SS2018 - 6. Übung - Prof. Paditz

Aufg. 5.1. 1c), 4c), 5b), 8d), 13, 16c)

5.2. 1b), 9a), 14 **5.3.** 1c), 5

Aufg. 5.1. 1c)

Berechnen Sie den Summenwert folgender geometrischer Reihe:

6 + 3 + 1,5 + ...

Lösung: $q=\frac{1}{2}$

$a_0=6$, $a_1=a_0*\frac{1}{2}$, $a_2=a_0*\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$$s=\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_0*\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)=a_0*\sum_{k=0}^{\infty}\left(q^k\right)=a_0*\frac{1}{1-q}=12$$

im CAS:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(6*\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

12

Aufg. 5.1. 4c)

Zeigen Sie mit Hilfe des Quotientenkriteriums die Konvergenz bzw. Divergenz der folgenden Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n!}{n^9}\right)$$

Lösung:

Define $a(n)=\frac{n!}{n^9}$

done

$$\frac{a(n+1)}{a(n)}$$

$$\frac{n^9\cdot(n+1)!}{(n+1)^9\cdot n!}$$

simplify(ans)

$$\frac{n^9}{(n+1)^8}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^9}{(n+1)^8}\right)$$

$$\infty$$

Die Reihe ist divergent.

seq($\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{n!}{n^9}\right)$,N,1,100,10)

$$\left\{1,\frac{2484739563141051089883379029176131}{2420936038255624292306534400000000},\frac{325154}{46}\right.$$

approx(ans)

{1,1.026354899,69487944.48,3.251204394E+20,1.

approx(listToMat(ans))

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1.026354899 \\ 69487944.48 \\ 3.251204394E+20 \\ 1.053954263E+35 \\ 6.804832472E+50 \\ 4.424665621E+67 \\ 1.885150608E+85 \\ 3.916394529E+103 \\ 3.198226311E+122 \end{bmatrix}$$

Aufg. 5.1. 5b)

Prüfen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden alternierenden Reihe mit Hilfe des Leibniz-Kriteriums:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}\right)$$

Lösung:

$a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}$ mit $|a_n|=\dfrac{n}{n^2+1}=\dfrac{1}{n+1/n}$ streng mon. fallende Nullfolge.

Somit ist die alternierende Reihe konvergent.

$$\text{seq}\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}\right),N,1,10,1\right)$$

$$\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{10},\frac{2}{5},\frac{14}{85},\frac{789}{2210},\frac{15933}{81770},\frac{68452}{204425},\frac{43292}{204425},\frac{5389}{1676}\right.$$

approx(ans)

{0.5,0.1,0.4,0.1647058824,0.3570135747,0.1948

approx(listToMat(ans))

$$\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.1 \\ 0.4 \\ 0.1647058824 \\ 0.3570135747 \\ 0.1948514125 \\ 0.3348514125 \\ 0.2117744894 \\ 0.321530587 \\ 0.222520686 \end{bmatrix}$$

$$\text{approx}\left(\sum_{n=1}^{100}\left(\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}\right)\right)$$

$$0.2646359939$$

$$\text{approx}\left(\sum_{n=1}^{1000}\left(\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}\right)\right)$$

$$0.2691107532$$

$$\text{approx}\left(\sum_{n=1}^{10000}\left(\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}\right)\right)$$

$$0.2695605052$$

Aufg. 5.1. 8d)

Man bestimme den Konvergenzradius und -bereich der

Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n!}(x-1)^n\right)$.

Lösung:

Define $a(n)=\frac{n^2}{n!}$

done

$$\frac{a(n)}{a(n+1)}$$

$$\frac{n^2 \cdot (n+1)!}{(n+1)^2 \cdot n!}$$

simplify(ans)

$$\frac{n^2}{n+1}$$

Konvergenzradius $r=\infty$, d.h.

Konvergenzbereich $R=(-\infty,\infty)$

Zusatz: bekannte $\boldsymbol{e}$-Reihe nutzen:

$$\boldsymbol{e}^z=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{m!}z^m\right)$$

Grenzfunktion $f(x)=$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n!}(x-1)^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1+1}{(n-1)!}(x-1)^n\right)=$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{(n-1)!}(x-1)^n\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!}(x-1)^n\right)=$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-2)!}(x-1)^n\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!}(x-1)^n\right)=$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{m!}(x-1)^{m+2}\right)+\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{m!}(x-1)^{m+1}\right)=$$

$$(x-1)^2\boldsymbol{e}^{x-1}+(x-1)\boldsymbol{e}^{x-1}=$$

$$x(x-1)\boldsymbol{e}^{x-1}$$

Somit $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n!}(x-1)^n\right)=x\cdot(x-1)\boldsymbol{e}^{x-1}$.

Kontrolle:

$\text{taylor}\left(x\cdot(x-1)\cdot e^{x-1}, x, 10, 1\right)$

$$\frac{(x-1)^{10}}{36288}+\frac{(x-1)^{9}}{4480}+\frac{(x-1)^{8}}{630}+\frac{7\cdot(x-1)^{7}}{720}+\frac{(x-1)^{6}}{20}+\frac{5\cdot(x}{2}$$

$\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{n^2}{n!}(x-1)^n\right)$

$$\frac{(x-1)^{10}}{36288}+\frac{(x-1)^{9}}{4480}+\frac{(x-1)^{8}}{630}+\frac{7\cdot(x-1)^{7}}{720}+\frac{(x-1)^{6}}{20}+\frac{5\cdot(x}{2}$$

Aufg. 5.1.13

Das folgende Integral lässt sich in geschlossener Form nicht bestimmen. Berechnen Sie den Wert des Integrals durch Potenzreihenentwicklung und anschließender gliedweiser Integration auf vier Dezimalstellen genau: $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx$.

Lösung:

$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx$

$$0.9460830704$$

$\text{taylor}\left(\frac{\sin(x)}{x}, x, 10, 0\right)$

$$\frac{-x^{10}}{39916800}+\frac{x^8}{362880}-\frac{x^6}{5040}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^2}{6}+1$$

$\int_0^1 \frac{-x^{10}}{39916800}+\frac{x^8}{362880}-\frac{x^6}{5040}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^2}{6}+1dx$

$$\frac{26170873831}{27662342400}$$

approx(ans)

$$0.9460830704$$

Aufg. 5.1. 16c)

Geben Sie die Fourier-Reihen der folgenden

2π-periodischen Funktion f(x) an. Skizzieren Sie den

Graph von f(x) sowie die ersten

beiden Näherungen:

f(x)=piecewise(−π<x<π, x, piecewise(x=−π, 0, 1/0))

Lösung: Sägezahnkurve f(x)=0 in Unstetigkeitsstellen

Define $y1(x)=\begin{cases} x, & -\pi<x<\pi \\ 0, & x=-\pi \end{cases}$

done

Define $y2(x)=\begin{cases} 2\cdot\pi\cdot \mathrm{frac}\left(\frac{x-\pi}{2\cdot\pi}\right)-\pi, & x>\pi \\ 2\cdot\pi\cdot \mathrm{frac}\left(\frac{x-\pi}{2\cdot\pi}\right)+\pi, & x<\pi \end{cases}$

done

2D-Grafik

Unstetigkeitsstellen definieren:

seq(x, x, −11π, 11π, 2π)⇒xliste

{−11•π, −9•π, −7•π, −5•π, −3•π, −π, π, 3•π, 5•π, 7•π, 9•π,

seq(0, x, −11π, 11π, 2π)⇒yliste

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

STAT-Grafik

f(x) ist eine ungerade Funktion, d.h. $a_k=0 \ \forall k\in\mathbb{N}$

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x*\sin(k*x)\,dx$$

Define $b(k)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x*\sin(k*x)\,dx$

done

b(k)

$$\frac{-2\cdot(k\cdot\cos(k\cdot\pi)\cdot\pi-\sin(k\cdot\pi))}{k^2\cdot\pi}$$

ans|k=constn(1)

$$\frac{-2\cdot\cos(\pi\cdot\text{constn}(1))}{\text{constn}(1)}$$

ans|constn(1)=k

$$\frac{-2\cdot\cos(k\cdot\pi)}{k}$$

$\cos(k\pi)=(-1)^k$

$$\cos(k\cdot\pi)=(-1)^k$$

Define $b(k)=\frac{2\cdot(-1)^{k+1}}{k}$

done

Define $y3(x)=\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{2\cdot(-1)^{k+1}}{k}*\sin(k*x)\right)$

done

2D–Grafik Fourierreihe	Y1:⋯ Y2:⋯

Es gilt:

$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\cdot(-1)^{k+1}}{k}*\sin(k*x)\right)$ in allen

Stetigkeitsstellen

in den Unstetigkeitsstellen von f(x) gilt

$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\cdot(-1)^{k+1}}{k}*\sin(k*x)\right)=0$

komplexe Fourierreihe:

Es gilt $\sin(z)=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$

Somit $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\cdot(-1)^{k+1}}{k}\cdot\sin(k\cdot x)\right)=$

$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{ki}\cdot(e^{ik\cdot x}-e^{-ik\cdot x})\right)=$

$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{ki}\cdot e^{ik\cdot x}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k}}{ki}\cdot e^{-ik\cdot x}\right)=$

$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{ki}\cdot e^{ik\cdot x}\right)+\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\frac{(-1)^{-k}}{-ki}\cdot e^{ik\cdot x}\right)=$

$\sum_{k=-\infty,\,k\neq 0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{ki}\cdot e^{ik\cdot x}\right)$, d.h.

===========================

$f(x)=\sum_{k=-\infty,\,k\neq 0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k}}{k}ie^{ik\cdot x}\right)$

===========================

$c_k=\frac{(-1)^{k+1}}{ki}=\frac{(-1)^{k}}{k}i$, $k\neq 0$.

$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x*e^{-ik\cdot x}dx$

$$c_k=\frac{2\cdot k\cdot\cos(k\cdot\pi)\cdot\pi\cdot i-2\cdot\sin(k\cdot\pi)\cdot i}{2\cdot k^{2}\cdot\pi}$$

ans | k=constn(1)

$$c_k=\frac{\cos(\pi\cdot \mathrm{constn}(1))\cdot i}{\mathrm{constn}(1)}$$

ans | constn(1)=k

$$c_k=\frac{\cos(k\cdot\pi)\cdot i}{k}$$

stop

Aufg. 5.2. 1b)

Man berechne $\frac{(3+2i)(2-i)}{5+i}$.

Lösung:

$\frac{(3+2i)(2-i)}{5+i}$

$$\frac{41}{26}-\frac{3\cdot i}{26}$$

Aufg. 5.2. 9a)

Berechnen Sie $\sqrt{-1+\sqrt{3}\,i}$.

Lösung:

$\sqrt{-1+\sqrt{3}\,i}$

$$\sqrt{-1+\sqrt{3}\cdot i}$$

cExpand(ans)

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}\cdot i}{2}$$

Hauptwurzel $z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}\cdot i}{2}$

ans$*e^{i\pi}$

$$\frac{-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}\cdot i}{2}$$

Nebenwurzel $z_1=\frac{-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}\cdot i}{2}$

Probe:

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}\cdot i}{2}\right)^2$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}\cdot i}{2}\right)^2$$

cExpand(ans)

$$-1+\sqrt{3}\cdot i$$

$$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}\cdot i}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}\cdot i}{2}\right)^2$$

cExpand(ans)

$$-1+\sqrt{3}\cdot i$$

Aufg. 5.2.14

Gegeben sei das Polynom $P(x)=2x^4+2x^3-22x^2+2x-24$, das eine Nullstelle bei $x=i$ besitzt.

a) Geben Sie die zugehörige zweite Nullstelle von P(x) an.

b) Bestimmen Sie die restlichen Nullstellen durch Division mit dem Hornerschema.

c) Schreiben Sie P(x) als Produkt von Linearfaktoren.

Lösung:

Define $P(x)=2x^4+2x^3-22x^2+2x-24$

done

rFactor(P(x))

$$2\cdot(x+4)\cdot(x-3)\cdot(x+i)\cdot(x-i)$$

a) im reellen Polynom treten de komplexe und konjugiert komplxe Nst. sets gemeinsam auf, d.h. $x=-i$ ist auch Nst.

b) Division durch die Linearfaktoren $(x+i)\cdot(x-i)$

$(x+i)\cdot(x-i)$

$$(x+i)\cdot(x-i)$$

cExpand(ans)

$$x^2+1$$

$\dfrac{2x^4+2x^3-22x^2+2x-24}{x^2+1}$

$$\frac{2\cdot x^4+2\cdot x^3-22\cdot x^2+2\cdot x-24}{x^2+1}$$

simplify(ans)

$$2\cdot(x+4)\cdot(x-3)$$

c) $P(x)=2\cdot(x+4)\cdot(x-3)\cdot(x+i)\cdot(x-i)$

Aufg. 5.3. 1c)

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Lösung:

eigVl$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)$

$$\{2,2\}$$

Der Eigenwert $\lambda=2$ hat die (algebraische) Vielfachheit 2, d.h. $\lambda_1=\lambda_2=2$.

eigVc$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}-\lambda*\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)=0$

$$\lambda^2-4\cdot\lambda+4=0$$

solve(ans, λ)

{λ=2}

$$\left(\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}-2*\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)*\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y\\0\end{bmatrix}$$

Eigenvektor $v=\begin{bmatrix}t\\0\end{bmatrix}$, $t\in\mathbf{R}$ $(t\neq 0)$

normiert: $v=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ (eindimensionaler Eigenraum:

geometrische Vielfachheit = 1)

stop

Aufg. 5.3.5

Berechnen Sie die Eigenwerte und die dazugehörigen

Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{M}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ (Hückel-Problem

für das Allyl-Radikal).

Prüfen Sie anhand dieses Beispiels nach, dass für eine

eine n-reihige reell-symmetrische Matrix gilt:

1) Alle n Eigenwerte sind reell.

2) Eigenvektoren, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, sind orthogonal.

3) Die zugehörigen Eigenvektoren sind linear unabhängig.

(Quelle, vgl. http://d-nb.info/1014125758 S.332)

Lösung:

$$M:=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

eigVl(M)

{1.414213562, 0, -1.414213562}

eigVc(M)

$$\begin{bmatrix}0.5 & -0.7071067812 & 0.5\\ 0.7071067812 & 0 & -0.7071067812\\ 0.5 & 0.7071067812 & 0.5\end{bmatrix}$$

1) **Eigenwertaufgabe:** $\mathbf{M*}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\lambda*\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$, d.h.

$$\left(M-\lambda*\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)*\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

gesucht sind nichttriviale Lösungen für $\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ in

Abhängigkeit von λ.

$$\det\left(M-\lambda*\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)=0$$

$$-\lambda^3+2\cdot\lambda=0$$

solve(ans, λ)

$$\{\lambda=0, \lambda=-\sqrt{2}, \lambda=\sqrt{2}\}$$

Die drei Eigenwerte sind reell: $\{\lambda_1=\sqrt{2}, \lambda_2=0, \lambda_3=-\sqrt{2}\}$

2) Eigenvektor zu $\lambda_1=\sqrt{2}$

$$\left(M-\sqrt{2}*\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)*\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-\sqrt{2}\cdot x+y\\x-\sqrt{2}\cdot y+z\\y-\sqrt{2}\cdot z\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{cases}-\sqrt{2}\cdot x+y=0\\x-\sqrt{2}\cdot y+z=0\\y-\sqrt{2}\cdot z=0\end{cases}\right|_{x,\,y,\,z}$$

$$\{x=z,\ y=\sqrt{2}\cdot z,\ z=z\}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\\sqrt{2}t\\t\end{bmatrix},\quad t\in\mathbf{R}\ \ (t\neq 0)$$

$$\mathrm{norm}\left(\begin{bmatrix}t\\\sqrt{2}t\\t\end{bmatrix}\right)$$

$$2\cdot|t|$$

$$\begin{bmatrix}t\\\sqrt{2}t\\t\end{bmatrix}/\mathrm{ans}\,|\,t>0$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

normierter EV zu $\lambda_1=\sqrt{2}$:

$$v_1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Eigenvektor zu $\boldsymbol{\lambda_2=0}$

$$\left(M-0*\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)*\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y \\ x+z \\ y \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{cases} y \\ x+z \\ y \end{cases}\right|_{x,\,y,\,z}$$

$$\{x=-z,\, y=0,\, z=z\}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbf{R} \quad (t \neq 0)$$

$$\mathrm{norm}\left(\begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}\right)$$

$$\sqrt{2} \cdot |t|$$

$$\begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} / \mathrm{ans} \,|\, t>0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

normierter EV zu $\lambda_2=0$:

$$v_2:=\begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Eigenvektor zu $\lambda_3=-\sqrt{2}$

$$\left(M+\sqrt{2}*\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)*\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}\cdot x+y \\ x+\sqrt{2}\cdot y+z \\ y+\sqrt{2}\cdot z \end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt{2}\cdot x+y=0 \\ x+\sqrt{2}\cdot y+z=0 \\ y+\sqrt{2}\cdot z=0 \end{array}\right|_{x,\,y,\,z}$$

$$\{x=z,\ y=-\sqrt{2}\cdot z,\ z=z\}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t \\ -\sqrt{2}t \\ t \end{bmatrix},\quad t\in\mathbf{R}\ \ (t\neq 0)$$

$$\mathrm{norm}\left(\begin{bmatrix} t \\ -\sqrt{2}t \\ t \end{bmatrix}\right)$$

$$2\cdot|t|$$

$$\begin{bmatrix} t \\ -\sqrt{2}t \\ t \end{bmatrix}/\mathrm{ans}\,|\,t>0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

normierter EV zu $\lambda_3=-\sqrt{2}$:

$$v_3:=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$\mathrm{dotP}(v_1, v_2)$

$$0$$

$\mathrm{dotP}(v_1, v_3)$

$$0$$

$\mathrm{dotP}(v_2, v_3)$

$$0$$

orthogonale EV.

===========================

Alternativ: Austauschverfahren

augment(M−λ* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$)⇒ST

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

1. Schritt: x geht in Zeile2

LinEqSys(ST, 2, 1)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} -\lambda^2+1 & \lambda & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

2. Schritt: y geht in Zeile3

LinEqSys(T1, 3, 1)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix} -\lambda\cdot(\lambda^2-2) & 0 \\ \lambda^2-1 & 0 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

nichttriviale Lösungen für $\lambda\cdot(\lambda^2-2)=0$ (EW

$\{\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}\}$)

$$\begin{bmatrix} \text{T2=ET} & z=t & 1 \\ y_1 & 0 & 0 \\ x & \lambda^2-1 & 0 \\ y & \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

EV: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda^2-1)\cdot t \\ \lambda\cdot t \\ t \end{bmatrix}$, **t∈R** (t≠0)

$\mathrm{norm}\left(\begin{bmatrix} (\lambda^2-1)\cdot t \\ \lambda\cdot t \\ t \end{bmatrix}\right) | t>0$

$$t\cdot\sqrt{\lambda^4-\lambda^2+2}$$

EV nomiert:

$\begin{bmatrix} (\lambda^2-1)\cdot t \\ \lambda\cdot t \\ t \end{bmatrix} / \mathrm{ans} | t>0 \Rightarrow EV$

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda^2-1}{\sqrt{\lambda^4-\lambda^2+2}} \\ \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^4-\lambda^2+2}} \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda^4-\lambda^2+2}} \end{bmatrix}$$

$EV | \lambda=\sqrt{2} \Rightarrow v_1$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$EV | \lambda=0 \Rightarrow v_2$

$$\begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$EV | \lambda=-\sqrt{2} \Rightarrow v_3$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

stop

3) Lineare Unabhängigkeit der EV:

Linarkombination:

$x*v_1+y*v_2+z*v_3$

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}\cdot y}{2}+\frac{z}{2} \\ \frac{\sqrt{2}\cdot x}{2}-\frac{\sqrt{2}\cdot z}{2} \\ \frac{x}{2}+\frac{\sqrt{2}\cdot y}{2}+\frac{z}{2} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}\cdot y}{2}+\frac{z}{2}=0 \\ \frac{\sqrt{2}\cdot x}{2}-\frac{\sqrt{2}\cdot z}{2}=0 \\ \frac{x}{2}+\frac{\sqrt{2}\cdot y}{2}+\frac{z}{2}=0 \end{cases}\right|_{x,y,z}$$

$$\{x=0, y=0, z=0\}$$

nur die triviale Lösung, d.h. lineare Unabhängigkeit der EV.

Alternativ: $\det(v_1, v_2, v_3) \neq 0$, $\mathrm{Rang}(v_1, v_2, v_3)=3$.

augment(augment(v_1, v_2), v_3)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

det(ans)

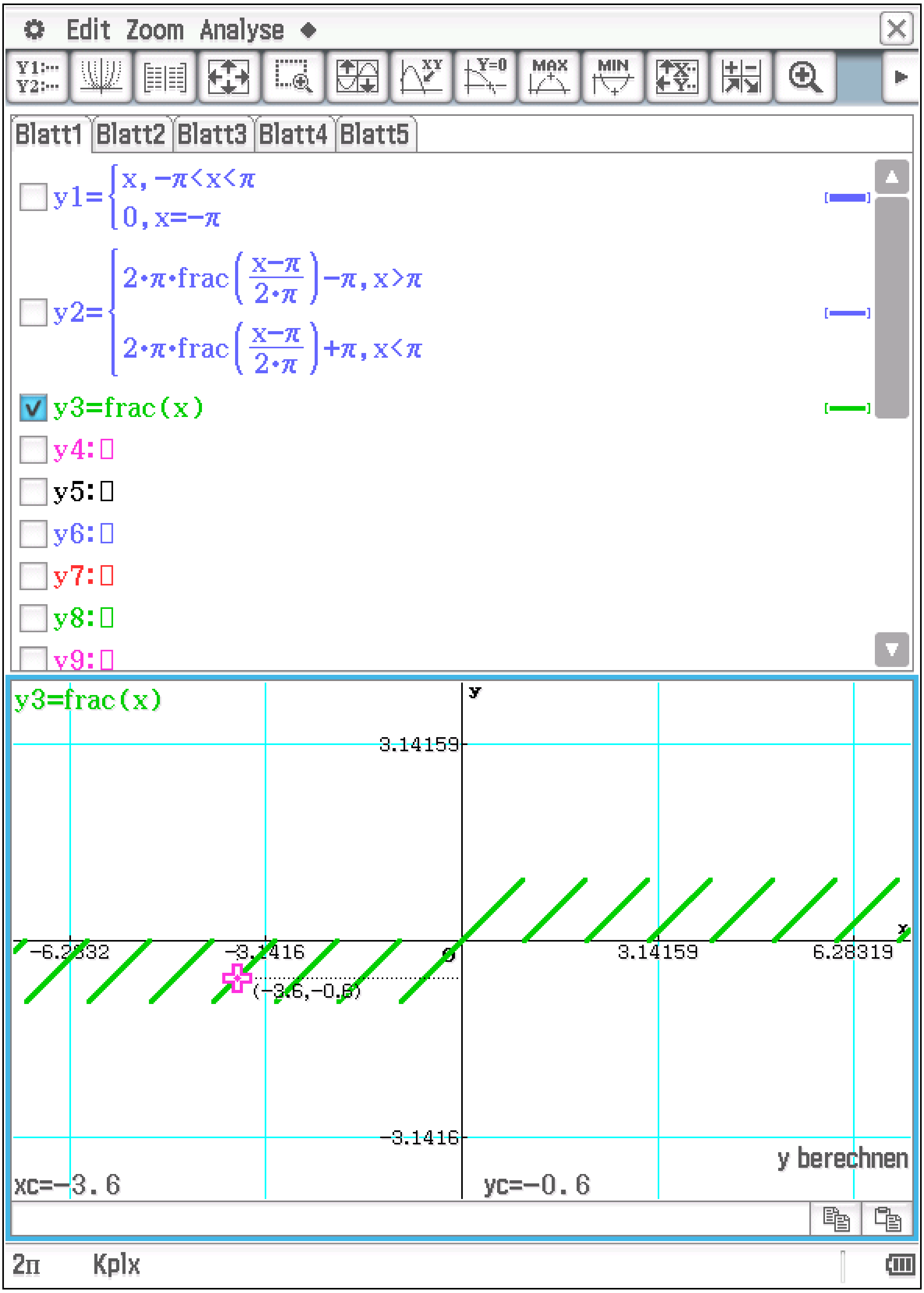
1

$$\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right)$$

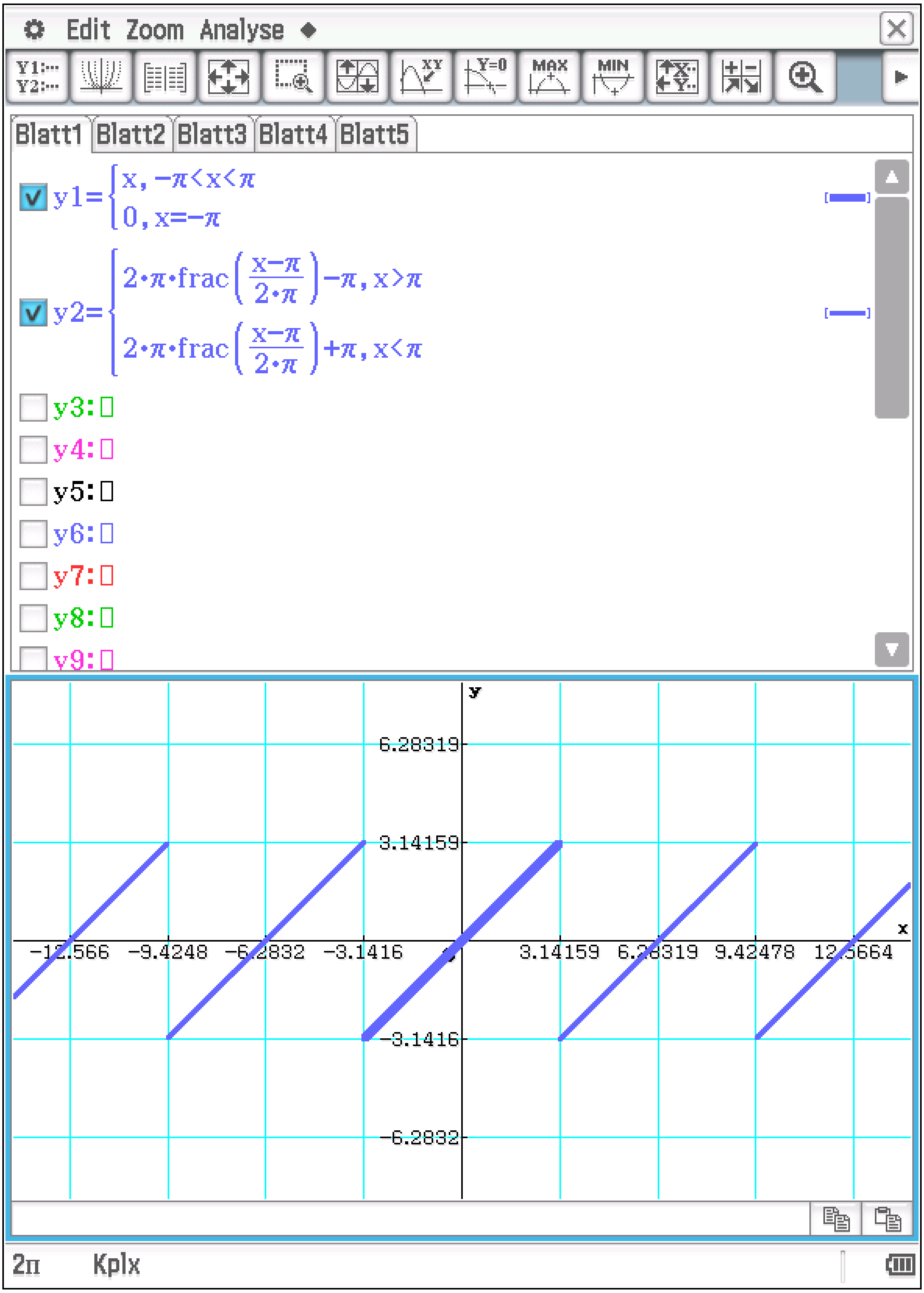
3

Aufg. 5.1.16c) frac(x)-Funktion (engl. fractional part)

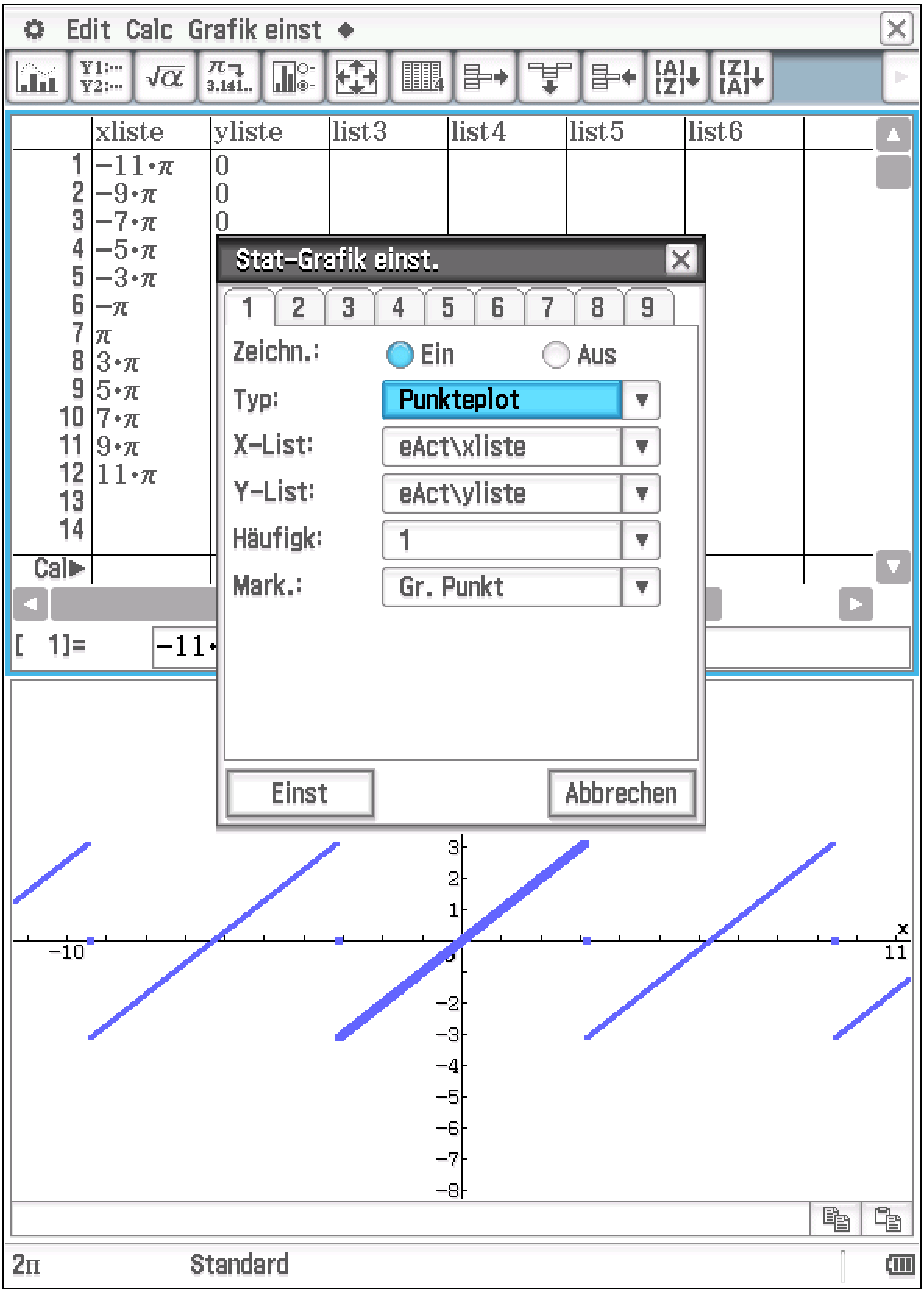
zur Konstruktion einer Sägezahnkurve



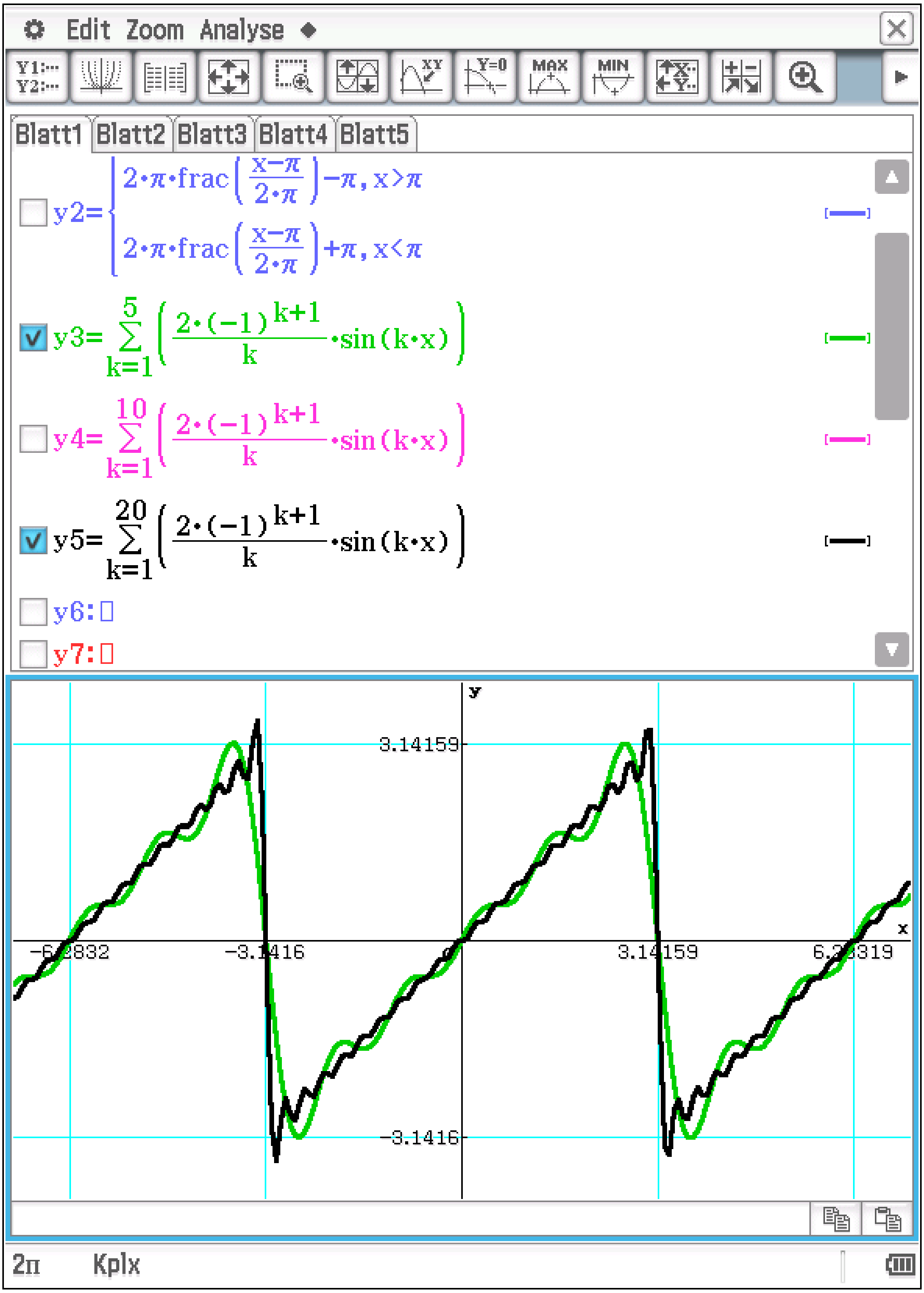
Aufg. 5.1.16c) Sägezahnkurve



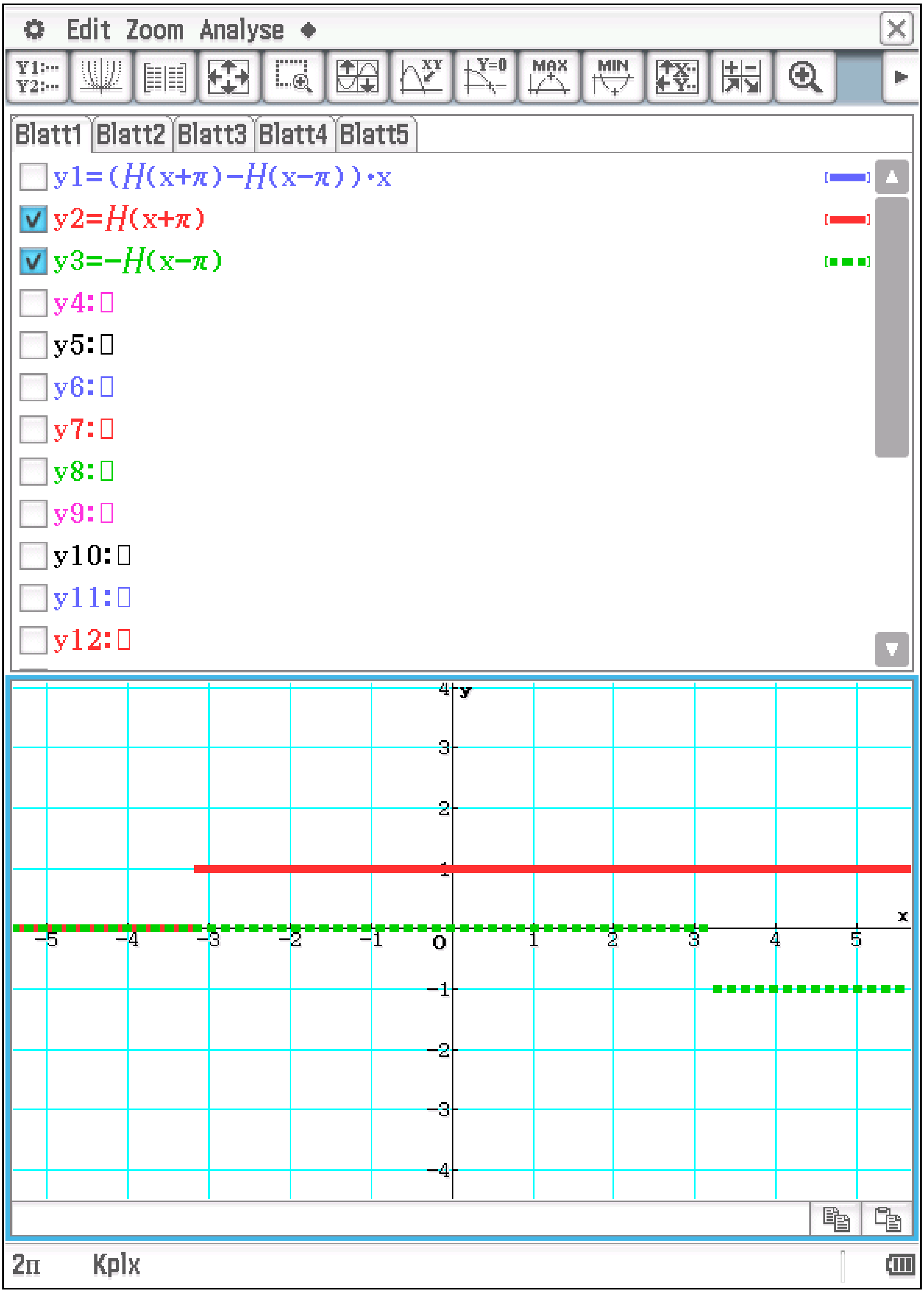
Mit Unstetigkeitsstellen



Fourierreihe (vgl. auch Gibbs-Phänomen bei y5(x))



Die Einheitssprünge bei –pi und pi



Impuls von –pi bis pi (ansonsten Null) für Fouriertransformation