SS2018 - 7. Übung - Prof. Paditz

Aufg. 6.1. 1, 8, 11, 19, 21a), 22a), 24b), 29, 30f)

Aufg. 6.1.1

Die Abkühlung eines Körpers in bewegter Luft ist proportional zu der Temperaturdifferenz zwischen der Temperatur des Körpers und der Temperatur der umgebenden Luft. Wir bezeichnen die Temperatur des Körpers zur Zeit t mit T=T(t), die Temperatur der umgebenden Luft mit TL. Leiten Sie daraus die folgende Differenzialgleichung des Abkühlungsprozesses her:

$$\frac{dT}{dt}=-a\cdot(T(t)-TL).$$

Lösung:

Die Abkühlung bedeutet Temperaturabnahme pro Zeit,

d.h.

$$\frac{\Delta T}{\Delta t}=\frac{T(t_2)-T(t_1)}{t_2-t_1}<0 \text{ für } t_2>t_1.$$

Damit ist die Geschwindigkeit der Temperaturveränderung negativ:

$T'(t)=\frac{dT}{dt}<0.$

Sei $a>0$ ein positiver Proportionalitätsfaktor.

Die Temperaturdifferenz $T(t)-TL$ ist ebenfalls positiv.

Dann ergibt sich nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetz

die Dgl.

$T'(t)=-a\cdot(T(t)-TL).$

(vgl. auch http://www.mathe.tu-freiberg.de

/~bernstei/HMI/mNewton.pdf)

Zusatz: Lösung der Dgl. als Anfangswertaufgabe.

Sei $T_0=T(0)$ die Anfangstemperatur und $t\geq 0$:

Lösung mit dem CAS:

$\mathrm{dSolve}(T'=-a\cdot(T-TL),t,T,t=0,T=T_0)$

$$\left\{T=-|TL-T_0|\cdot e^{-a\cdot t}+TL,\ T=|TL-T_0|\cdot e^{-a\cdot t}+TL\right\}$$

wegen $T_0\geq T(t)\geq TL$ folgt:

Define $T(t)=TL+(T_0-TL)\cdot e^{-a\cdot t}$

done

Probe:

Dgl.:

$\frac{d}{dt}(T(t))=-a\cdot(T(t)-TL)$

$$a\cdot(TL-T_0)\cdot e^{-a\cdot t}=a\cdot(TL-T_0)\cdot e^{-a\cdot t}$$

AB:

T(0)

$$T_0$$

z.B.: $T_0=100[°C]$, $TL=20[°C]$

$t\geq 0$ in Minuten,

Nach 10[min] Abkühlung von 100[°C] auf 60[°C]

$T_0:=100$

$$100$$

TL:=20

$$20$$

T(t)

$$80\cdot e^{-a\cdot t}+20$$

T(10)=60

$$80\cdot e^{-10\cdot a}+20=60$$

solve(ans, a)

$$\left\{a=\frac{\ln(2)}{10}\right\}$$

approx(ans)

$$\{a=0.06931471806\}$$

Aufg. 6.1.8

Bestimmen Sie die Lösung der exakten

Differenzialgleichung

$(2x+3\cos(y))dx+(2y-3x\cdot\sin(y))dy=0$ mit $y(0)=\pi/2$:

Lösung: Es handelt sich um eine Anfangswertaufgabe.

AB: $y(0)=\pi/2$

Lösung mit dem CAS:

dSolve((2x+3cos(y))+(2y−3x·sin(y))y'=0,x,y,x=0,y=

$$\left\{y^2+3\cdot x\cdot\cos(y)=-x^2+\frac{\pi^2}{4}\right\}$$

Die Lösung y=y(x) **in impliziter Darstellung** lautet:

$$y^2+3\cdot x\cdot\cos(y)=-x^2+\frac{\pi^2}{4}$$

Einzelschritte:

DelVar x,y

done

Define P(x,y)=2x+3cos(y)

done

Define Q(x,y)=2y−3x·sin(y)

done

$$\frac{d}{dy}(P(x,y))=\frac{d}{dx}(Q(x,y))$$

$$-3\cdot\sin(y)=-3\cdot\sin(y)$$

Damit liegt ein vollständiges Differenzial vor und es existiert eine Stammfunktion F(x,y). Die Lösung der Dgl. lautet F(x,y(x))=const.=c mit c=F(0,π/2).

Integration:

$$\int P(x,y)\,dx+C(y)$$

$$C(y)+x^2+3\cdot x\cdot\cos(y)$$

$$\frac{d}{dy}(ans)=Q(x,y)$$

$$\frac{d}{dy}(C(y))-3\cdot x\cdot\sin(y)=-3\cdot x\cdot\sin(y)+2\cdot y$$

Hieraus: $C'(y)=2y$

und $C(y)=y^2$.

Somit $F(x,y)=$

$y^2+x^2+3\cdot x\cdot\cos(y)=c$ (Lösung der Dgl.)

Define $F(x,y)=y^2+x^2+3\cdot x\cdot\cos(y)$

done

$c=F(0,\pi/2)$

$$c=\frac{\pi^2}{4}$$

Ergebnis:

$y^2+x^2+3\cdot x\cdot\cos(y)=\frac{\pi^2}{4}$ für $y=y(x)$

Dgl–Grafik mit Richtungsfeld

Euler–Verfahren

STAT–Editor

Tabellierung von rechtem$(x>0)$ und linken$(x<0)$

Kurvenast$(y>0)$

Daten nach Eulerverfahren als Tabellenkalkulation

generiert:

$$
\text{approx}(\begin{bmatrix}
0 & 1.570796327 & 0 \\
0.02687831582 & 1.570796327 & -0.14687831 \\
0.05375663165 & 1.570324289 & -0.29375663 \\
0.08063494747 & 1.569341588 & -0.44063494 \\
0.1075132633 & 1.56780472 & -0.58751326 \\
0.1343915791 & 1.565664434 & -0.73439157 \\
0.1612698949 & 1.562864653 & -0.88126989 \\
0.1881482108 & 1.559341141 & -1.02814821 \\
0.2150265266 & 1.555019804 & -1.17502652 \\
0.2419048424 & 1.549814539 & -1.32190484 \\
0.2687831582 & 1.54362445 & -1.46878315 \\
0.2956614741 & 1.536330205 & -1.61566147 \\
0.3225397899 & 1.527789191 & -1.76253979 \\
0.3494181057 & 1.517828962 & -1.90941810 \\
0.3762964215 & 1.506238199 & -2.05629642 \\
0.4031747374 & 1.492753957 & -2.20317473 \\
0.4300530532 & 1.477043209 & -2.35005305 \\
0.456931369 & 1.458675313 & -2.49693136 \\
0.4838096848 & 1.437079495 & -2.64380968 \\
0.5106880007 & 1.411476325 & -2.79068800 \\
0.5375663165 & 1.380761524 & -2.93756631 \\
0.5644446323 & 1.343295891 & -3.08444463 \\
0.5913229481 & 1.296493134 & -3.23132294 \\
0.618201264 & 1.235917874 & -3.37820126 \\
0.6450795798 & 1.152984094 & -3.52507958 \\
0.6719578956 & 1.027526584 & -3.67195789 \\
0.6988362114 & 0.7913366247 & -3.81883621
\end{bmatrix}
$$

0	1.570796327	0	1.5
0.02687831582	1.570796327	−0.1468783158	1.5
0.05375663165	1.570324289	−0.2937566316	1.5
0.08063494747	1.569341588	−0.4406349475	1.5
0.1075132633	1.56780472	−0.5875132633	1.5
0.1343915791	1.565664434	−0.7343915791	1.4
0.1612698949	1.562864653	−0.8812698949	1.4
0.1881482108	1.559341141	−1.028148211	1.4
0.2150265266	1.555019804	−1.175026527	1.3
0.2419048424	1.549814539	−1.321904842	1.3
0.2687831582	1.54362445	−1.468783158	1.2
0.2956614741	1.536330205	−1.615661474	1.2
0.3225397899	1.527789191	−1.76253979	1.1
0.3494181057	1.517828962	−1.909418106	1.1
0.3762964215	1.506238199	−2.056296422	1.0
0.4031747374	1.492753957	−2.203174737	1.0
0.4300530532	1.477043209	−2.350053053	0.9
0.456931369	1.458675313	−2.496931369	0.9
0.4838096848	1.437079495	−2.643809685	0.8
0.5106880007	1.411476325	−2.790688001	0.8
0.5375663165	1.380761524	−2.937566316	0.7
0.5644446323	1.343295891	−3.084444632	0.6
0.5913229481	1.296493134	−3.231322948	0.5
0.618201264	1.235917874	−3.378201264	0.4
0.6450795798	1.152984094	−3.52507958	0.3
0.6719578956	1.027526584	−3.671957896	0.2
0.6988362114	0.7913366247	−3.818836211	0.0

approx(matToList(Tabelle,1))→list1

{0,0.02687831582,0.05375663165,0.08063494747,

approx(matToList(Tabelle,2))→list2

{1.570796327,1.570796327,1.570324289,1.569341

approx(matToList(Tabelle,3))→list3

{0,−0.1468783158,−0.2937566316,−0.4406349475,

approx(matToList(Tabelle,4))→list4

$\{1.570796327, 1.570796327, 1.558751732, 1.538498$

Parameterdarstellung der Lösung:

$x^2+3\cdot\cos(y)\cdot x+y^2-\frac{\pi^2}{4}=0$ ergibt mit $y(t)=t$:

$\text{solve}(x^2+3\cdot\cos(y)\cdot x+y^2-\frac{\pi^2}{4}=0, x)$

$$\left\{x=\frac{-\left(3\cdot\cos(y)-\sqrt{9\cdot(\cos(y))^2-4\cdot y^2+\pi^2}\right)}{2}, x=\frac{-\left(3\cdot\cos(y\right.}{}\right.$$

rechter Kurvenast:

$\text{Define } xt1(t)=-\frac{3}{2}\cos(t)+\frac{1}{2}\sqrt{9(\cos(t))^2-4t^2+\pi^2}$

done

$\text{Define } yt1(t)=t$

done

maximaler x-Wert (bei y=0)

$xt1(0)$

$$\frac{\sqrt{\pi^2+9}}{2}-\frac{3}{2}$$

approx(ans)

0.6719578956

linker Kurvenast:

$\text{Define } xt2(t)=-\frac{3}{2}\cos(t)-\frac{1}{2}\sqrt{9(\cos(t))^2-4t^2+\pi^2}$

done

$\text{Define } yt2(t)=t$

done

minimaler x-Wert (bei y=0)

$xt2(0)$

$$\frac{-\sqrt{\pi^2+9}}{2}-\frac{3}{2}$$

approx(ans)

$$-3.671957896$$

solve$(9(\cos(t))^2-4t^2+\pi^2=0,t)$

$$\{t=-1.570796327, t=1.570796327\}$$

approx$(\pi/2)$

$$1.570796327$$

Parameterbereich $-\pi/2\le t\le\pi/2$,

d.h. $-\pi/2\le y\le\pi/2$

(alternativ Extremwertberechnung:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+3\cdot\cos(y)\cdot x+y^2-\frac{\pi^2}{4}=0\right)=$$

$2x-3\sin(y)y'+2yy'=0 \mid y'=0$

somit $x=0$ und

$x^2+3\cdot\cos(y)\cdot x+y^2-\frac{\pi^2}{4}=0 \mid x=0$

$y^2-\frac{\pi^2}{4}=0$, d.h. $y=\pm\pi/2$)

2D-Grafik Y1:… Y2:…

Hinweis: numerische Lösung der Dgl. mit dem Euler-Verfahren oder Runge-Kutta-Verfahren

https://de.wikipedia.org/wiki/Explizites_Euler-Verfahren

https://de.wikipedia.org/wiki/Klassisches_Runge-Kutta-V

stop

Aufg. 6.1.11

Durch die Differenzialgleichung 1. Ordnung $m\frac{dv}{dt}+kv=mg$ wird die Sinkgeschwindigkeit v eines Teilchens der Masse m in einer Flüssigkeit beschrieben (k: Reibungsfaktor; g: Erdbeschleunigung).

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung v=v(t) durch Trennung der Variablen.

b) Wie lautet die spezielle Lösung für den Anfangswert $v(0)=v_0$?

c) Welche Geschwindigkeit v_max kann das Teilchen maximal erreichen?

Lösung:

a) inhom. lin. Dgl. 1.Ordn. mit konst. Koeff.

dSolve(m·v'+k·v=m·g, t, v)

$$\left\{v=\frac{-\left(\left(e^{-m^{-1}\cdot t+const(1)}\right)^{k}-g\cdot m\right)}{k}, v=\frac{\left(e^{-m^{-1}\cdot t+const}\right.}{k}\right.$$

Ergebnis:

$$v(t)=\frac{\pm\left(e^{-m^{-1}\cdot t+const(1)}\right)^{k}}{k}+\frac{g\cdot m}{k}$$

$$=\frac{\pm 1}{k}e^{k\cdot const(1)}\cdot e^{-k\cdot t/m}+\frac{g\cdot m}{k}$$

$$=C\cdot e^{-k\cdot t/m}+\frac{g\cdot m}{k} \text{ mit } C\in\mathbf{R}.$$

$C=\frac{\pm 1}{k}e^{k\cdot const(1)}$ oder $C=0$

TdV:

$$m\frac{dv}{dt}+kv=mg$$

$$\int_{\square}^{\square} \frac{m}{m \cdot g - k \cdot v} dv = \int_{\square}^{\square} 1 dt + c$$

$$\frac{-m \cdot \ln(|g \cdot m - k \cdot v|)}{k} = c + t$$

solve(ans, v)

$$\left\{ v = \frac{-e^{-c \cdot k \cdot m^{-1} - k \cdot m^{-1} \cdot t}}{k} + \frac{g \cdot m}{k}, v = \frac{e^{-c \cdot k \cdot m^{-1} - k \cdot m^{-1} \cdot t}}{k} \cdot \right.$$

$$v(t) = C \cdot e^{-k \cdot t/m} + \frac{g \cdot m}{k}$$

b)

Define $v(t) = C \cdot e^{-k \cdot t/m} + \frac{g \cdot m}{k}$

done

$v(0) = v_0$

$$C + \frac{g \cdot m}{k} = v_0$$

solve(ans, C)

$$\left\{ C = \frac{-g \cdot m}{k} + v_0 \right\}$$

Ergebnis:

$v(t) \mid C = \frac{-g \cdot m}{k} + v_0$

$$-\left(\frac{g \cdot m}{k} - v_0\right) \cdot e^{-k \cdot m^{-1} \cdot t} + \frac{g \cdot m}{k}$$

Define $v(t) = \frac{g \cdot m}{k} - \left(\frac{g \cdot m}{k} - v_0\right) \cdot e^{-k \cdot t/m}$

done

c) v(t) ist streng monoton wachsend bzw. fallend.

Es sind $m>0, g>0$ und $k>0$.

Fall 1: $\frac{g\cdot m}{k}-v_0>0 \Rightarrow v(t)$ streng mon. wachsend

$\lim_{t\to\infty}(v(t)|\{m>0,k>0\})$

$$\frac{g\cdot m}{k}$$

Fall 2: $\frac{g\cdot m}{k}-v_0<0 \Rightarrow v(t)$ streng mon. fallend

$v(0)$

$$v_0$$

$v\_max=max(v(\infty),v(0))=max(\frac{g\cdot m}{k},v_0)$

alternativ: Laplacetransformation

DelVar m,k,g,v,t,s

done

$laplace(m\cdot v'+k\cdot v=m\cdot g,t,v,s)|v(0)=v_0$

$$m\cdot(Lp\cdot s-v_0)+Lp\cdot k=\frac{g\cdot m}{s}$$

solve(ans,Lp)

$$\left\{Lp=\frac{m\cdot(s\cdot v_0+g)}{s\cdot(m\cdot s+k)}\right\}$$

expand(ans,s)

$$\left\{Lp=\frac{-(g\cdot m^2-k\cdot m\cdot v_0)}{k\cdot(m\cdot s+k)}+\frac{g\cdot m}{k\cdot s}\right\}$$

$v=\mathcal{L}_s^{-1}\left(\frac{-(g\cdot m^2-k\cdot m\cdot v_0)}{k\cdot(m\cdot s+k)}\right)[t]+\mathcal{L}_s^{-1}\left(\frac{g\cdot m}{k\cdot s}\right)[t]$

$$v=\frac{-g\cdot m\cdot e^{-k\cdot m^{-1}\cdot t}}{k}+v_0\cdot e^{-k\cdot m^{-1}\cdot t}+\frac{g\cdot m}{k}$$

d.h. $v(t)=\frac{g\cdot m}{k}-\left(\frac{g\cdot m}{k}-v_0\right)\cdot e^{-k\cdot t/m}$

stop

Aufg. 6.1.19

Das menschliche Lernen bzw. Vergessen läßt sich durch ein Modell beschreiben, aus dem sich die folgende Diffenzialgleichung ergibt: $p'(t)=-\lambda(p(t)-a)$.
Dabei bezeichnen $p(t)$ den Wissensstand zum Zeitpunkt $t\geq 0$, λ und a vom jeweiligen Individuum abhängige Konstanten ($\lambda>0$ charakterisiert die Schnelligkeit des Lernens bzw. Vergessens, $a\in(0,100)$[%] das maximal aufnehmbare Wissens beim Lernen bzw. das Wissen, das nie vergessen wird).
Entsprechend lautet die Anfangsbedingung beim Lernen: $p(0)=0$ bzw. beim Vergessen: $p(0)=100$[%].
Lösen Sie die beiden Anfangswertprobleme, skizzieren Sie die Lösungskurven und interpretieren Sie den Kurvenverlauf!

Lösung: (TdV)

inhom. lin. Dgl. 1.Ordn. mit konst. Koeff.

dSolve(p'=−λ•(p−a),t,p)

$$\{p=e^{-t\cdot\lambda}\cdot \mathrm{const}(1)+a\}$$

allgem. Lösung der Dgl.:

$p(t)=C\cdot e^{-t\cdot\lambda}+a,\ C\in\mathbb{R}$.

Der Lernprozeß: AB $p(0)=0$

dSolve(p'=−λ•(p−a),t,p,t=0,p=0)|a>0

$$\{p=-a\cdot e^{-t\cdot\lambda}+a,\ p=a\cdot e^{-t\cdot\lambda}+a\}$$

Scheinlösung: $p=a\cdot e^{-t\cdot\lambda}+a>a>0$ entfällt.

Lösung (Lernprozeß):

$p(t)=a-a\cdot e^{-t\cdot\lambda}=a\cdot(1-e^{-t\cdot\lambda}),\ t\geq 0.$

a ... maximal aufnehmbare Wissen (z.B. a=90[%])

Lernkurve

https://de.wikipedia.org/wiki/Lernkurve

Der Prozeß des Vergessens: AB p(0)=100

$\mathrm{dSolve}(p'=-\lambda\cdot(p-a),t,p,t=0,p=100)\,|\,a<100$

$$\{p=(a-100)\cdot e^{-t\cdot\lambda}+a,\ p=-(a-100)\cdot e^{-t\cdot\lambda}+a\}$$

Scheinlösung: $(a-100)\cdot e^{-t\cdot\lambda}+a=-(100-a)\cdot e^{-t\cdot\lambda}+a<a$

Lösung (Prozeß des Vergessens):

$p(t)=(100-a)\cdot e^{-t\cdot\lambda}+a,\ t\geq 0.$

a ... Wissen, das nie vergessen wird (z.B. a=10[%])

Vergessenskurve

https://de.wikipedia.org/wiki/Vergessenskurve

Aufg. 6.1.21a)

Lösen Sie die folgende Differenzialgleichung 1. Ordnung:

$x^2\cdot y'=y^2.$

Lösung:

nichtlineare Dgl. $y'=\left(\frac{y}{x}\right)^2$ mit $y'>0$ für $y=y(x)$.

$\mathrm{dSolve}(x^2\cdot y'=y^2,x,y)$

$$\left\{y=\frac{x}{x\cdot\text{const}(1)+1}\right\}$$

Lösung $x\neq -1/C$, $C\in\mathbb{R}$,

$y(x)=\frac{x}{C\cdot x+1}=\frac{1}{C+1/x}$, für $x\neq 0$,

Dgl-Grafik

Probe:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{C\cdot x+1}\right)>0$$

$$\frac{1}{(C\cdot x+1)^2}>0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{C+1/x}\right)>0$$

$$\frac{1}{(C\cdot x+1)^2}>0$$

Lösung per Hand: TdV $dy/y^2=dx/x^2$

$$\int\frac{1}{y^2}dy=\int\frac{1}{x^2}dx-C$$

$$\frac{-1}{y}=-C-\frac{1}{x}$$

solve(ans, y)

$$\left\{y=\frac{x}{C\cdot x+1}\right\}$$

alternativ: Ähnlichkeitsdifferenzialgleichung

vgl. auch Riccati-Dgl. mit der part. Lös. y=x

https://de.wikipedia.org/wiki/Riccatische_Differentialglei

Aufg. 6.1.22a)

Lösen Sie die Differenzialgleichung 1. Ordnung y'+2y=cos(x) durch Variation der Konstanten. Wie lautet die spezielle Lösung mit der Anfangsbedingung y(π)=1?

Lösung:

inhom. lin. Dgl. 1.Ordn. mit konst. Koeff.

dSolve(y'+2y=cos(x), x, y, x=π, y=1)

$$\left\{y=\frac{7\cdot e^{-2\cdot x+2\cdot \pi}}{5}+\frac{2\cdot\cos(x)}{5}+\frac{\sin(x)}{5}\right\}$$

homogene Dgl.:

dSolve(y'+2y=0, x, y)

$$\{y=e^{-2\cdot x}\cdot \mathrm{const}(1)\}$$

VdK für y'+2y=cos(x)

Define $y(x)=C(x)\cdot e^{-2\cdot x}$

done

$$\frac{d}{dx}(y(x))$$

$$\left(\frac{d}{dx}(C(x))-2\cdot C(x)\right)\cdot e^{-2\cdot x}$$

ans+2y(x)=cos(x)

$$\left(\frac{d}{dx}(C(x))-2\cdot C(x)\right)\cdot e^{-2\cdot x}+2\cdot e^{-2\cdot x}\cdot C(x)=\cos(x)$$

simplify(ans)

$$\frac{d}{dx}(C(x))\cdot e^{-2\cdot x}=\cos(x)$$

$C'(x)=\cos(x)\cdot e^{2\cdot x}$

$$\int_{\square}^{\square}\cos(x)\cdot e^{2\cdot x}dx$$

$$\frac{2\cdot\cos(x)\cdot e^{2\cdot x}+\sin(x)\cdot e^{2\cdot x}}{5}$$

allgem. Lösung der inhom. Dgl.:

$y(x)=C\cdot e^{-2\cdot x}+\frac{2\cdot\cos(x)\cdot e^{2\cdot x}+\sin(x)\cdot e^{2\cdot x}}{5}\cdot e^{-2\cdot x}$, d. h.

$y(x)=C\cdot e^{-2\cdot x}+\frac{2\cdot\cos(x)+\sin(x)}{5}$.

AB:

$C\cdot e^{-2\cdot x}+\frac{2\cdot\cos(x)+\sin(x)}{5}=1\,|\,x=\pi$

$$C\cdot e^{-2\cdot\pi}-\frac{2}{5}=1$$

solve(ans, C)

$$\left\{C=\frac{7\cdot e^{2\cdot\pi}}{5}\right\}$$

Ergebnis:

$y(x)=\frac{7\cdot e^{2\cdot\pi}}{5}\cdot e^{-2\cdot x}+\frac{2\cdot\cos(x)+\sin(x)}{5}$, d. h.

$y(x)=\frac{1}{5}\left(e^{2\cdot\pi-2\cdot x}+2\cdot\cos(x)+\sin(x)\right)$

Aufg. 6.1.24b)

Lösen Sie die folgende Differenzialgleichung 1. Ordnung

mit Hilfe einer geeigneten Substitution: $y'=\sin\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}$.

Lösung: nichtlin. Dgl. 1. Ordnung

(Ähnlichkeitsdifferentialgleichung)

$\text{dSolve}\left(y'=\sin\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}, x, y\right)\,|\,x>0$

$\{y=-2\cdot x\cdot \tan^{-1}(x\cdot e^{const(1)})+2\cdot x\cdot \pi\cdot constn(1), y=2\cdot x\cdot \tan^{-}$ ▶

$dSolve(y'=\sin\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}, x, y) | x<0$

$\{y=-2\cdot x\cdot \tan^{-1}(x\cdot e^{const(1)})+2\cdot x\cdot \pi\cdot constn(1), y=2\cdot x\cdot \tan^{-}$ ▶

$y(x)=2\cdot x\cdot \arctan(x\cdot C)+2\cdot x\cdot \pi\cdot k, C=\pm e^{C}$ oder $C=0$,

$k=0, \pm 1, \pm 2, ...$

d. h.

$y(x)=2x\cdot(\arctan(x\cdot C)+k\cdot\pi)$, $C\in\mathbf{R}$, $k\in\mathbf{Z}$.

per Hand: Subst. z(x)=y(x)/x

bzw. y(x)=x*z(x)

y'=z+x*z'

in Dgl. eingesetzt:

z+x*z'=sin(z)+z, d. h.

x*z'=sin(z), TdV (z≠0, d. h. y≠0)

$$\int \frac{1}{\sin(z)}dz=\int \frac{1}{x}dx+c$$

$$\ln\left(\left|\tan\left(\frac{z}{2}\right)\right|\right)=\ln(|x|)+c$$

e^{ans}

$$\left|\tan\left(\frac{z}{2}\right)\right|=|x|\cdot e^{c}$$

$\tan\left(\frac{z}{2}\right)=\pm x\cdot e^{c}=C\cdot x$, $C=\pm e^{c}\neq 0$,

Umkehrfunktion und Periodizität $k\cdot\pi$ der tan-Fkt.

beachten

$\frac{z}{2}=\arctan(C\cdot x)+k\cdot\pi=\frac{y}{2x}$

$y=2x\cdot(\arctan(C\cdot x)+k\cdot\pi)$ (reguläre Lösung) speziell C=0: $y=x\cdot 2k\pi$

Fall y=const.=0 ergibt die singuläre Lösung (C=0, k=0)

Aufg. 6.1.29

Ein Körper der Masse m fällt mit der Anfangsgeschwindigkeit $v(0)=0$ aus der Ruhelage $x(0)=0$ in einem Medium, dessen Reibungswiderstand proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit x' ist.

a) Lösen Sie die zugehörige Newtonsche Bewegungsgleichung $m\cdot x''=m\cdot g-\beta\cdot (x')^2$ (Dgl. des Sinkvorganges, z.B. auch Fallschirmspringen).

(Achtung: Druckfehler im Lösungsheft)

Hinweis: Leiten Sie zunächst eine Differenzialgleichung mit der Geschwindigkeit $v(t)=x'(t)$ her (Sedimentationsgeschwindigkeit, Sinkgeschwindigkeit, **Riccati**-Dgl.).

b) Diskutieren Sie für große Zeiten t den Ort x(t) und die Geschwindigkeit v(t).

c) Nach welcher Zeit τ hat der Körper die Höhe h durchfallen?

Fall mit Luftwiderstand: Newton-Reibung, vgl.
https://de.wikipedia.org/wiki/Fall_mit_Luftwiderstand
siehe auch **Aufg. 4.6** (Fallschirmspringen) in
http://gl.jkg-reutlingen.de/MAG/SKRIPT_Wachstum.pdf

Lösung:

a)

DelVar m, g, β, t, x, v

done

Lösung des AWP für v(t):

$v'=g-\frac{\beta}{m}v^2$, v=v(t) und v(0)=0.

allgemeine Lösung:

TdV-Dgl. $\frac{dv}{g-\frac{\beta}{m}v^2}=dt$

$$\int \frac{1}{g-\frac{\beta}{m}v^2}dv=\frac{m}{\beta}\int \frac{1}{\frac{g\cdot m}{\beta}-v^2}dv=t+C1$$

PBZ: $\frac{1}{\frac{g\cdot m}{\beta}-v^2}=\frac{A}{\varepsilon-v}+\frac{B}{\varepsilon+v}$

ergibt mit $\varepsilon=\sqrt{\frac{g\cdot m}{\beta}}$: $A=B=\frac{1}{2\varepsilon}$

$$\frac{m}{\beta}\int \frac{A}{\varepsilon-v}+\frac{B}{\varepsilon+v}dv=t+C1$$

$$\frac{-m\cdot(A\cdot\ln(|v-\varepsilon|)-B\cdot\ln(|v+\varepsilon|))}{\beta}=C1+t$$

ans | $A=\frac{1}{2\varepsilon}$ and $B=\frac{1}{2\varepsilon}$

$$\frac{m\cdot\left(\frac{\ln(|v+\varepsilon|)}{2\cdot\varepsilon}-\frac{\ln(|v-\varepsilon|)}{2\cdot\varepsilon}\right)}{\beta}=C1+t$$

AB v(0)=0 beachten:

ans | v=0 and t=0

0=C1

$$\text{simplify}\left(\frac{m\cdot\left(\frac{\ln(|v+\varepsilon|)}{2\cdot\varepsilon}-\frac{\ln(|v-\varepsilon|)}{2\cdot\varepsilon}\right)}{\beta}=t\right)$$

$$\frac{m\cdot\ln\left(\left|\frac{v+\varepsilon}{v-\varepsilon}\right|\right)}{2\cdot\beta\cdot\varepsilon}=t$$

e^{ans}

$$\left(\left|\frac{v+\varepsilon}{v-\varepsilon}\right|\right)^{\frac{m}{2\cdot\beta\cdot\varepsilon}}=e^{t}$$

$\frac{v+\varepsilon}{v-\varepsilon}=\pm\left(e^{t}\right)^{\frac{2\cdot\beta\cdot\varepsilon}{m}}$ mit AB $v(0)=0$

$\text{solve}\left(\frac{v+\varepsilon}{v-\varepsilon}=-\left(e^{t}\right)^{\frac{2\cdot\beta\cdot\varepsilon}{m}},v\right)$

$$\left\{v=\frac{\varepsilon\cdot\left(e^{2\cdot m^{-1}\cdot t\cdot\beta\cdot\varepsilon}-1\right)}{e^{2\cdot m^{-1}\cdot t\cdot\beta\cdot\varepsilon}+1}\right\}$$

$v=\varepsilon\cdot\tanh(m^{-1}\cdot t\cdot\beta\cdot\varepsilon)\mid\varepsilon=\sqrt{\frac{g\cdot m}{\beta}}$

$$v=\sqrt{\frac{g\cdot m}{\beta}}\cdot\tanh\left(\frac{t\cdot\beta\cdot\sqrt{\frac{g\cdot m}{\beta}}}{m}\right)$$

$v(t)=\sqrt{\frac{g\cdot m}{\beta}}\cdot\tanh\left(t\cdot\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\right)$

======================

$x(t)=\int v(t)\,dt$ ergibt:

$\int\sqrt{\frac{g\cdot m}{\beta}}\cdot\tanh\left(t\cdot\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\right)dt$

$$\frac{m\cdot\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\cdot\sqrt{\frac{g\cdot m}{\beta}}\cdot\ln\left(\left|\cosh\left(t\cdot\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\right)\right|\right)}{g\cdot\beta}$$

$x(t)=\frac{m}{\beta}\cdot\ln\left(\cosh\left(t\cdot\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\right)\right)$

======================

stop

alternativer Lösungsweg:

https://de.wikipedia.org/wiki/Riccatische_Differentialglei

part. Lös. (für v'=0) $v=\sqrt{\frac{g\cdot m}{\beta}}$

Subst.: $v(t)=z(t)+\sqrt{\frac{g\cdot m}{\beta}}$, $v'=z'$

$z'=g-\frac{\beta}{m}\cdot(z+\sqrt{\frac{g\cdot m}{\beta}})^2$, d.h.

$z'=-\frac{\beta}{m}\cdot z^2-2\frac{\beta}{m}\cdot\sqrt{\frac{g\cdot m}{\beta}}z$

d.h. Übergang in **Bernolli-Dgl.**

https://de.wikipedia.org/wiki/Bernoullische_Differentialgl

Subst.: $u(t)=1/z(t)$ ergibt $z=1/u$, $z'=-1/u^2*u'$

$-1/u^2*u'=-\frac{\beta}{m}/u^2-2\frac{\beta}{m}\cdot\sqrt{\frac{g\cdot m}{\beta}}/u \quad |u^2$

$-u'=-\frac{\beta}{m}-2\frac{\beta}{m}\cdot\sqrt{\frac{g\cdot m}{\beta}}u$, d.h. **lin. Dgl.**

$u'-2\frac{\beta}{m}\cdot\sqrt{\frac{g\cdot m}{\beta}}u=\frac{\beta}{m}$ usw.

$\mathrm{dSolve}(v'=g-\frac{\beta}{m}\cdot v^2,t,v)|m>0|g>0|\beta>0$

$$\left\{v=\frac{\sqrt{g\cdot m\cdot\beta}\cdot\tanh\left(\frac{t\cdot\sqrt{g\cdot m\cdot\beta}}{m}+\sqrt{g\cdot m\cdot\beta}\cdot\mathrm{const}(1)\right)}{\beta}\right\}$$

Anfangsbedingung v(0)=0

$$\frac{\sqrt{g\cdot m\cdot\beta}\cdot\tanh\left(\frac{0\cdot\sqrt{g\cdot m\cdot\beta}}{m}+\sqrt{g\cdot m\cdot\beta}\cdot C\right)}{\beta}=0$$

$$\frac{\tanh(C\cdot\sqrt{g\cdot m\cdot\beta})\cdot\sqrt{g\cdot m\cdot\beta}}{\beta}=0$$

solve(ans, C)

$$\{C=0\}$$

$$\tanh\left(\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\cdot t\right)=\frac{e^{2\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\cdot t}-1}{e^{2\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\cdot t}+1}$$

Define $v(t)=\sqrt{\frac{g\cdot m}{\beta}}\cdot\tanh\left(\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\cdot t\right)$

done

Probe in Dgl.

$\frac{d}{dt}(v(t))\ |m>0|g>0|\beta>0$

$$\frac{\sqrt{g\cdot m}\cdot\sqrt{g\cdot\beta}}{\sqrt{m}\cdot\sqrt{\beta}\cdot\left(\cosh\left(\frac{t\cdot\sqrt{g\cdot\beta}}{\sqrt{m}}\right)\right)^2}$$

Kürzen:

$$\frac{\sqrt{g\cdot m}\cdot\sqrt{g\cdot\beta}}{\sqrt{m}\cdot\sqrt{\beta}\cdot\left(\cosh\left(\frac{t\cdot\sqrt{g\cdot\beta}}{\sqrt{m}}\right)\right)^2}=\frac{g}{\left(\cosh\left(\frac{t\cdot\sqrt{g\cdot\beta}}{\sqrt{m}}\right)\right)^2}$$

linke Seite: $v'(t)=\frac{g}{\left(\cosh\left(\frac{t\cdot\sqrt{g\cdot\beta}}{\sqrt{m}}\right)\right)^2}$

rechte Seite: $g-\frac{\beta}{m}\cdot v^2$

$g-\frac{\beta}{m}\cdot(v(t))^2\ |m>0|g>0|\beta>0$

$$-g\cdot\left(\tanh\left(\frac{t\cdot\sqrt{g\cdot\beta}}{\sqrt{m}}\right)\right)^2+g$$

factorOut(ans, g)

$$-g\cdot\left(\left(\tanh\left(\frac{t\cdot\sqrt{g\cdot\beta}}{\sqrt{m}}\right)\right)^2-1\right)$$

Es gilt: $1-(\tanh(u))^2=\dfrac{1}{(\cosh(u))^2}$

trigToExp$((\cosh(u))^2-(\sinh(u))^2=1)$

$$1=1$$

====================================

v(t)

$$\sqrt{\frac{g\cdot m}{\beta}}\cdot\tanh\left(t\cdot\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\right)$$

Lösung des AWP für x(t):

dSolve(x'=v(t),t,x)|m>0|g>0|β>0

$$\left\{x=\frac{\sqrt{m}\cdot\sqrt{g\cdot m}\cdot\sqrt{g\cdot\beta}\cdot\ln\left(\cosh\left(\frac{t\cdot\sqrt{g\cdot\beta}}{\sqrt{m}}\right)\right)}{g\cdot\beta^{\frac{3}{2}}}+\mathrm{const}(1)\right\}$$

AB x(0)=0 einsetzen:

$$\frac{\sqrt{m}\cdot\sqrt{g\cdot m}\cdot\sqrt{g\cdot\beta}\cdot\ln\left(\cosh\left(\frac{0\cdot\sqrt{g\cdot\beta}}{\sqrt{m}}\right)\right)}{g\cdot\beta^{\frac{3}{2}}}+C=0$$

$$C=0$$

Define $x(t)=\frac{m}{\beta}\ln(\cosh(\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}t))$

done

x(t)

$$\frac{m\cdot\ln\left(\cosh\left(t\cdot\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\right)\right)}{\beta}$$

$\frac{d}{dt}(x(t))$

$$\frac{m\cdot\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\cdot\sinh\left(t\cdot\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\right)}{\beta\cdot\cosh\left(t\cdot\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\right)}$$

v(t)=simplify(ans)

$$\sqrt{\frac{g\cdot m}{\beta}}\cdot\tanh\left(t\cdot\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\right)=\frac{m\cdot\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\cdot\tanh\left(t\cdot\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\right)}{\beta}$$

Probe:

linke Seite der Dgl.:

$$m\cdot\frac{d^2}{dt^2}(x(t))$$

$$\frac{m\cdot\left(g\cdot\left(\cosh\left(t\cdot\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\right)\right)^2-g\cdot\left(\sinh\left(t\cdot\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\right)\right)^2\right)}{\left(\cosh\left(t\cdot\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\right)\right)^2}$$

simplify(ans)

$$-m\cdot\left(g\cdot\left(\tanh\left(t\cdot\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\right)\right)^2-g\right)$$

factorOut(ans, m•g)

$$-g\cdot m\cdot\left(\left(\tanh\left(t\cdot\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\right)\right)^2-1\right)$$

rechte Seite der Dgl.:

$$m\cdot g-\beta\cdot\left(\frac{d}{dt}(x(t))\right)^2$$

$$g\cdot m-\frac{g\cdot m\cdot\left(\sinh\left(t\cdot\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\right)\right)^2}{\left(\cosh\left(t\cdot\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\right)\right)^2}$$

simplify(ans)

$$-m\cdot\left(g\cdot\left(\tanh\left(t\cdot\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\right)\right)^2-g\right)$$

factorOut(ans, m•g)

$$-g\cdot m\cdot\left(\left(\tanh\left(t\cdot\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\right)\right)^2-1\right)$$

stop

b) große Zeiten t (und Grenzfall t=∞)

x(t)

$$\frac{m\cdot\ln\left(\cosh\left(t\cdot\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\right)\right)}{\beta}$$

v(t)

$$\sqrt{\frac{g\cdot m}{\beta}}\cdot\tanh\left(t\cdot\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\right)$$

Vermutung: x(t)≈v(t)·t für große t.

Grenzfall: (endloses Fallen, für große t mit konst. Geschwindgkeit)

$\lim\limits_{t\to\infty}(x(t))\ |m>0|g>0|\beta>0$

$$\infty$$

$\lim\limits_{t\to\infty}(v(t))\ |m>0|g>0|\beta>0$

$$\frac{\sqrt{g\cdot m}}{\sqrt{\beta}}$$

Es gilt:

$\lim\limits_{t\to\infty}\left(\tanh\left(t\cdot\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\right)\right)=1\ |m>0|g>0|\beta>0$

$$1=1$$

stop

c)

x(t)

$$\frac{m\cdot\ln\left(\cosh\left(t\cdot\sqrt{\frac{g\cdot\beta}{m}}\right)\right)}{\beta}$$

solve(x(t)=h, t) | m>0 | g>0 | β>0

$$\left\{t=\frac{-\sqrt{m}\cdot\cosh^{-1}\left(e^{h\cdot m^{-1}\cdot\beta}\right)}{\sqrt{g\cdot\beta}},\ t=\frac{\sqrt{m}\cdot\cosh^{-1}\left(e^{h\cdot m^{-1}\cdot\beta}\right)}{\sqrt{g\cdot\beta}}\right\}$$

Die neg. Lösung entfällt, d. h.

$$\tau=\sqrt{\frac{m}{g\cdot\beta}}\cdot\operatorname{arcosh}\left(e^{h\cdot\beta/m}\right)$$

Es gilt für $u\geq 0$:

Areafunktion $\operatorname{arcosh}(u)=\cosh^{-1}(u)$ (Umkehrfunktion)

$$\cosh^{-1}(u)=\ln(u+\sqrt{u^2-1})$$

somit eine andere Darstellung:

$$\tau=\sqrt{\frac{m}{g\cdot\beta}}\cdot\ln\left(e^{h\cdot\beta/m}+\sqrt{e^{2h\cdot\beta/m}-1}\right)$$

stop

Aufg. 6.1.30f)

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$y''+4y=-2\sin(2x)$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$

Lösung:

inhom. lin. Dgl. 2. Ordnung mit konst. Koeff.

Startpunkt: $y(0)=1$,

"Startgeschwindigkeit" (Anstieg): $y'(0)=1$

Mit dem dSolve-Befehl

dSolve(y''+4y=-2sin(2x), x, y, x=0, y=1, x=0, y'=1)

$$\left\{y=\frac{x\cdot\cos(2\cdot x)}{2}+\cos(2\cdot x)+\frac{\sin(2\cdot x)}{4}\right\}$$

elementare Rechnung: charakt. Gl.

$\lambda^2+4=0$ ergibt $\lambda=\pm 2i$, hieraus

y_hom=C1*cos(2x)+C2*sin(2x),

Störfkt. (Resonanzfall): -2sin(2x)

Ansatz:

DelVar A, B, x

done

Define y_p(x)=x*(A*cos(2x)+B*sin(2x))

done

$\frac{d^2}{dx^2}$(y_p(x))+4y_p(x)=-2sin(2x)⇒Gl

$4\cdot x\cdot(A\cdot\cos(2\cdot x)+B\cdot\sin(2\cdot x))-4\cdot A\cdot x\cdot\cos(2\cdot x)-4\cdot B\cdot x\cdot\sin($ ▶

Gl|x=0

$4\cdot B=0$

Gl|x=π/4

$-4\cdot A=-2$

y_p(x)|B=0 and A=1/2

$$\frac{x\cdot\cos(2\cdot x)}{2}$$

Define $y(x)=C1\cdot\cos(2x)+C2\cdot\sin(2x)+\frac{x\cdot\cos(2\cdot x)}{2}$

done

y(0)=1

C1=1

$$\frac{d}{dx}(y(x))=1 \mid x=0 \quad \text{and} \quad C1=1$$

$$\frac{4 \cdot C2+1}{2}=1$$

C2=1/4

Ergebnis: $y(x)=\cos(2x)+\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{x \cdot \cos(2 \cdot x)}{2}$

VdK: $y(x)=C1(x) \cdot \cos(2x)+C2(x) \cdot \sin(2x)$

$$\begin{bmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ \frac{d}{dx}(\cos(2x)) & \frac{d}{dx}(\sin(2x)) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} C1'(x) \\ C2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sin(2x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sin(2x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2 \cdot (\sin(2 \cdot x))^2}{2 \cdot (\cos(2 \cdot x))^2+2 \cdot (\sin(2 \cdot x))^2} \\ \frac{-2 \cdot \cos(2 \cdot x) \cdot \sin(2 \cdot x)}{2 \cdot (\cos(2 \cdot x))^2+2 \cdot (\sin(2 \cdot x))^2} \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} (\sin(2 \cdot x))^2 \\ \frac{-\sin(4 \cdot x)}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \int_{\square}^{\square} (\sin(2 \cdot x))^2 dx \\ \int_{\square}^{\square} \frac{-\sin(4 \cdot x)}{2} dx \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4 \cdot x-\sin(4 \cdot x)}{8} \\ \frac{\cos(4 \cdot x)}{8} \end{bmatrix}$$

$$\text{trn}\left(\begin{bmatrix}\frac{4\cdot x-\sin(4\cdot x)}{8}\\ \frac{\cos(4\cdot x)}{8}\end{bmatrix}\right)*\begin{bmatrix}\cos(2x)\\ \sin(2x)\end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{(4\cdot x-\sin(4\cdot x))\cdot\cos(2\cdot x)}{8}+\frac{\cos(4\cdot x)\cdot\sin(2\cdot x)}{8}\right]$$

simplify(ans)

$$\left[\frac{4\cdot x\cdot\cos(2\cdot x)-\sin(2\cdot x)}{8}\right]$$

$$\frac{4\cdot x\cdot\cos(2\cdot x)-\sin(2\cdot x)}{8}=\frac{x\cdot\cos(2\cdot x)}{2}-\frac{\sin(2\cdot x)}{8}$$

$y\_p(x)=\frac{x\cdot\cos(2\cdot x)}{2}$, für hom. Dgl.: $-\frac{\sin(2\cdot x)}{8}$

Mit Laplace-Transformation:

DelVar x, y

done

laplace(y''+4·y=-2·sin(2·x), x, y, t)

$$-t\cdot y(0)-y'(0)+Lp\cdot t^2+4\cdot Lp=\frac{-4}{t^2+4}$$

ans|y(0)=1 and y'(0)=1

$$Lp\cdot t^2+4\cdot Lp-t-1=\frac{-4}{t^2+4}$$

solve(ans, Lp)

$$\left\{Lp=\frac{t^3+t^2+4\cdot t}{(t^2+4)^2}\right\}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\text{expand}\left(\frac{t^3+t^2+4\cdot t}{(t^2+4)^2}, t\right)$$

$$\frac{t+1}{t^2+4}-\frac{4}{(t^2+4)^2}$$

Rücktransformation mit dem $\mathcal{L}^{-1}_{\square}(\square)[\square]$-Operator:

$$y=\mathcal{L}^{-1}_{t}\left(\frac{t^3+t^2+4\cdot t}{(t^2+4)^2}\right)[x]$$

$$y=\frac{x\cdot\cos(2\cdot x)}{2}+\cos(2\cdot x)+\frac{\sin(2\cdot x)}{4}$$

Einzelschritte: (Korrespondenztabelle)

$$\mathcal{L}^{-1}_{t}\left(-\frac{4}{(t^2+4)^2}\right)[x]$$

$$\frac{x\cdot\cos(2\cdot x)}{2}-\frac{\sin(2\cdot x)}{4}$$

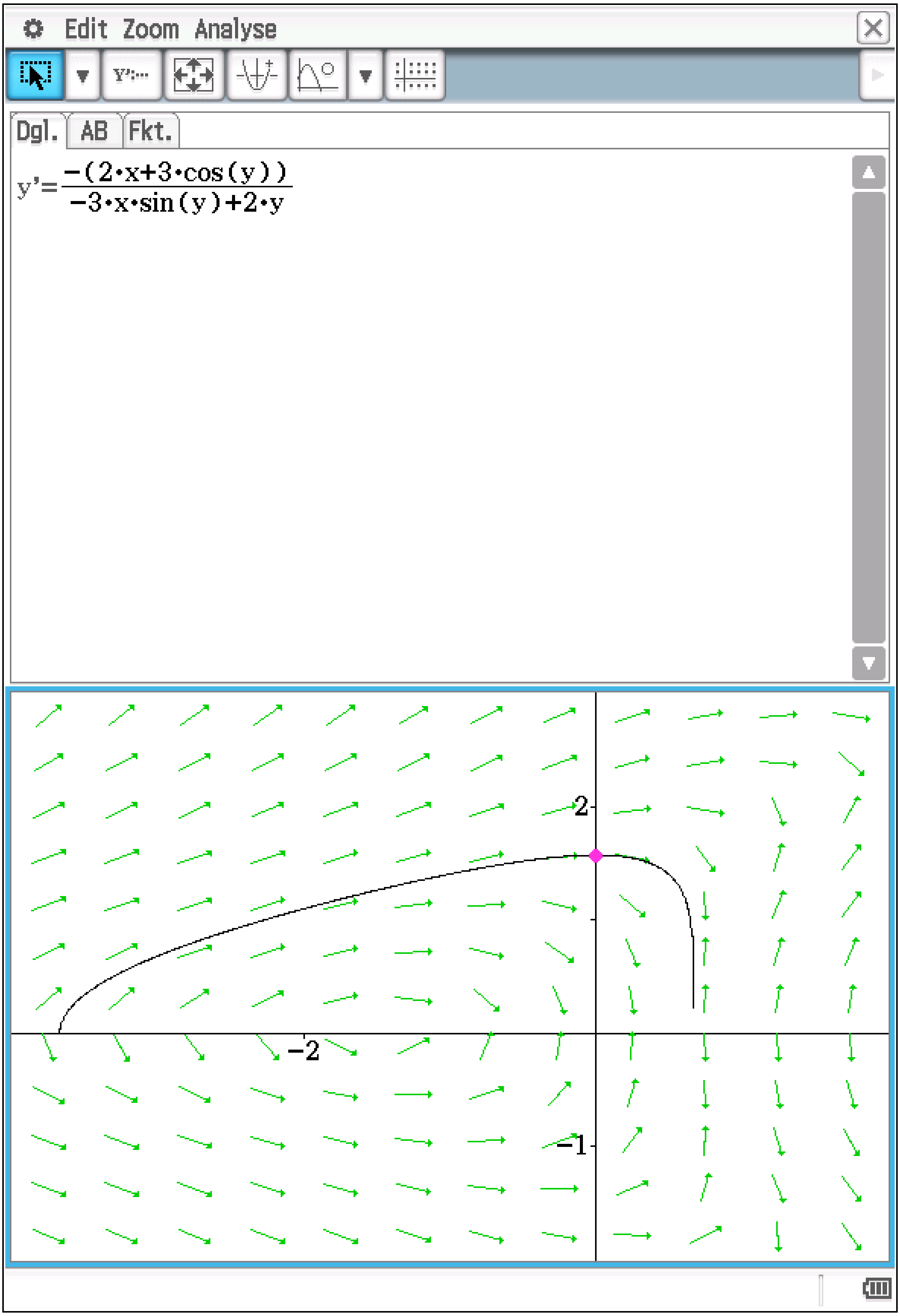
$$\mathcal{L}^{-1}_{t}\left(\frac{t}{t^2+4}\right)[x]$$

$$\cos(2\cdot x)$$

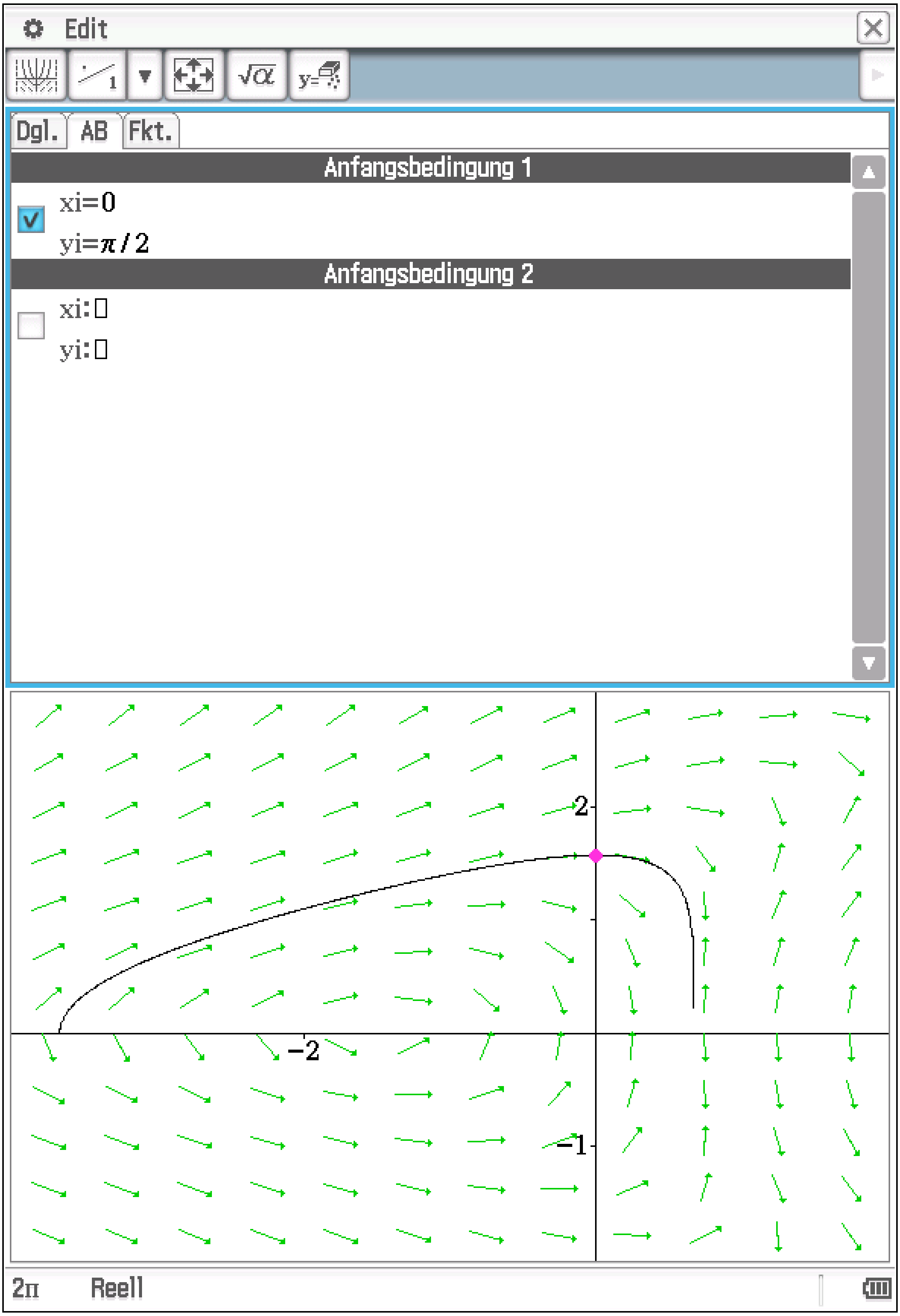
$$\mathcal{L}^{-1}_{t}\left(\frac{1}{t^2+4}\right)[x]$$

$$\frac{\sin(2\cdot x)}{2}$$

Aufg. 6.1.8 Dgl-Grafik mit Richtungsfeld



Grafische Darstellung der Lösung des AWP



Euler-Verfahren – Tabellenkalkulation

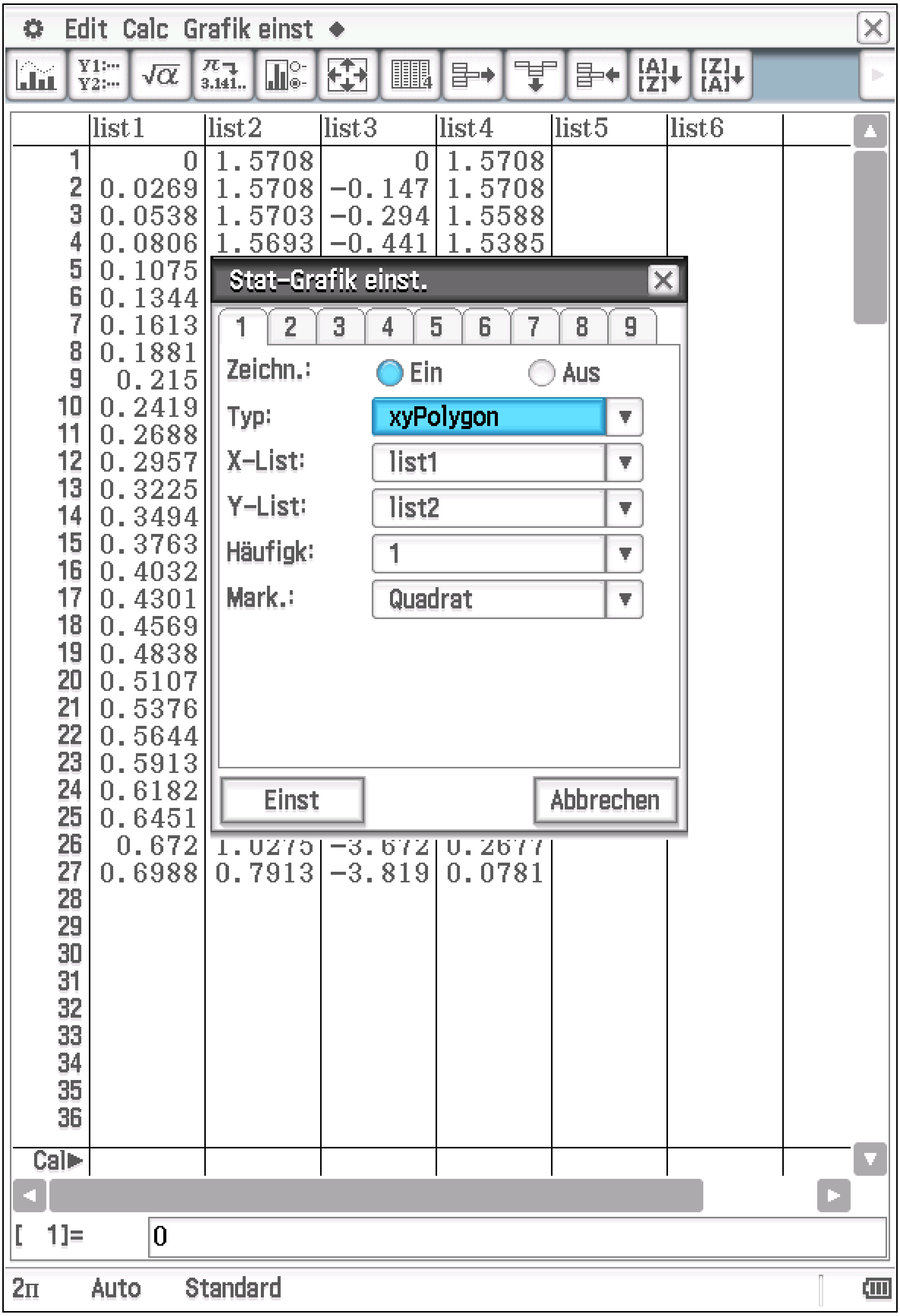
Datei Edit Grafik Calc

	A	B	C	D	E	F
1	f(x,y)=	(−(2•x+3•cos(y)))/(2•y−3•x•sin(y))				
2	x0=	0				
3	y0=	1.57080				
4	hr=	0.02688				
5	hl=	−0.1469				
6	k	xk−n.r.	yk	xk−n.l.	yk	
7	0	0	1.57080	0	1.57080	
8	1	0.02688	1.57080	−0.1469	1.57080	
9	2	0.05376	1.57032	−0.2938	1.55875	
10	3	0.08063	1.56934	−0.4406	1.53850	
11	4	0.10751	1.56780	−0.5875	1.51230	
12	5	0.13439	1.56566	−0.7344	1.48161	
13	6	0.16127	1.56286	−0.8813	1.44739	
14	7	0.18815	1.55934	−1.0281	1.41031	
15	8	0.21503	1.55502	−1.1750	1.37082	
16	9	0.24190	1.54981	−1.3219	1.32925	
17	10	0.26878	1.54362	−1.4688	1.28578	
18	11	0.29566	1.53633	−1.6157	1.24055	
19	12	0.32254	1.52779	−1.7625	1.19361	
20	13	0.34942	1.51783	−1.9094	1.14493	
21	14	0.37630	1.50624	−2.0563	1.09446	
22	15	0.40317	1.49275	−2.2032	1.04205	
23	16	0.43005	1.47704	−2.3501	0.98751	
24	17	0.45693	1.45868	−2.4969	0.93056	
25	18	0.48381	1.43708	−2.6438	0.87079	
26	19	0.51069	1.41148	−2.7907	0.80768	
27	20	0.53757	1.38076	−2.9376	0.74047	
28	21	0.56444	1.34330	−3.0844	0.66807	
29	22	0.59132	1.29649	−3.2313	0.58881	
30	23	0.61820	1.23592	−3.3782	0.49999	
31	24	0.64508	1.15298	−3.5251	0.39661	

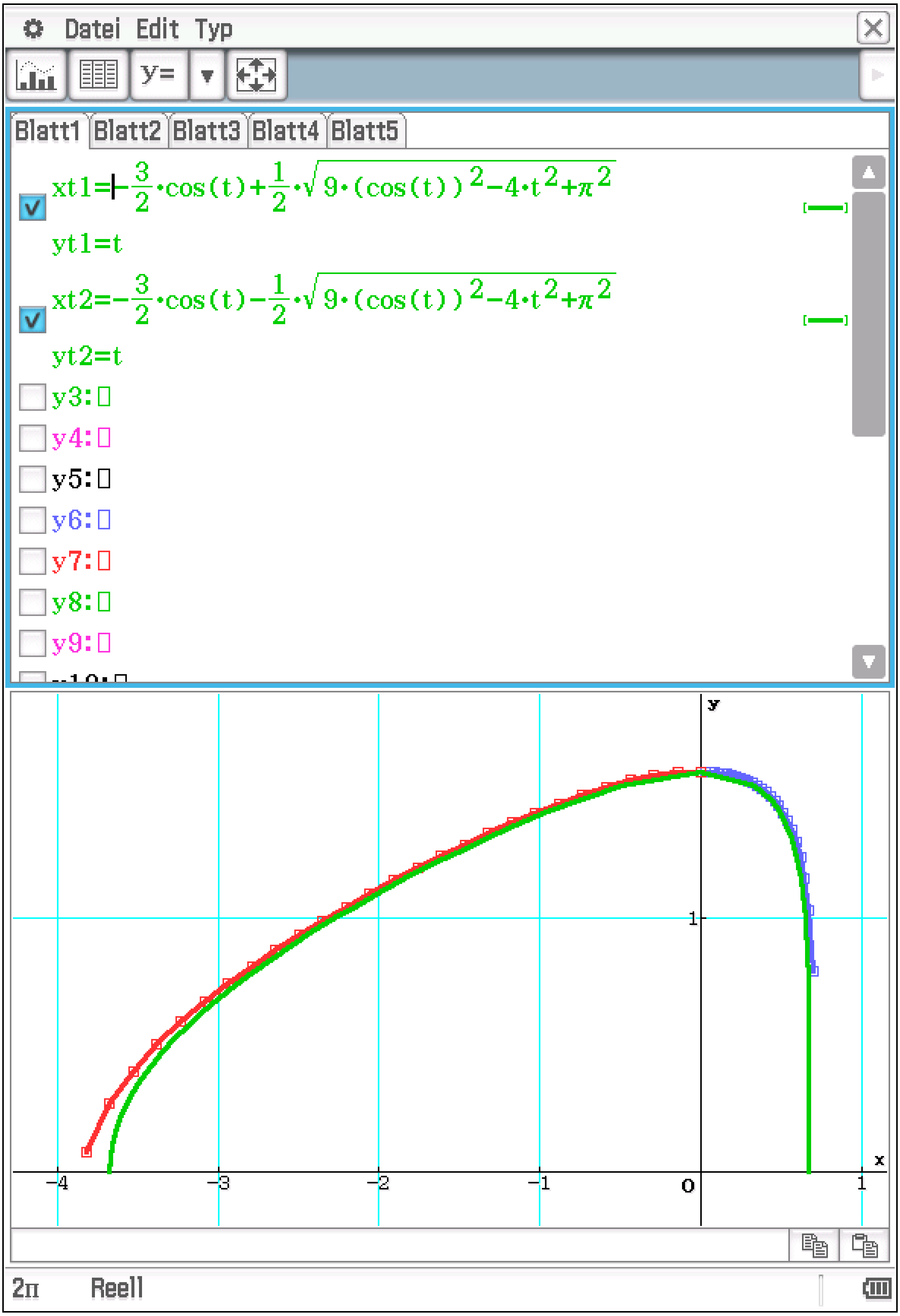
=C7+(−B4•(2•B7+3•cos(C7)))/(2•C7−3•B7•sin(C7))

C8 1.570796327

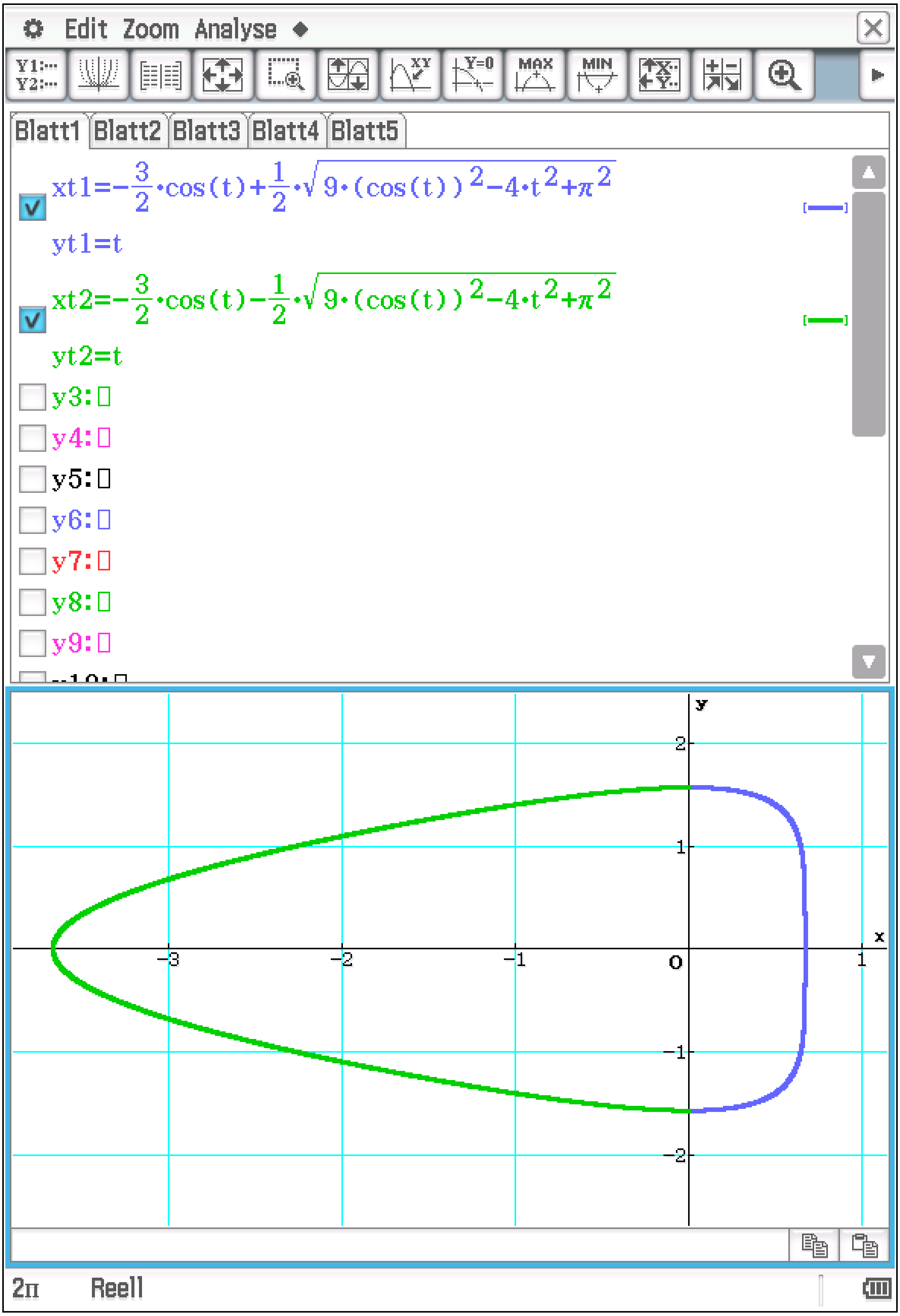
Übernahme der Tabellendaten als Listen (statistische Grafik)



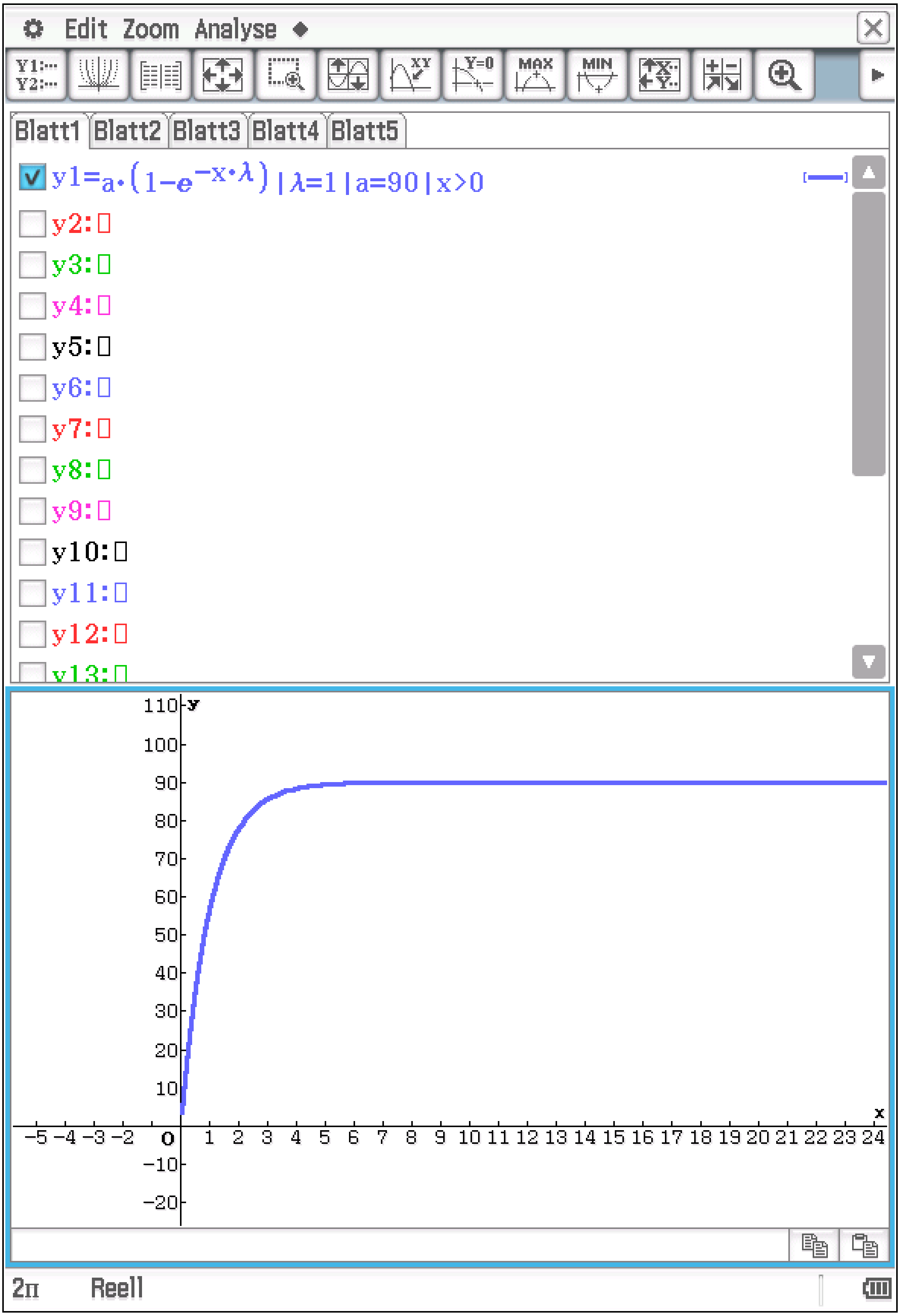
Eulerverfahren im Vergleich zur realen Integralkurve (grün)



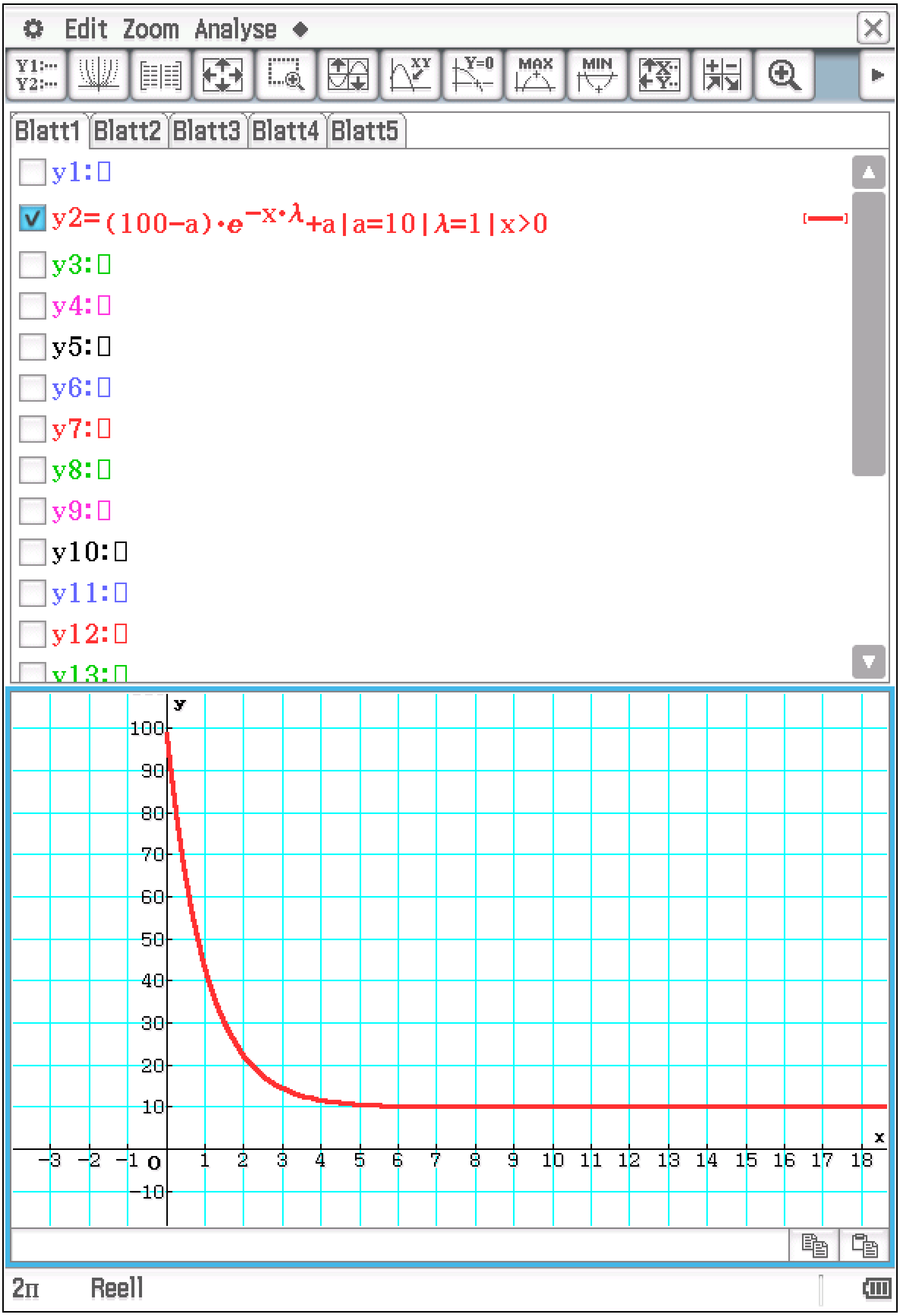
Parameterdarstellung der Lösung des AWP



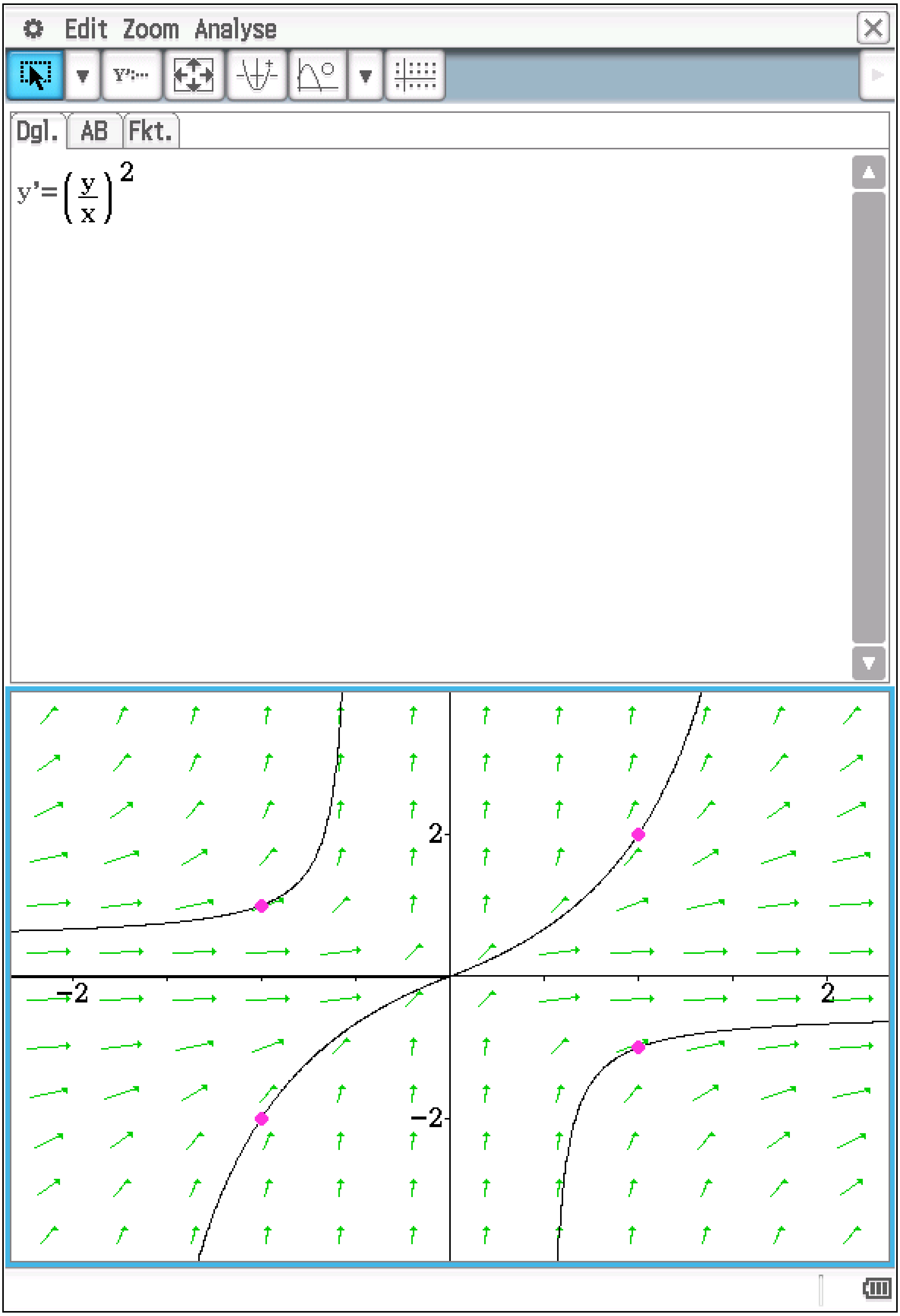
Aufg. 6.1.9 Lernkurve



Aufg. 6.1.9 Vergessenskurve



Aufg. 6.1.21a)



Lösungskurven überall monoton wachsend (y‘ > 0)