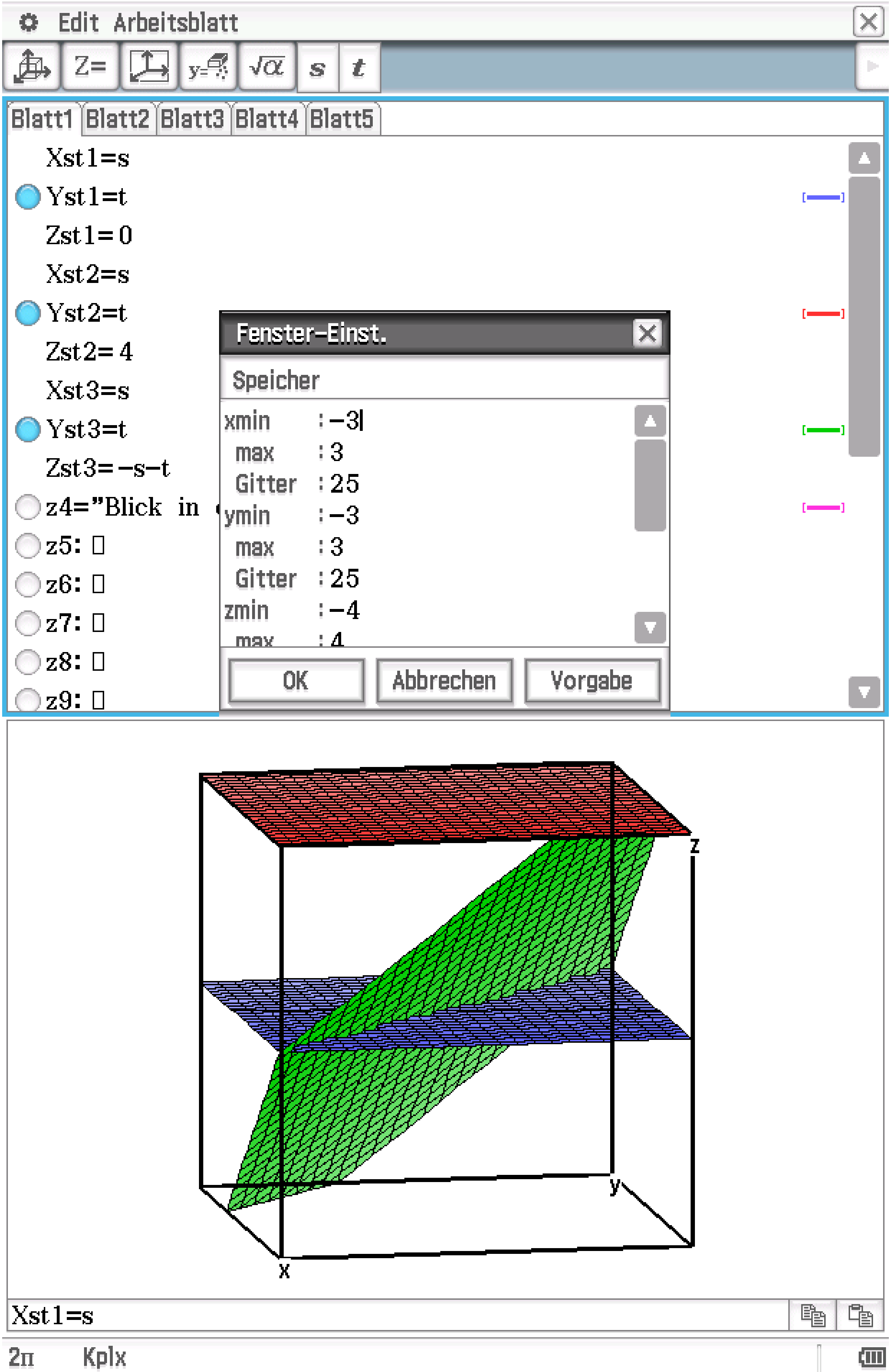
Define Yst3(s,t)=t

done

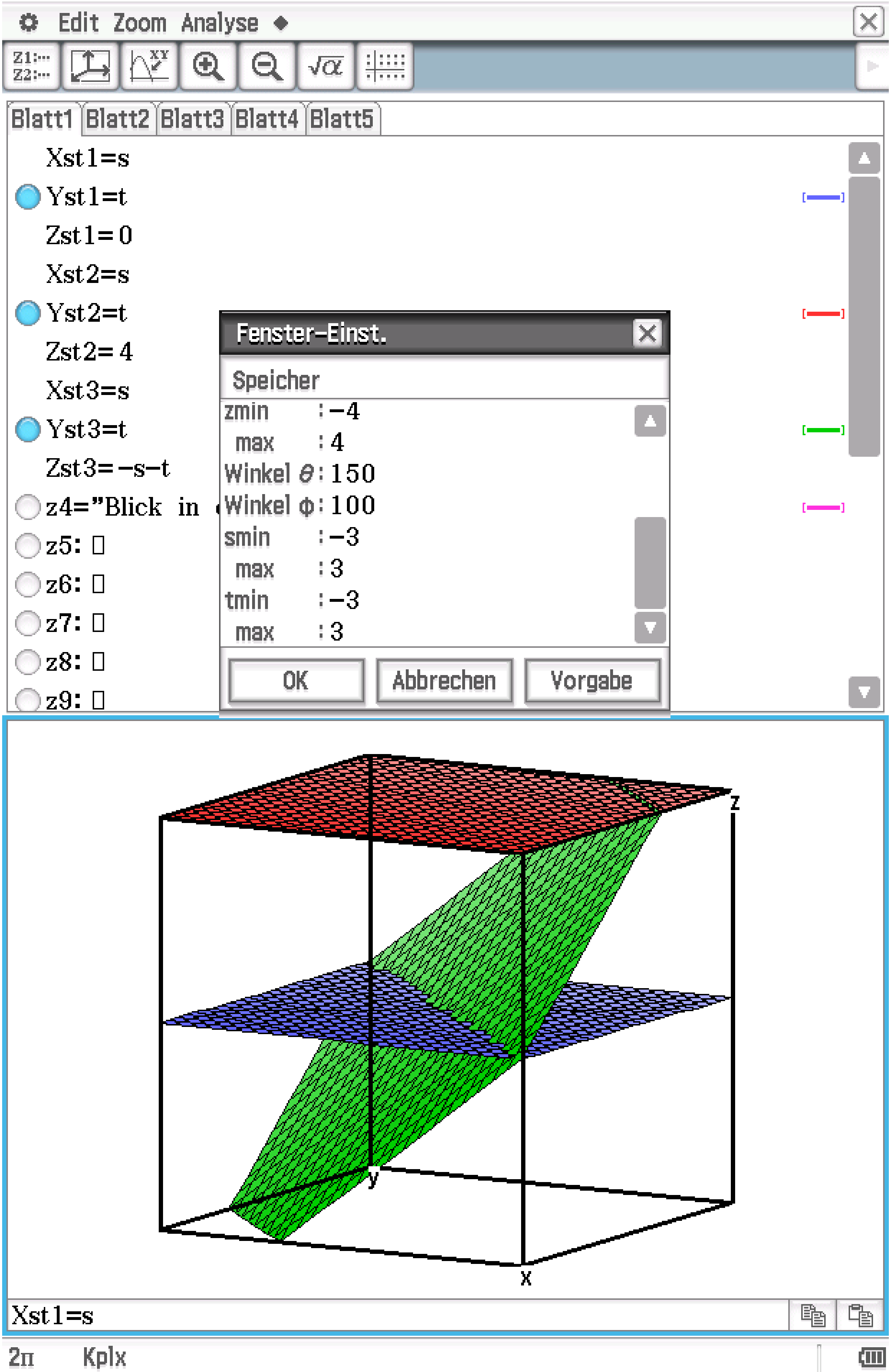
Define Zst3(s,t)=−s−t

done

drei Ebenen im Raum



Edit Arbeitsblatt
Z=
s
t
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
Xst1=s
Yst1=t
Zst1=0
Xst2=s
Yst2=t
Zst2=4
Xst3=s
Yst3=t
Zst3=−s−t
z4="Blick in
z5:
z6:
z7:
z8:
z9:
Fenster-Einst.
Speicher
xmin : −3
max : 3
Gitter : 25
ymin : −3
max : 3
Gitter : 25
zmin : −4
max : 4
OK
Abbrechen
Vorgabe
z
y
x
Xst1=s
2π
Kplx



Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
Xst1=s
Yst1=t
Zst1=0
Xst2=s
Yst2=t
Zst2=4
Xst3=s
Yst3=t
Zst3=−s−t
z4="Blick in
z5:
z6:
z7:
z8:
z9:
Fenster-Einst.
Speicher
zmin :−4
max :4
Winkel θ: 150
Winkel ϕ: 100
smin :−3
max :3
tmin :−3
max :3
OK
Abbrechen
Vorgabe
z
y
x
Xst1=s
2π
Kplx

d) $x+2y+z=6$ ist die geneigte Ebene mit den Achsenabschnitten $x=6\,(y=z=0)$, $y=3\,(x=z=0)$ und $z=6\,(x=y=0)$

passende (elementare) Parameterdarstellung:

$$r(s,t)=\begin{bmatrix} s \\ t \\ 6-s-2t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}+s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},\quad (s,t)\in\mathbf{R}^2,$$

Normalenvektor:

$$\mathrm{crossP}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e) $x=0$ ist die y-z-Ebene

passende (elementare) Parameterdarstellung:

$$r(s,t)=\begin{bmatrix} 0 \\ s \\ t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad (s,t)\in\mathbf{R}^2,$$

f) $x-y+2z=0$ Ebene durch $P_0(0|0|0)$ mit Normalenvektor

$$n=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

passende (elementare) Parameterdarstellung:

$$r(s,t)=\begin{bmatrix} s \\ t \\ (-s+t)/2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix},\quad (s,t)\in\mathbf{R}^2,$$

passende 3D-Grafiken:

Define Xst4(s,t)=s

done

Define Yst4(s,t)=t

done

Define Zst4(s,t)=6-s-2t

done

Define Xst5(s,t)=0

done

Define Yst5(s,t)=s

done

Define Zst5(s,t)=t

done

Define Xst6(s,t)=s

done

Define Yst6(s,t)=t

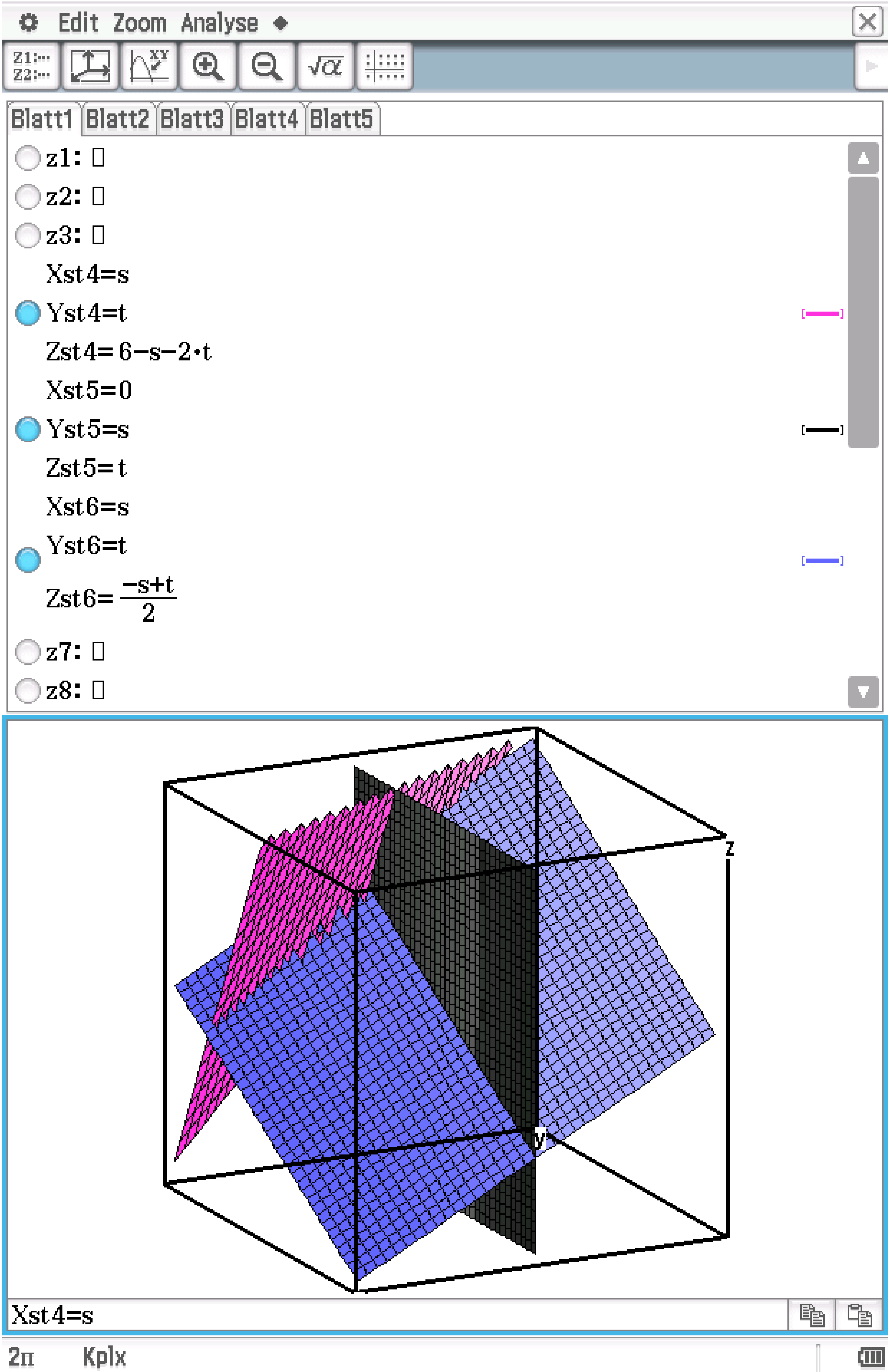
done

Define Zst6(s,t)=(-s+t)/2

done

drei Ebenen im Raum

Z1:…
Z2:…


Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
z1:
z2:
z3:
Xst4=s
Yst4=t
Zst4=6−s−2•t
Xst5=0
Yst5=s
Zst5=t
Xst6=s
Yst6=t
Zst6=(−s+t)/2
z7:
z8:
z
y
Xst4=s
2π
Kplx

g) Rotationsparaboloid bzgl. z-Achse

h) Kreiszylinderoberfläche mit Radius 2 um die z-Achse

i) obere Halbkugeloberfläche mit Radius 3

passende 3D-Grafiken:

Define $Xst7(s,t)=\sqrt{t}*\cos(s)$

done

Define $Yst7(s,t)=\sqrt{t}*\sin(s)$

done

Define Zst7(s,t)=t

done

Define Xst8(s,t)=2*cos(s)

done

Define Yst8(s,t)=2*sin(s)

done

Define Zst8(s,t)=t

done

Define Xst9(s,t)=3*cos(s)*sin(t)

done

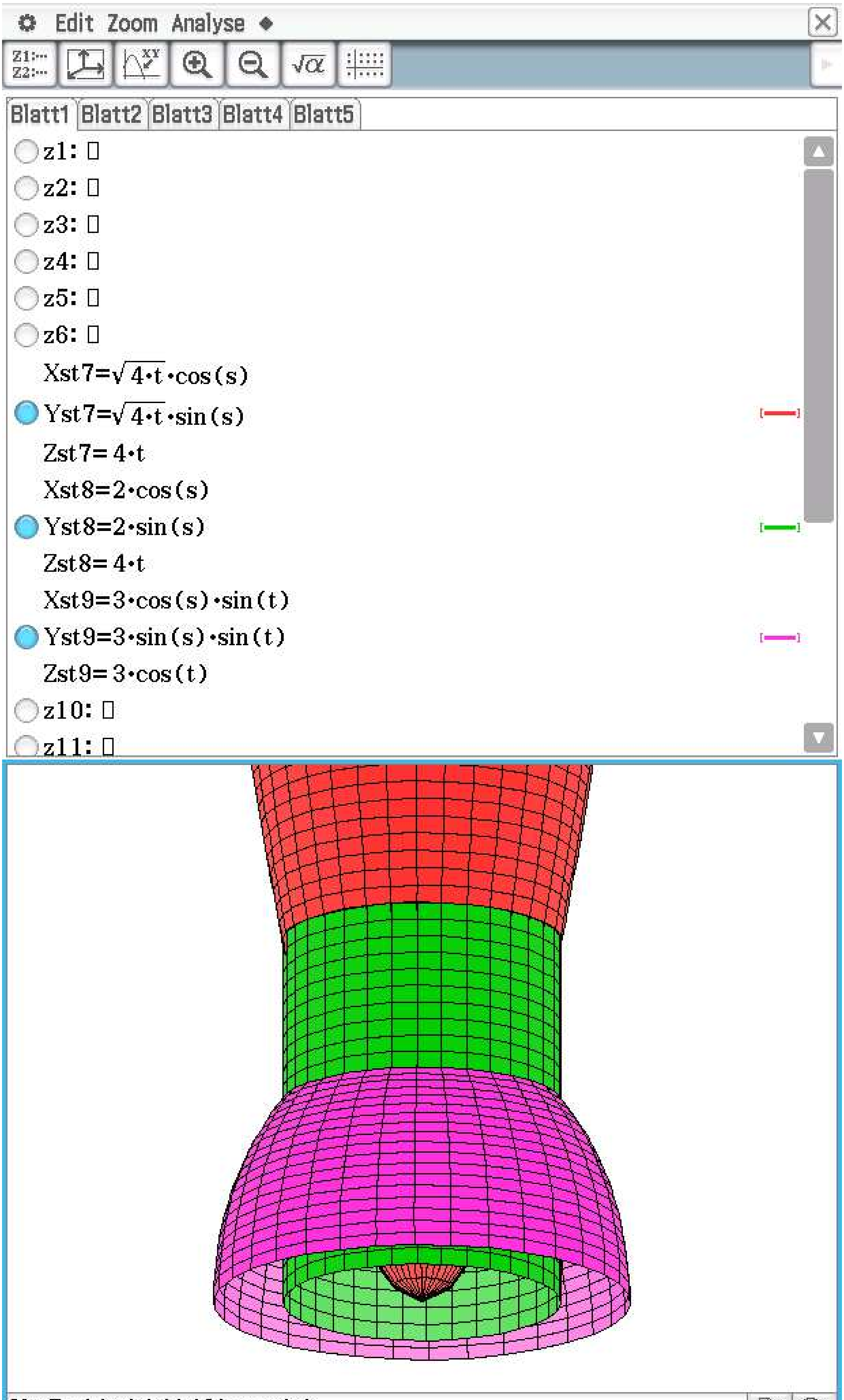
Define Yst9(s,t)=3*sin(s)*sin(t)

done

Define Zst9(s,t)=3*cos(t)

done

drei Fächen im Raum Z1:… Z2:…


Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
z1:
z2:
z3:
z4:
z5:
z6:
Xst7=√4·t·cos(s)
Yst7=√4·t·sin(s)
Zst7= 4·t
Xst8=2·cos(s)
Yst8=2·sin(s)
Zst8= 4·t
Xst9=3·cos(s)·sin(t)
Yst9=3·sin(s)·sin(t)
Zst9= 3·cos(t)
z10:
z11:

Edit Arbeitsblatt

Z= $\sqrt{\alpha}$ s t

Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5

z6: ▯

$Xst7=\sqrt{4\cdot t}\cdot\cos(s)$

$Yst7=\sqrt{4\cdot t}\cdot\sin(s)$

$Zst7=4\cdot t$

$Xst8=2\cdot\cos(s)$

$Yst8=2\cdot\sin(s)$

$Zst8=4\cdot t$

$Xst9=3\cdot\cos(s)\cdot\sin(t)$

$Yst9=3\cdot\sin(s)\cdot\sin(t)$

$Zst9=3\cdot\cos(t)$

z10: ▯

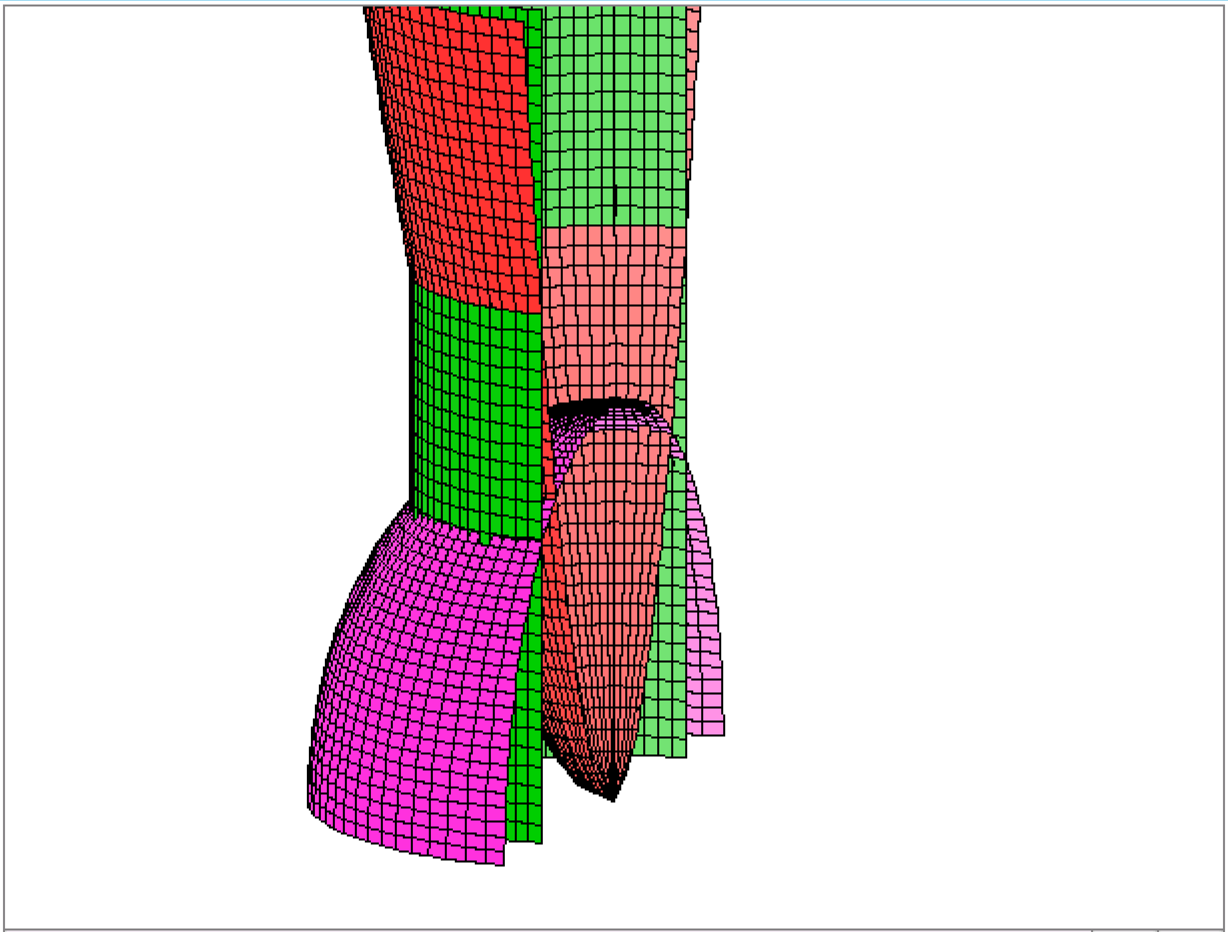
z11="Blick ins Innere"

z12: ▯

z13: ▯

z14: ▯

z15: ▯



j) Kugeloberfläche mit Radius $a>0$ (z.B. $a=3$)

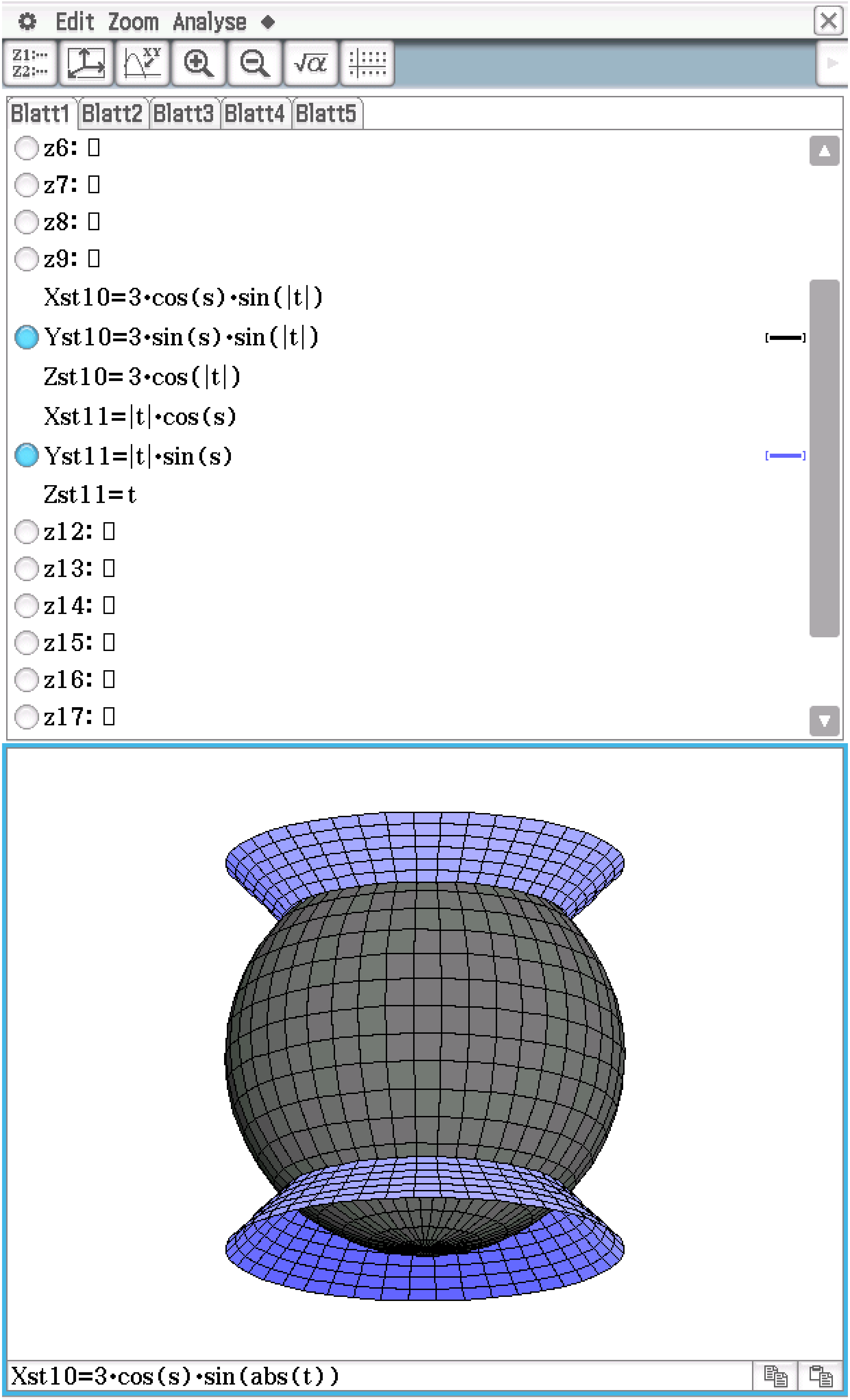
k) Doppelkegel bzgl. z-Achse mit Öffnungswinkel 90°

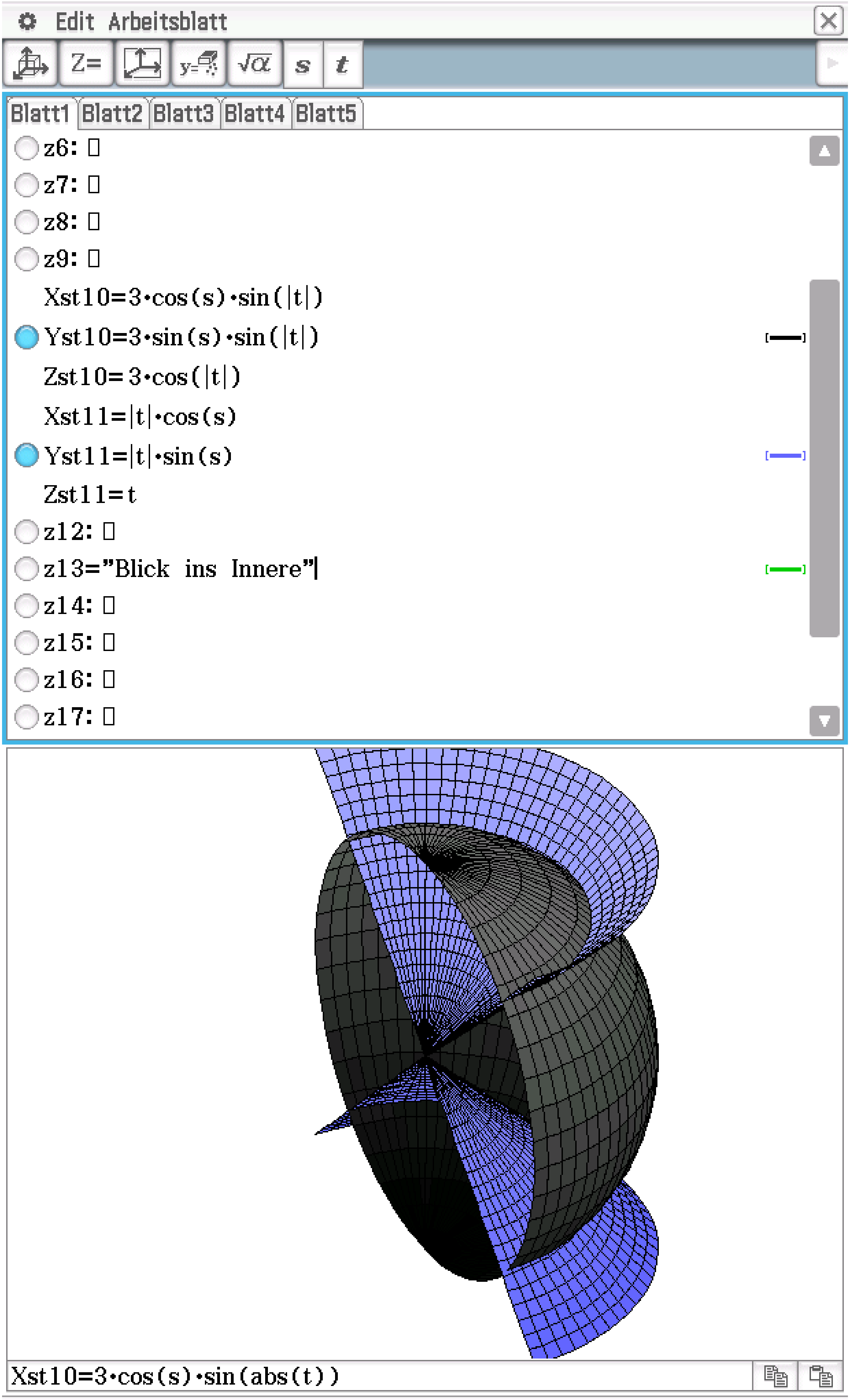
passende 3D-Grafiken:

```
Define Xst10(s,t)=3*cos(s)*sin(t)
                                        done
Define Yst10(s,t)=3*sin(s)*sin(t)
                                        done
Define Zst10(s,t)=3*cos(t)
                                        done
Define Xst11(s,t)=|t|*cos(s)
                                        done
Define Yst11(s,t)=|t|*sin(s)
                                        done
Define Zst11(s,t)=t
                                        done
```

zwei Flächen im Raum

Z1:…
Z2:…


Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
z6:
z7:
z8:
z9:
Xst10=3·cos(s)·sin(|t|)
Yst10=3·sin(s)·sin(|t|)
Zst10= 3·cos(|t|)
Xst11=|t|·cos(s)
Yst11=|t|·sin(s)
Zst11=t
z12:
z13:
z14:
z15:
z16:
z17:
Xst10=3·cos(s)·sin(abs(t))


Edit Arbeitsblatt
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
z6: □
z7: □
z8: □
z9: □
Xst10=3·cos(s)·sin(|t|)
Yst10=3·sin(s)·sin(|t|)
Zst10= 3·cos(|t|)
Xst11=|t|·cos(s)
Yst11=|t|·sin(s)
Zst11=t
z12: □
z13="Blick ins Innere"
z14: □
z15: □
z16: □
z17: □
Xst10=3·cos(s)·sin(abs(t))