**SS2018 – 5. Übung – Prof. Paditz**

**Aufg. 4.3.** 1c), 8, 12, 19a), 23

**4.4.** 2, 15a), 18

**Aufg. 4.3.** 1c)

Bestimmen Sie die Lage und Art aller relativen Extrema

der Funktion und geben Sie die zugehörigen

Funktionswerte an: $z=f(x,y)=2x\cdot y\cdot(x+y-6)$

**Lösung:** Funktion dritter Ordnung

DelVar f, x, y, c

done

Define $f(x,y)=2x\cdot y\cdot(x+y-6)$

done

Define $z1(x,y)=f(x,y)$

done

3D–Grafik

$$\frac{d}{dx}(f(x,y))=0$$

$$2\cdot y^2+4\cdot x\cdot y-12\cdot y=0$$

$$\frac{d}{dy}(f(x,y))=0$$

$$2\cdot x^2+4\cdot x\cdot y-12\cdot x=0$$

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{d}{dx}(f(x,y))=0\\ \frac{d}{dy}(f(x,y))=0\end{array}\right|_{x,y}$$

$$\{\{x=0,y=0\},\{x=0,y=6\},\{x=2,y=2\},\{x=6,y=0\}\}$$

$$\text{Define } D(x,y)=\det\left(\begin{bmatrix}\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y)) & \frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}(f(x,y))\right)\\ \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}(f(x,y))\right) & \frac{d^2}{dy^2}(f(x,y))\end{bmatrix}\right.$$

done

$D(x,y)$

$$-16\cdot x^2-16\cdot y^2-16\cdot x\cdot y+96\cdot x+96\cdot y-144$$

$D(x,y)|\{x=0,y=0\}$

$$-144$$

$f(x,y)|\{x=0,y=0\}$

$$0$$

Sattelpunkt $\mathbf{S}_1(0,0,0)$

$D(x,y)|\{x=0,y=6\}$

$$-144$$

$f(x,y)|\{x=0,y=6\}$

$$0$$

Sattelpunkt $\mathbf{S}_2(0,6,0)$

$D(x,y)|\{x=6,y=0\}$

$$-144$$

$f(x,y)|\{x=6,y=0\}$

$$0$$

Sattelpunkt **$S_3$**$(6,0,0)$

$D(x,y)|\{x=2,y=2\}$

$$48$$

$f(x,y)|\{x=2,y=2\}$

$$-16$$

$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))|\{x=2,y=2\}$

$$8$$

lokales Minimum **Min**$(2,2,-16)$

**Höhenlinien:**

solve(f(x,y)=c,y)

$$\left\{y=\frac{-x}{2}-\frac{\sqrt{x\cdot(x^3-12\cdot x^2+36\cdot x+2\cdot c)}}{2\cdot x}+3,\ y=\frac{-x}{2}+\frac{\sqrt{x\cdot(x^3-12\right.$$

seq(c,c,−15,2,1)⇒c

{−15,−14,−13,−12,−11,−10,−9,−8,−7,−6,−5,−4,−3

Define $y1(x)=\frac{-x}{2}-\frac{\sqrt{x\cdot(x^3-12\cdot x^2+36\cdot x+2\cdot c)}}{2\cdot x}+3$

done

Define $y2(x)=\frac{-x}{2}+\frac{\sqrt{x\cdot(x^3-12\cdot x^2+36\cdot x+2\cdot c)}}{2\cdot x}+3$

done

2D−Grafik Y1:… Y2:…

stop

Define xst2(s,t)=t

done

Define $yst2(s,t)=\frac{-t}{2}+\frac{\sqrt{t\cdot(t^3-12\cdot t^2+36\cdot t+2\cdot s)}}{2\cdot t}+3$

done

Define zst2(s,t)=s

done

Define xst3(s,t)=t

done

Define $yst3(s,t)=\frac{-t}{2}-\frac{\sqrt{t\cdot(t^3-12\cdot t^2+36\cdot t+2\cdot s)}}{2\cdot t}+3$

done

Define zst3(s,t)=s

done

3D−Grafik

stop

**Aufg. 4.3.8**

Gegeben sei die Funktion $z=f(x,y)=x^3+4y^3$.

a) Bestimmen Sie mit der Methode der Lagrange−Multiplikatoren die Extrema von f unter der Nebenbedingung x+y=6.

b) Um welche Art von Extrema handelt es sich?

**Wichtige Anmerkung:** Die bisherige Funktionaldeterminante

$D(x,y)=\det\left(\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}\right)=f_{xx}*f_{yy}-(f_{xy})^2$

kann hier **nicht** zur Beurteilung der extremwertverdächtigen Stellen $(x_0, y_0)$ verwendet werden.

Ersatzweise kann hier die **"geränderte"** Funktionaldeterminante für $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda*g(x,y)$ verwendet werden:

$$D(x,y,\lambda)= -\det\left(\begin{bmatrix}0 & g_x & g_y\\ g_x & F_{xx} & F_{xy}\\ g_y & F_{yx} & F_{yy}\end{bmatrix}\right) =$$

$F_{xx}(g_y)^2+F_{yy}(g_x)^2-2F_{xy}g_xg_y$,

auf die bisher nicht eingegangen wurde:

$D(x_0,y_0,\lambda_0)<0$: Max, $D(x_0,y_0,\lambda_0)>0$: Min.,

vgl. **Taschenbuch math. Formeln** von Bartsch (ISBN 978-3-446-43800-2, S465u.)

Die Beurteilung erfolgt hier durch "Abtasten" von Nachbarpunkten oder über die Karte (mit Höhenlinien und der NB).

**Lösung:** Fläche 3. Ordnung

Define $f(x,y)=x^3+4y^3$

done

Define z1(x,y)=f(x,y)

done

3D-Grafik Z1:… Z2:…

**Höhenlinien:** $x^3+4y^3=c$

Define xt1(t)=t

done

Define $yt1(t)=\sqrt[3]{(c-t^3)/4}\,|c=1$

done

2D−Grafik

Define F(x,y,λ)=f(x,y)+λ*(x+y−6)

done

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{d}{dx}(F(x,y,\lambda))=0\\ \frac{d}{dy}(F(x,y,\lambda))=0\\ \frac{d}{d\lambda}(F(x,y,\lambda))=0\end{array}\right|_{x,y,\lambda}$$

{{x=4,y=2,λ=−48},{x=12,y=−6,λ=−432}}

Anhand der **Karte** erkennt man:

Tiefpunkt T(4,2,96)

f(x,y)|{x=4,y=2}

96

Hochpunkt H(12,−6,864)

f(x,y)|{x=12,y=−6}

864

**Abtasten von Nachbarpunkten: NB y=6−x**

seq(f(x,6−x),x,3.9,4.1,0.1)

$$\left\{\frac{96363}{1000},96,\frac{96357}{1000}\right\}$$

approx(ans)

{96.363,96,96.357}

seq(f(x,6−x),x,11.9,12.1,0.1)

$$\left\{\frac{863643}{1000},864,\frac{863637}{1000}\right\}$$

approx(ans)

{863.643,864,863.637}

stop

**Aufg. 4.3.**12

Gegeben sei die Funktion $z=f(x,y)=x^2-x*y+y^2-x$.

a) Bestimmen Sie die Extrema von f unter der (Ungleichungs-)Nebenbedingung $x^2+y^2\le 1$. Was bedeutet diese Bedingung geometrisch?

b) Um welche Art von Extrema handelt es sich?

**Hinweis:** Man löse zunächst die Aufgabe ohne Nebenbedingung und betrachte nur die Lösungen, die der (Ungleichungs-)Nebenbedingung genügen. Danach untersuche man die Funktion auf dem Rand des betrachteten Bereiches,

d.h. unter der Nebenbedingung $x^2+y^2=1$.

**Lösung: Fläche 2.Ordnung** innerhalb des Einheitskreises und auf dem Rand betrachten.

Define $f(x,y)=x^2-x*y+y^2-x$

done

Define z1(x,y)=f(x,y)

done

**Der Kreiszylinder:**

Define xst2(s,t)=cos(t)

done

Define yst2(s,t)=sin(t)

done

Define zst2(s,t)=s

done

stop

**Die Fläche 2. Ordnung (Paraboloid):**

Define xst3(s,t)=s*cos(t)

done

Define yst3(s,t)=s*sin(t)

done

Define zst3(s,t)=$s^2-s^2$*sin(2t)/2−s*cos(t)

done

3D−Grafik

stop

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{d}{dx}(f(x,y))=0\\ \frac{d}{dy}(f(x,y))=0\end{array}\right|_{x,y}$$

$$\left\{x=\frac{2}{3},\ y=\frac{1}{3}\right\}$$

$$\text{Define } D(x,y)=\det\left(\begin{bmatrix}\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y)) & \frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}(f(x,y))\right)\\ \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}(f(x,y))\right) & \frac{d^2}{dy^2}(f(x,y))\end{bmatrix}\right.$$

done

$$D(x,y)\mid\left\{x=\frac{2}{3},\ y=\frac{1}{3}\right\}$$

3

$$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))\mid\left\{x=\frac{2}{3},\ y=\frac{1}{3}\right\}$$

2

$$f(x,y)\mid\left\{x=\frac{2}{3},\ y=\frac{1}{3}\right\}$$

$$-\frac{1}{3}$$

**absolutes Min**$\left(x=\frac{2}{3}, y=\frac{1}{3}, z=-\frac{1}{3}\right)$ ohne NB innerhalb des Einheitskreises.

**Randextrema:**

$f(x,y)\,|\,\{x=\cos(t), y=\sin(t)\}$

$$(\cos(t))^2+(\sin(t))^2-\cos(t)\cdot\sin(t)-\cos(t)$$

simplify(ans)

$$-\cos(t)\cdot\sin(t)-\cos(t)+1$$

Define $z(t)=-\cos(t)\cdot\sin(t)-\cos(t)+1$

done

$\frac{d}{dt}(z(t))=0$

$$-(\cos(t))^2+(\sin(t))^2+\sin(t)=0$$

simplify(ans)

$$\sin(t)-\cos(2\cdot t)=0$$

solve(ans, t)

$$\left\{t=2\cdot\pi\cdot\text{constn}(1)-\frac{\pi}{2}, t=2\cdot\pi\cdot\text{constn}(2)+\frac{\pi}{6}, t=2\cdot\pi\cdot\text{constn}(\right.$$

$\frac{d^2}{dt^2}(z(t))$

$$4\cdot\cos(t)\cdot\sin(t)+\cos(t)$$

$t=-\frac{\pi}{2}$ ($x=0$, $y=-1$, $z=1$) ergibt keine Extremstelle.

$\frac{d^2}{dt^2}(z(t))=0$ (Wendestelle, Stufenpunkt)

**Rand–Minimum:** $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y=\frac{1}{2}$, $z\approx-0.299$

$\frac{d^2}{dt^2}(z(t))\,|\,t=\frac{\pi}{6}$

$$\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}$$

$z(t)\,|\,t=\frac{\pi}{6}$

$$\frac{-3\cdot\sqrt{3}}{4}+1$$

approx(ans)

$$-0.2990381057$$

$\cos(t)\,|\,t=\frac{\pi}{6}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\sin(t)\,|\,t=\frac{\pi}{6}$

$$\frac{1}{2}$$

**Rand−Maximum:** $x=\frac{-\sqrt{3}}{2}$, $y=\frac{1}{2}$, $z\approx 2.299$

$\frac{d^2}{dt^2}(z(t))\,|\,t=\frac{5\pi}{6}$

$$\frac{-3\cdot\sqrt{3}}{2}$$

$z(t)\,|\,t=\frac{5\pi}{6}$

$$\frac{3\cdot\sqrt{3}}{4}+1$$

approx(ans)

$$2.299038106$$

$\cos(t)\,|\,t=\frac{5\pi}{6}$

$$\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$\sin(t)|t=\frac{5\pi}{6}$

$$\frac{1}{2}$$

stop

**Lagrange-Methode:** NB als Rand des Einheitskreises

Define $F(x,y,\lambda)=x^2-x*y+y^2-x+\lambda*(x^2+y^2-1)$

done

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{d}{dx}(F(x,y,\lambda))=0\\ \frac{d}{dy}(F(x,y,\lambda))=0\\ \frac{d}{d\lambda}(F(x,y,\lambda))=0\end{array}\right|_{x,y,\lambda}$$

$$\left\{\{x=0,y=-1,\lambda=-1\},\left\{x=\frac{-\sqrt{3}}{2},y=\frac{1}{2},\lambda=\frac{-\sqrt{3}}{2}-1\right\},\left\{x=\frac{\sqrt{3}}{2}\right.\right.$$

Nutzung der "geränderten" Funktionaldeterminante:

$$\text{Define } D(x,y,\lambda)=-\det\left(\begin{bmatrix}0 & \frac{d}{dx}(x^2+y^2-1)\\ \frac{d}{dx}(x^2+y^2-1) & \frac{d^2}{dx^2}(F(x,y,\lambda)\\ \frac{d}{dy}(x^2+y^2-1) & \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}(F(x,y,\right.\end{bmatrix}\right.$$

done

$D(x,y,\lambda)$

$$8\cdot\lambda\cdot x^2+8\cdot\lambda\cdot y^2+8\cdot x^2+8\cdot y^2+8\cdot x\cdot y$$

Define $D(x,y,\lambda)=8\cdot\lambda\cdot x^2+8\cdot\lambda\cdot y^2+8\cdot x^2+8\cdot y^2+8\cdot x\cdot y$

done

$D(x,y,\lambda)|\{x=0,y=-1,\lambda=-1,\lambda=-1\}$

$0$

keine Aussage möglich (weitere Untersuchung)

===========

$D(x, y, \lambda)<0 \mid \left\{x=\frac{-\sqrt{3}}{2}, y=\frac{1}{2}, \lambda=\frac{-\sqrt{3}}{2}-1\right\}$

$$-8\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)-2\cdot\sqrt{3}+8<0$$

simplify(ans)

$$-6\cdot\sqrt{3}<0$$

**Randmaximum**

============

$D(x, y, \lambda)>0 \mid \left\{x=\frac{\sqrt{3}}{2}, y=\frac{1}{2}, \lambda=\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right\}$

$$-8\cdot\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+1\right)+2\cdot\sqrt{3}+8>0$$

simplify(ans)

$$6\cdot\sqrt{3}>0$$

**Randminimum**

============

stop

**Aufg. 4.3.** 19a)

Durch die Messpunkte

$x_i$ | 2 | 4 | 6

$y_i$ | 2 | 3 | 7

soll eine Ausgleichskurve vom folgenden Typ gelegt werden:

a) $y=f(x)=ae^{bx}$ b) $y=g(x)=ax^{b}$.

Bestimmen Sie jeweils deren Koeffzienten. Welche der

Ausgleichskurven kann als bessere Lösung angesehen werden (Begründung)?

**Hinweis:** vereinfachte näherungsweise Lösung durch quasilineare Regression (Logarithmieren):

a) Y=ln(y)=ln(a)+b*x=A+b*x bzw.

b) Y=ln(y)=ln(a)+b*ln(x)=A+b*X

mit den Messpunkten

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2 | 4 | 6 |
| b) $X_i$=ln($x_i$) | ln(2) | ln(4) | ln(6) |
| a) $Y_i$=ln($y_i$) | ln(2) | ln(3) | ln(7) |

Der Parameter a ergibt sich dann aus $a=e^{A}$.

**direkte Lösung (ohne Logarithmieren):**

**Exponentielle Regression**

seq(x,x,2,6,2)→xliste

{2,4,6}

{2,3,7}→yliste

{2,3,7}

Define $f(a,b,x)=ae^{b*x}$

done

sum((yliste−f(a,b,xliste))^2)

$$\left(a\cdot e^{6\cdot b}-7\right)^2+\left(a\cdot e^{4\cdot b}-3\right)^2+\left(a\cdot e^{2\cdot b}-2\right)^2$$

Define $F(a,b)=\left(a\cdot e^{6\cdot b}-7\right)^2+\left(a\cdot e^{4\cdot b}-3\right)^2+\left(a\cdot e^{2\cdot b}-2\right)^2$

done

$\frac{d}{da}(F(a,b))=0$

$$2\cdot a\cdot e^{12\cdot b}+2\cdot a\cdot e^{8\cdot b}-14\cdot e^{6\cdot b}+2\cdot a\cdot e^{4\cdot b}-6\cdot e^{4\cdot b}-4\cdot e^{2\cdot b}=0$$

solve(ans, a)

$$\left\{a=\frac{(7\cdot e^{4\cdot b}+3\cdot e^{2\cdot b}+2)\cdot e^{-2\cdot b}}{e^{8\cdot b}+e^{4\cdot b}+1}\right\}$$

$$\frac{d}{db}(F(a,b))=0$$

$$12\cdot a^2\cdot e^{12\cdot b}+8\cdot a^2\cdot e^{8\cdot b}-84\cdot a\cdot e^{6\cdot b}+4\cdot a^2\cdot e^{4\cdot b}-24\cdot a\cdot e^{4\cdot}$$

$$ans|a=\frac{(7\cdot e^{4\cdot b}+3\cdot e^{2\cdot b}+2)\cdot e^{-2\cdot b}}{e^{8\cdot b}+e^{4\cdot b}+1}$$

$$\frac{12\cdot(7\cdot e^{4\cdot b}+3\cdot e^{2\cdot b}+2)^2\cdot e^{8\cdot b}}{(e^{8\cdot b}+e^{4\cdot b}+1)^2}+\frac{8\cdot(7\cdot e^{4\cdot b}+3\cdot e^{2\cdot b}+2)^2\cdot}{(e^{8\cdot b}+e^{4\cdot b}+1)^2}$$

simplify(ans)

$$\frac{12\cdot(e^{8\cdot b}-e^{6\cdot b}-4\cdot e^{2\cdot b}-1)\cdot(7\cdot e^{4\cdot b}+3\cdot e^{2\cdot b}+2)\cdot e^{2\cdot b}}{(e^{4\cdot b}+e^{2\cdot b}+1)^2\cdot(e^{4\cdot b}-e^{2\cdot b}+1)^2}=0$$

alle Faktoren positiv bis auf $e^{8\cdot b}-e^{6\cdot b}-4\cdot e^{2\cdot b}-1$

solve($e^{8\cdot b}-e^{6\cdot b}-4\cdot e^{2\cdot b}-1=0$, b)

$$\{b=0.3610019597\}$$

$$a=\frac{(7\cdot e^{4\cdot b}+3\cdot e^{2\cdot b}+2)\cdot e^{-2\cdot b}}{e^{8\cdot b}+e^{4\cdot b}+1}|b=0.3610019597$$

$$a=\frac{\left(7\cdot e^{\frac{13936072}{9650967}}+3\cdot e^{\frac{6968036}{9650967}}+2\right)\cdot e^{-\frac{6968036}{9650967}}}{e^{\frac{27872144}{9650967}}+e^{\frac{13936072}{9650967}}+1}$$

approx(ans)

$$a=0.7924642687$$

Define $y1(x)=0.7924642687e^{0.3610019597x}$

done

Mittlerer quadratischer Fehler (**M**ean **S**quare **e**rror)

MSe1:=approx(sum((yliste−y1(xliste))$^2$))

0.2717806948

**Nun Potenzregression:**

Define f(a,b,x)=a*x$^b$

done

sum((yliste−f(a,b,xliste))$^2$)

$$(6^b\cdot a-7)^2+(4^b\cdot a-3)^2+(2^b\cdot a-2)^2$$

Define $F(a,b)=(6^b\cdot a-7)^2+(4^b\cdot a-3)^2+(2^b\cdot a-2)^2$

done

$\frac{d}{da}(F(a,b))=0$

$$2^{2\cdot b+1}\cdot a+2\cdot 6^{2\cdot b}\cdot a+2\cdot 4^{2\cdot b}\cdot a-2^{b+2}-14\cdot 6^b-6\cdot 4^b=0$$

solve(ans,a)

$$\left\{a=\frac{2^{b+2}+14\cdot 6^b+6\cdot 4^b}{2^{2\cdot b+1}+2\cdot 6^{2\cdot b}+2\cdot 4^{2\cdot b}}\right\}$$

$\frac{d}{db}(F(a,b))=0$

$$4^{2\cdot b+1}\cdot a^2\cdot \ln(2)+2^{2\cdot b+1}\cdot a^2\cdot \ln(2)+2\cdot 6^{2\cdot b}\cdot a^2\cdot \ln(3)+2\cdot($$

ans|$a=\frac{2^{b+2}+14\cdot 6^b+6\cdot 4^b}{2^{2\cdot b+1}+2\cdot 6^{2\cdot b}+2\cdot 4^{2\cdot b}}$

$$\frac{4^{2\cdot b+1}\cdot(2^{b+2}+14\cdot 6^b+6\cdot 4^b)^2\cdot \ln(2)}{(2^{2\cdot b+1}+2\cdot 6^{2\cdot b}+2\cdot 4^{2\cdot b})^2}+\frac{2^{2\cdot b+1}\cdot(2^{b+2}+1}{(2^{2\cdot b+1}+2\cdot(}$$

simplify(ans)

$$\frac{-4\cdot(14\cdot 2^{3\cdot b+1}\cdot 6^b\cdot \ln(3)+42\cdot 6^{3\cdot b}\cdot 4^b\cdot \ln(3)+42\cdot 4^{3\cdot b}\cdot 6^b}{}$$

numerator(getLeft(ans))=0

$$4\cdot\left(9\cdot 4^{4\cdot b+1}\cdot\ln(2)-36\cdot 4^{4\cdot b}\cdot\ln(2)-14\cdot 2^{3\cdot b+1}\cdot 6^{b}\cdot\ln(3)\cdot\right.$$

solve(ans, b)

{b=1.50697388}

$$a=\frac{2^{b+2}+14\cdot 6^{b}+6\cdot 4^{b}}{2^{2\cdot b+1}+2\cdot 6^{2\cdot b}+2\cdot 4^{2\cdot b}}\mid b=1.50697388$$

$$a=\frac{2^{\frac{12733994}{3631049}}+14\cdot 6^{\frac{5471896}{3631049}}+6\cdot 4^{\frac{5471896}{3631049}}}{2^{\frac{14574841}{3631049}}+2\cdot 6^{\frac{10943792}{3631049}}+2\cdot 4^{\frac{10943792}{3631049}}}$$

approx(ans)

a=0.4548596024

Define y2(x)=0.4548596024x$^{1.50697388}$

done

Mittlerer quadratischer Fehler (**M**ean **S**quare **e**rror)

MSe2:=approx(sum((yliste−y2(xliste))$^{2}$))

1.008069666

approx(MSe1<MSe2)

0.2717806948<1.008069666

**Damit ist die exponentielle Regression besser als die Potenzregression.**

**Näherungslösung als quasilineare Regression:**

**Nutzung der TR-Befehle** ExpReg **bzw.** PowerReg

ExpReg xliste, yliste

done

DispStat

done

======================

Exp. Regression

y=a•$e$^(b•x)

a = 0.9931505

b = 0.3131907

r = 0.9798919

$r^2$ = 0.9601881

MSe = 0.032536

======================

PowerReg xliste, yliste

done

DispStat

done

======================

Potenz-Reg.

y=a•x^b

a = 0.8620828

b = 1.0805126

r = 0.9390549

$r^2$ = 0.881824

MSe = 0.0965786

======================

**Berechnung von MSe1 und MSe2 mit den geschätzten Koeffizienten aus der quasilin. Regession als MSe3 und MSe4:**

Define $y3(x)=0.9931505 * e^{0.3131907x}$

done

Define $y4(x)=0.8620828*x^{1.0805126}$

done

MSe3:=approx(sum((yliste−y3(xliste))$^2$))

0.4937212061

MSe4:=approx(sum((yliste−y4(xliste))$^2$))

1.813441536

approx(MSe3<MSe4)

0.4937212061<1.813441536

approx(MSe1<MSe2)

0.2717806948<1.008069666

STAT−Editor

stop

**Aufg. 4.3.**23

Zur Ermittlung einer Messkurve, von der man weiß, dass sie eine Gerade durch Ursprung sein muss, wurden folgende Messwerte erhalten:

$x_i$ | 2 | 5 | 7 | 9

$y_i$ | 1 | 2 | 3 | 4,5

Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade.

**Lösung:** MKQ−Ansatz y=a*x

{2,5,7,9}⇒xliste

{2,5,7,9}

{1,2,3,4.5}⇒yliste

$\left\{1,2,3,\frac{9}{2}\right\}$

Define f(a,x)=a*x

done

sum((yliste−f(a,xliste))$^2$)

$$\left(9\cdot a-\frac{9}{2}\right)^2+(7\cdot a-3)^2+(5\cdot a-2)^2+(2\cdot a-1)^2$$

Define $F(a)=\left(9\cdot a-\frac{9}{2}\right)^2+(7\cdot a-3)^2+(5\cdot a-2)^2+(2\cdot a-1)^2$

done

$\frac{d}{da}(F(a))=0$

$$318\cdot a-147=0$$

solve(ans,a)

$$\left\{a=\frac{49}{106}\right\}$$

approx(ans)

{a=0.4622641509}

Define y1(x)=0.4622641509x

done

MSe1:=$\frac{1}{2}$sum((yliste−y1(xliste))$^2$)

$$\frac{51717361410279977}{378071745482046728}$$

approx(ans)

0.1367924528

STAT−Editor

stop

**Aufg. 4.4.2**

Es sei $(A)=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\leq 1; y\leq 0\}$. Unter

Verwendung von Polarkoordinaten berechne man

$$\int_{(A)} (x+y)\,dA.$$

**Lösung:**

(A) ist die untere Halbkreisfäche (Skizze!)

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^0 (r*\cos(\varphi)+r*\sin(\varphi))*r\,d\varphi\,dr$$

$$-\frac{2}{3}$$

formal: **Berechnung als Dreifachintegral:**

Hinweis: Volumenanteile unterhalb der x-y-Ebene zählen negativ, oberhalb positiv,

Gesamtbilanz hier negativ:

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \int_0^{x+y} 1\,dz\,dy\,dx$$

$$-\frac{2}{3}$$

stop

**Aufg. 4.4.** 15a)

Man berechne das Linienintegral $\int_C (xydx+y^2dy)$ für folgende Kurve: $x=\sin(t)$, $y=\cos(t)$ für $0\le t\le\pi/2$ von den Punkten $A=(0,1)$ nach $B=(1,0)$.

**Lösung:**

$$\int_C (xydx+y^2dy)=\int_{t_1}^{t_2} (x(t)y(t)dx/dt+(y(t))^2dy/dt)dt$$

$$\int_0^{\pi/2} (\sin(t)*\cos(t)*\cos(t)+(\cos(t))^2*(-\sin(t)))dt$$

0

Integrand "verschwindet":

simplify$(\sin(t)*\cos(t)*\cos(t)+(\cos(t))^2*(-\sin(t)))$

0

stop

**Aufg. 4.4.**18

Gegeben ist das ebene Kraftfeld

$\mathbf{F}=(x^2+2xy)\mathbf{e}_1+(x^2-1)\mathbf{e}_2$.

a) Man zeige, dass das Feld konservativ ist.

b) Man bestimme das Potential $V(x,y)$ des Feldes.

c) Man berechne die verrichtete Arbeit bei der Verschiebung eines Massenpunktes von $P_1=(0,0)$ nach $P_2=(1,1)$ auf einem (beliebigen) Verbindungsweg.

**Lösung:**

**a)**

Define $P(x,y)=x^2+2x*y$

done

Define $Q(x,y)=x^2-1$

done

$$\frac{d}{dy}(P(x,y))=\frac{d}{dx}(Q(x,y))$$

$2\cdot x=2\cdot x$

**b)**

$\int P(x,y)dx + C(y)$

$$C(y)+\frac{x^3}{3}+x^2\cdot y$$

$\frac{d}{dy}(ans)=Q(x,y)$

$$\frac{d}{dy}(C(y))+x^2=x^2-1$$

$C'(y)=-1$ ergibt

$C(y)=-y+c$

Somit $V(x,y)=\frac{x^3}{3}+x^2\cdot y-y+c$

**c)**

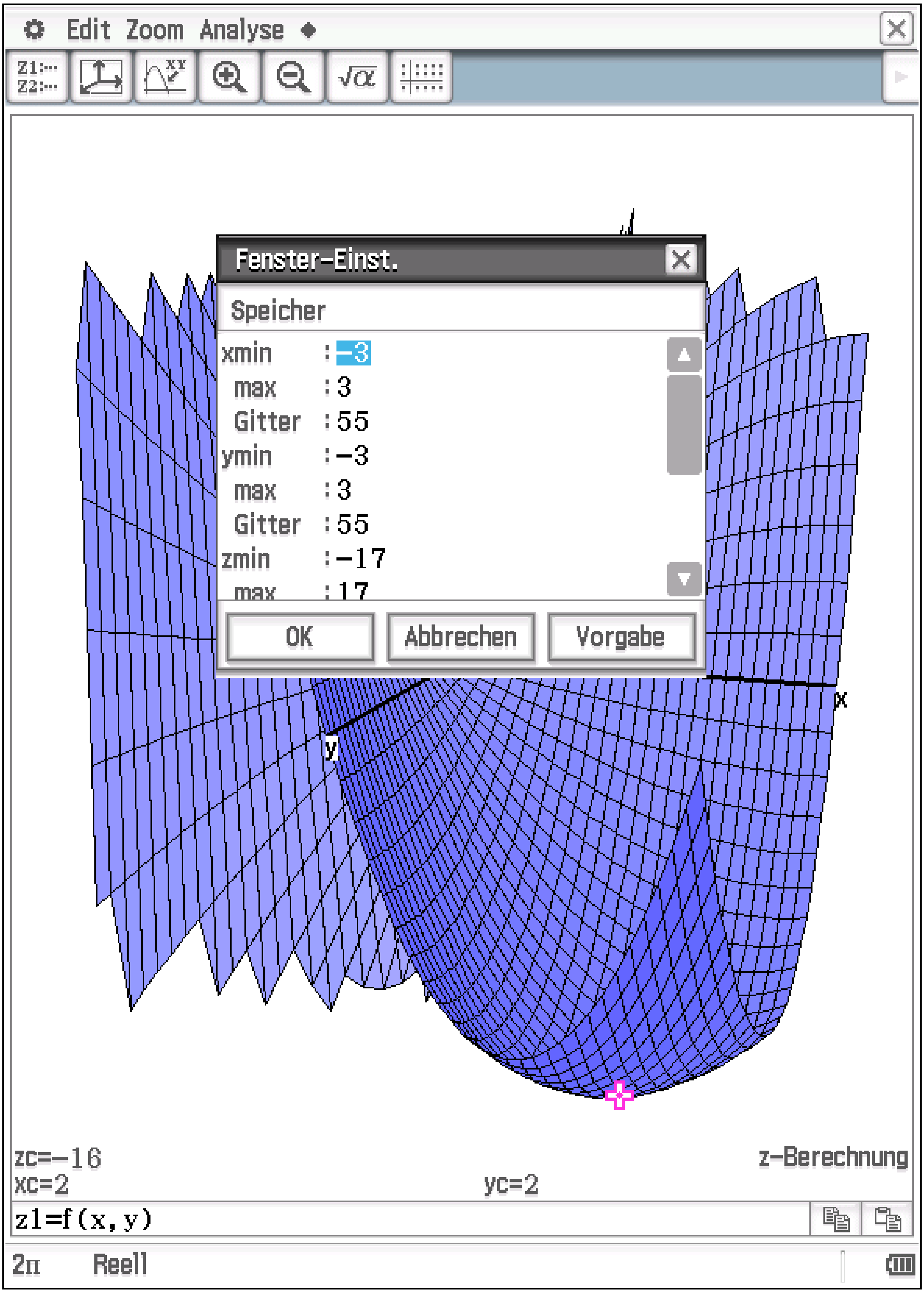
Define $V(x,y)=\frac{x^3}{3}+x^2\cdot y-y$

done

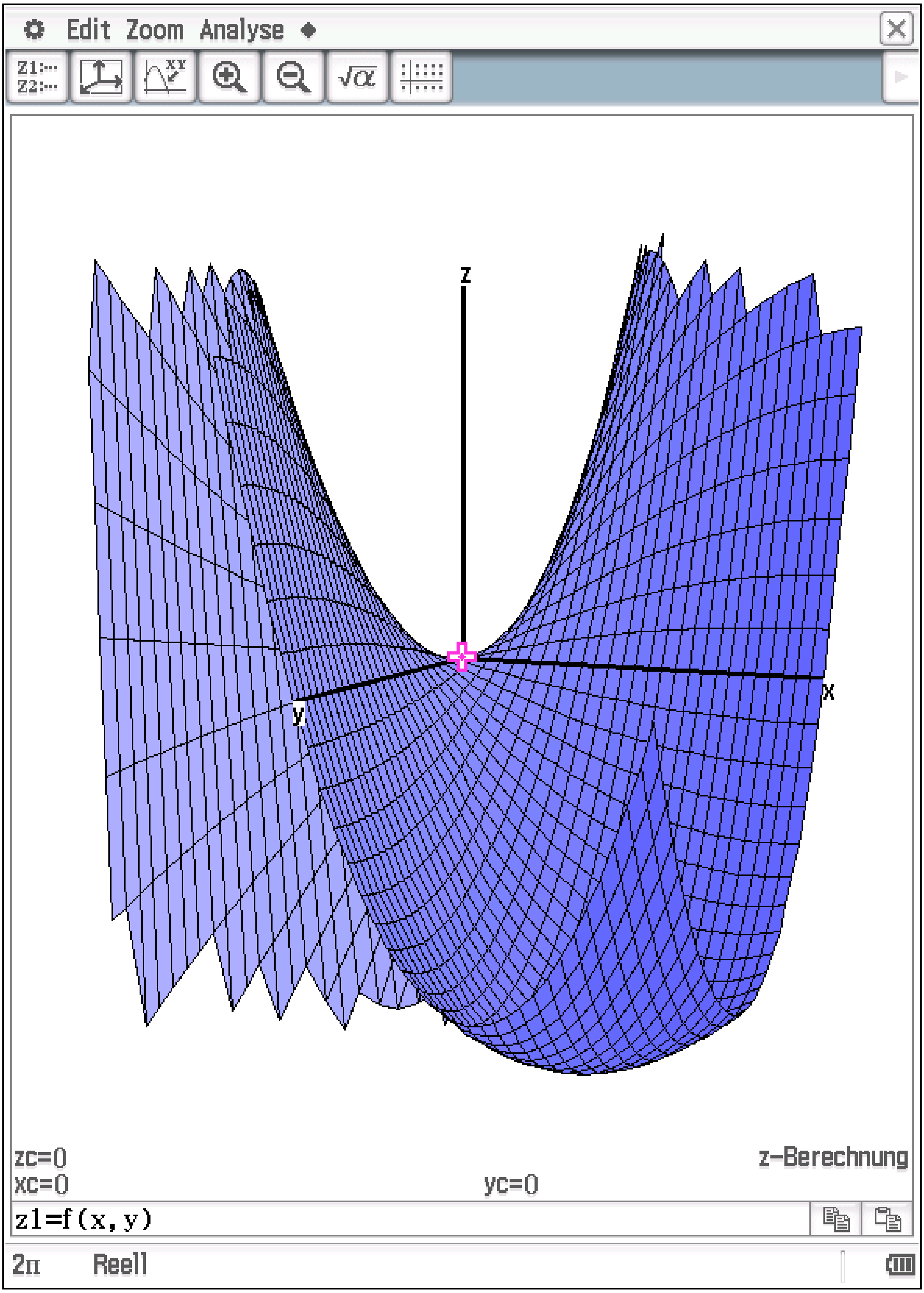
$V(1,1)-V(0,0)$

$$\frac{1}{3}$$

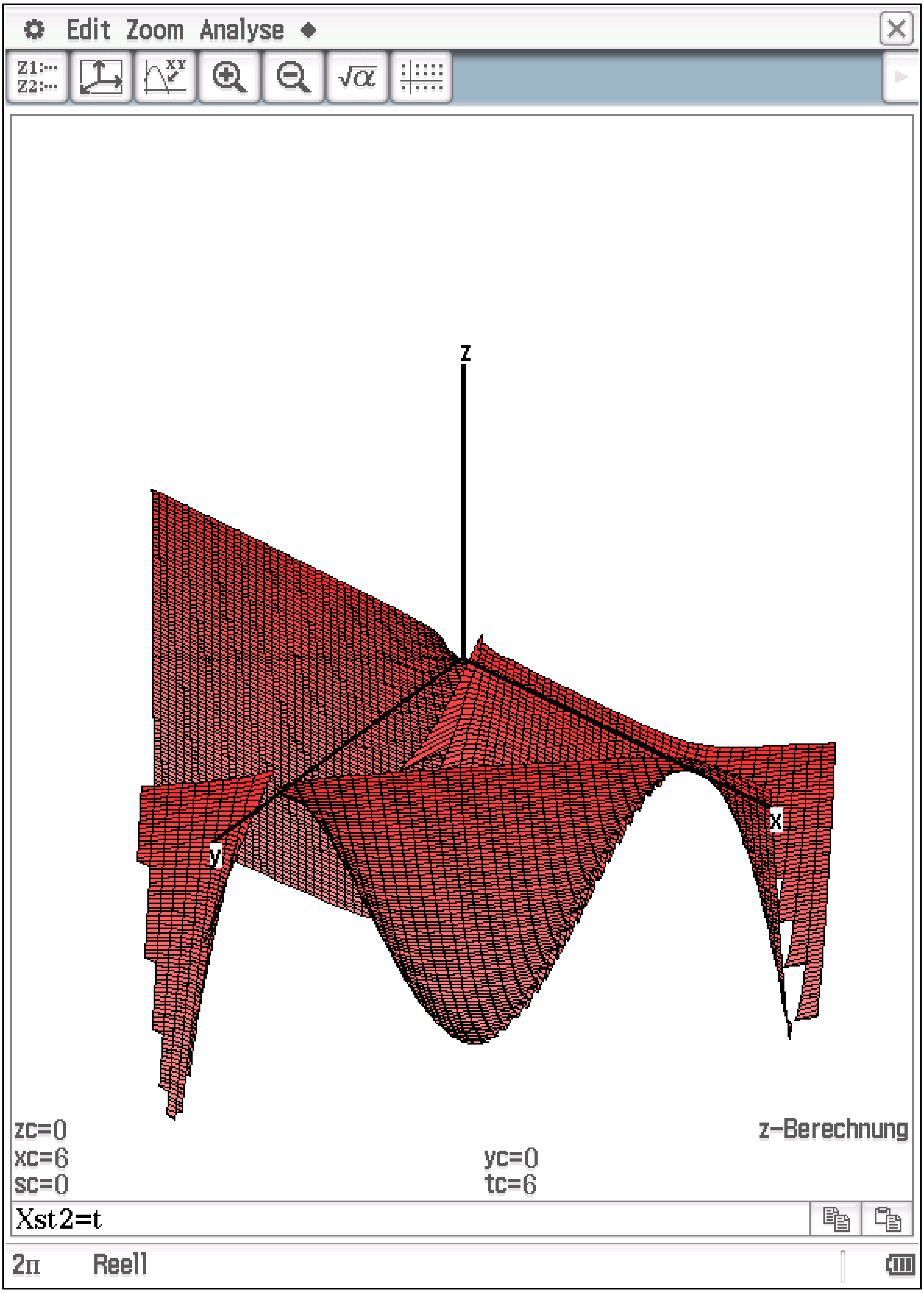
**Aufg. 4.3.**1c) **Min**(2,2,-16)



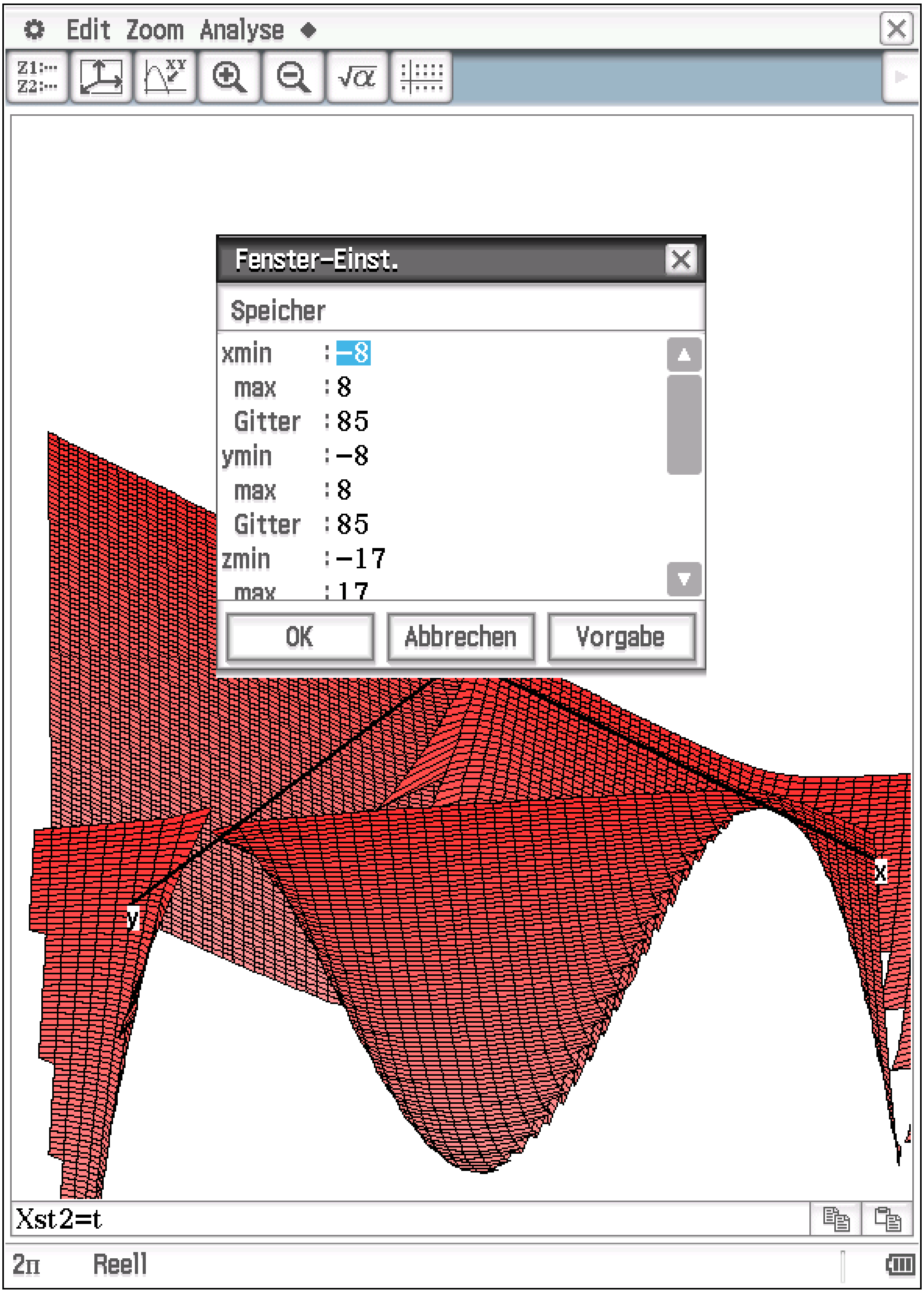
Sattelpunkt $\mathbf{S_1}(0,0,0)$ im Koordinatenursprung



Sattelpunkt $\mathbf{S_2}(6,0,0)$, Sattelpunkt $\mathbf{S_3}(0,6,0)$

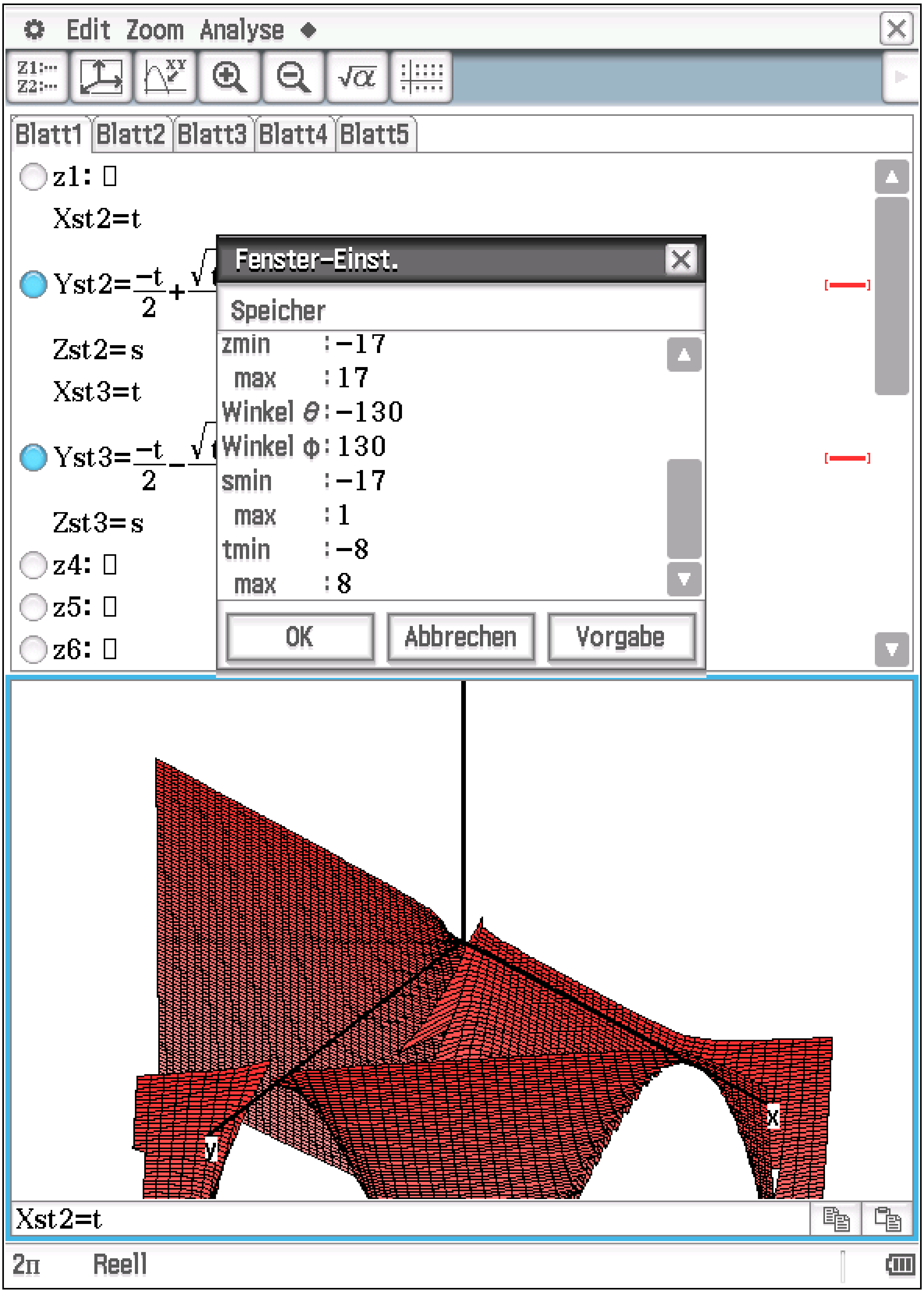


Man erkennt den Sattelpunkt auf der x-Achse (x=6, y=0, z=0)

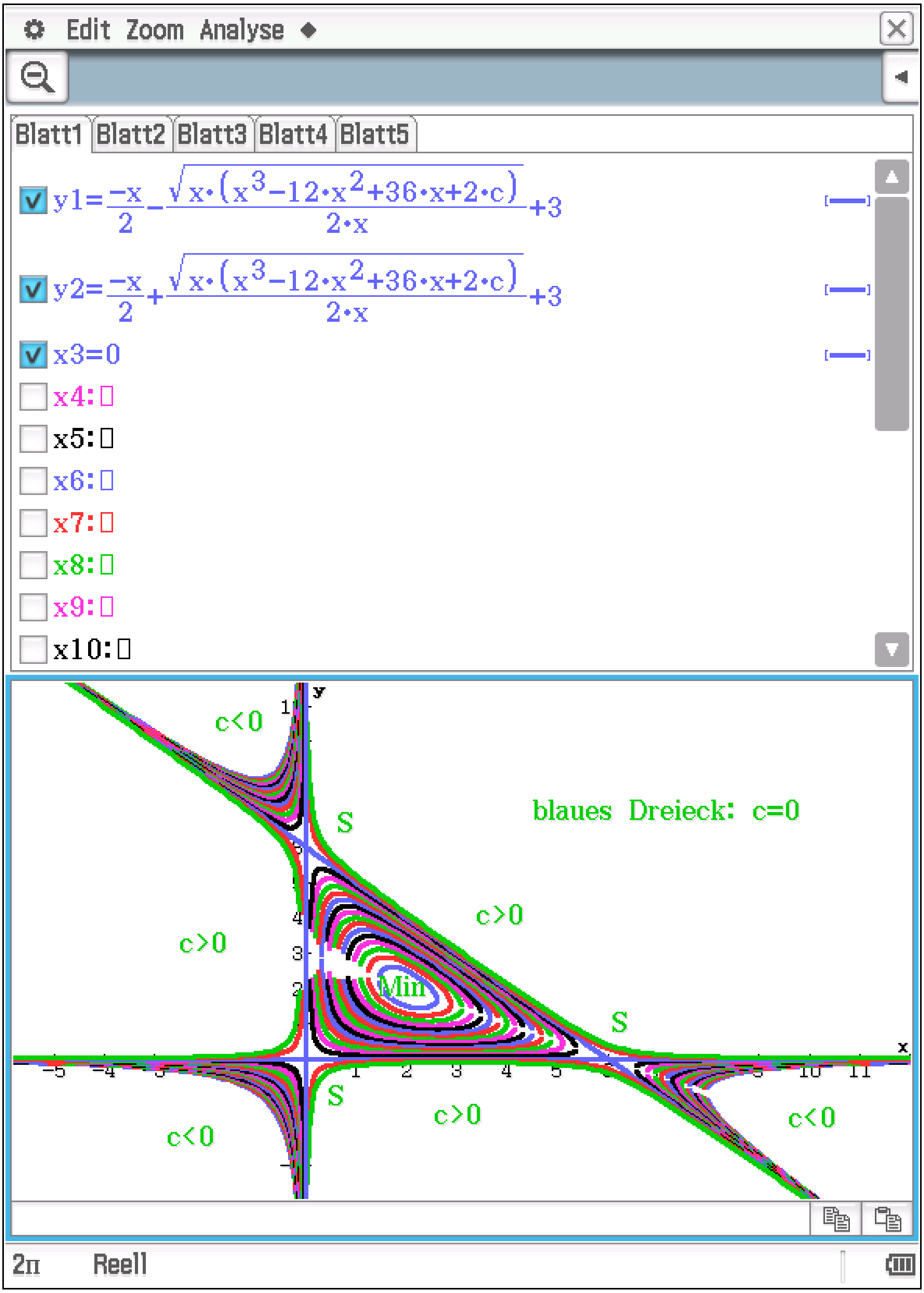


Parameter s steuert die z-Werte(Höhen),

Parameter t steuert die x-Werte

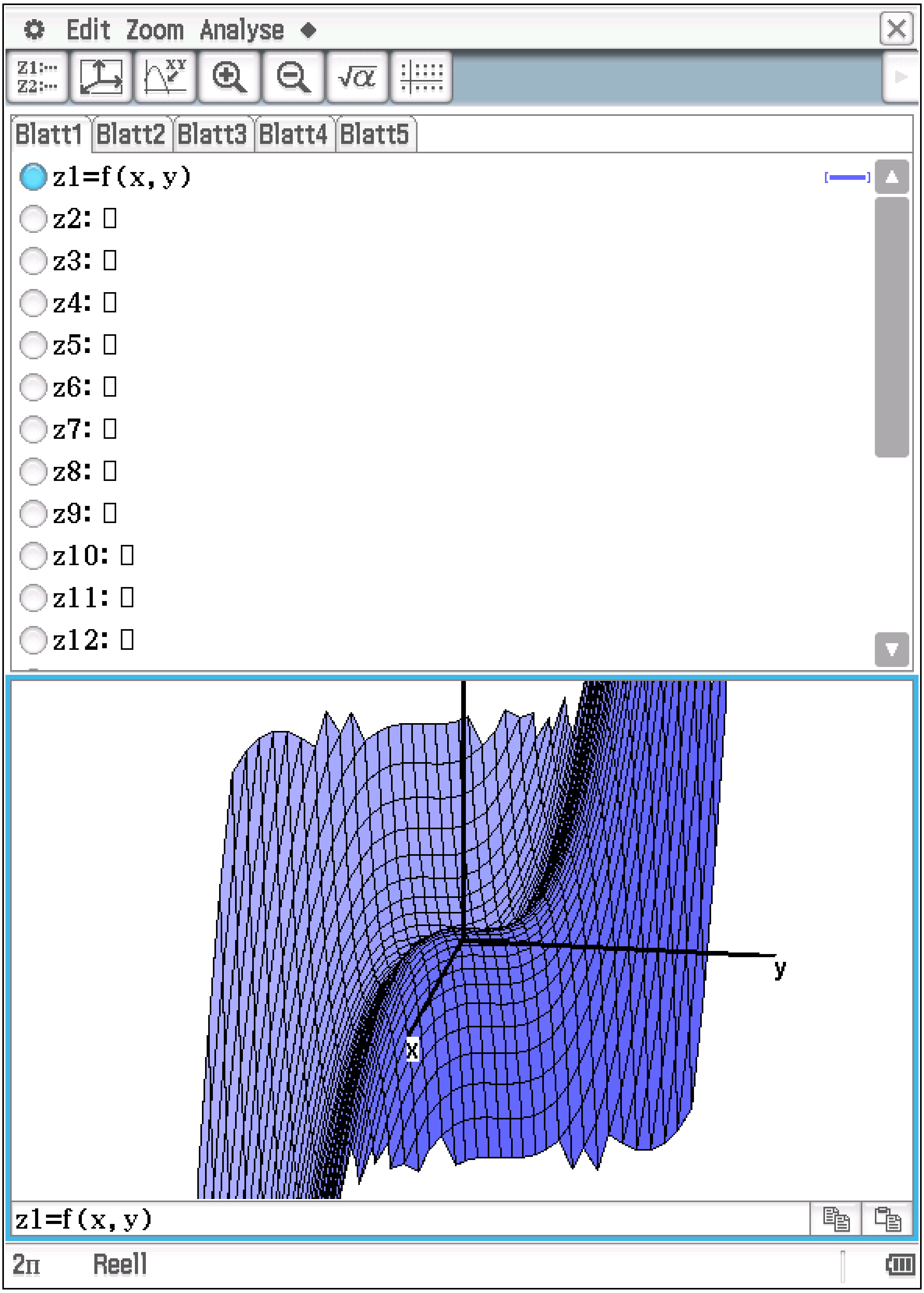


Die Karte

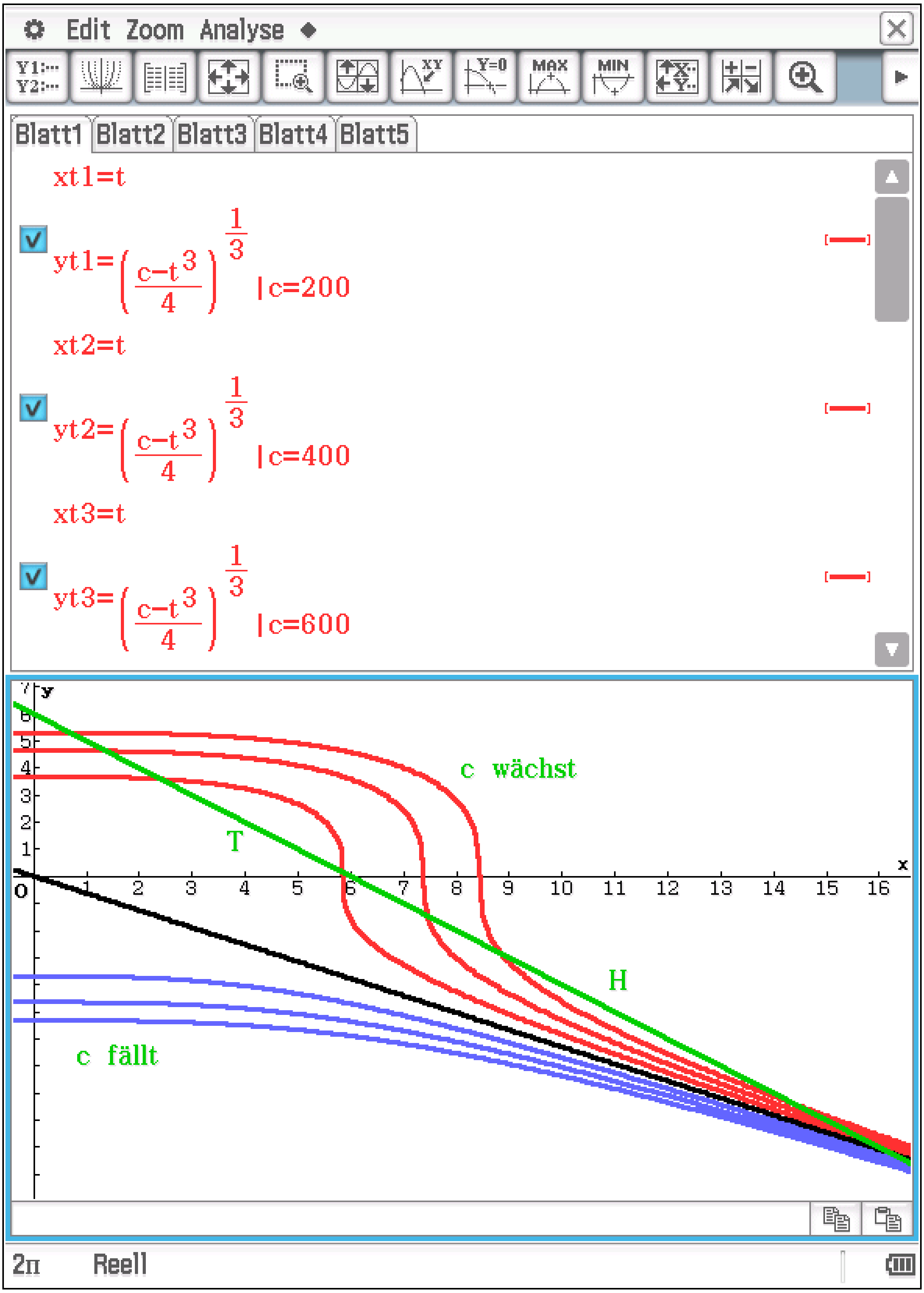


Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
y1=(−x)/2−√(x·(x³−12·x²+36·x+2·c))/(2·x)+3
y2=(−x)/2+√(x·(x³−12·x²+36·x+2·c))/(2·x)+3
x3=0
x4:
x5:
x6:
x7:
x8:
x9:
x10:
c<0
S
blaues Dreieck: c=0
c>0
c>0
Min
S
S
c>0
c<0
c<0
2π
Reell

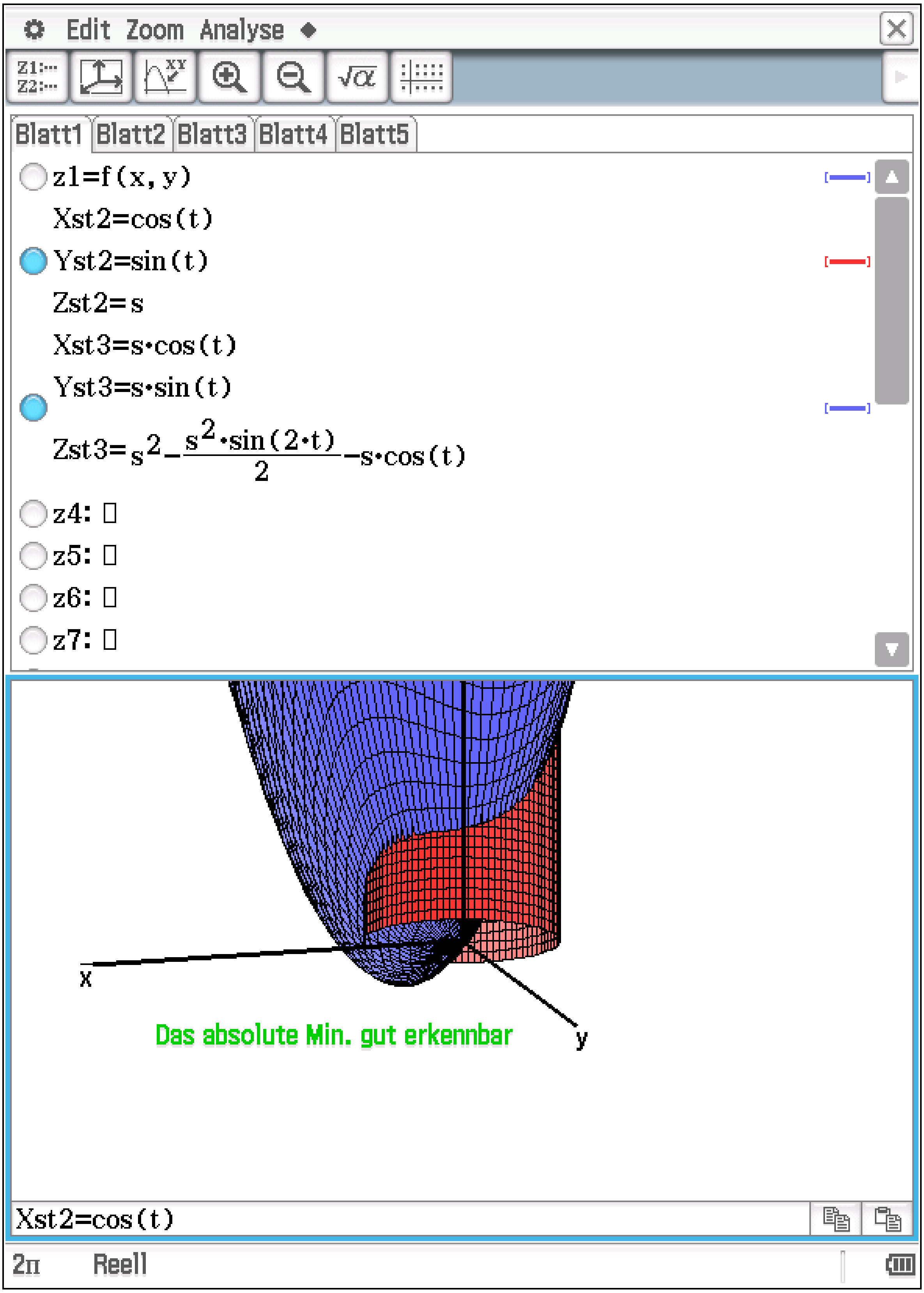
**Aufg. 4.3.**8  eine abstürzende Steilwand!

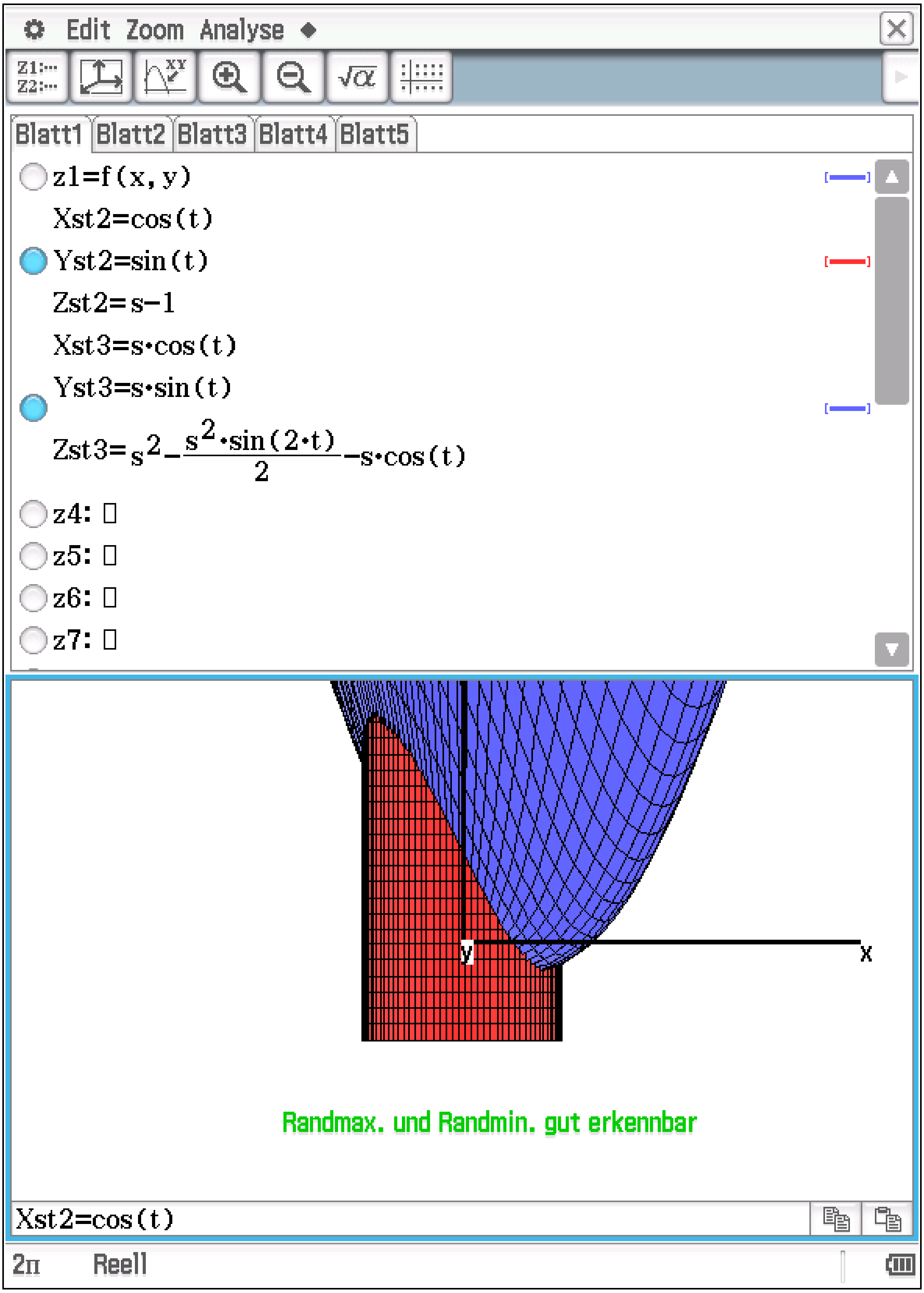


# Karte mit Höhenlinien und der NB

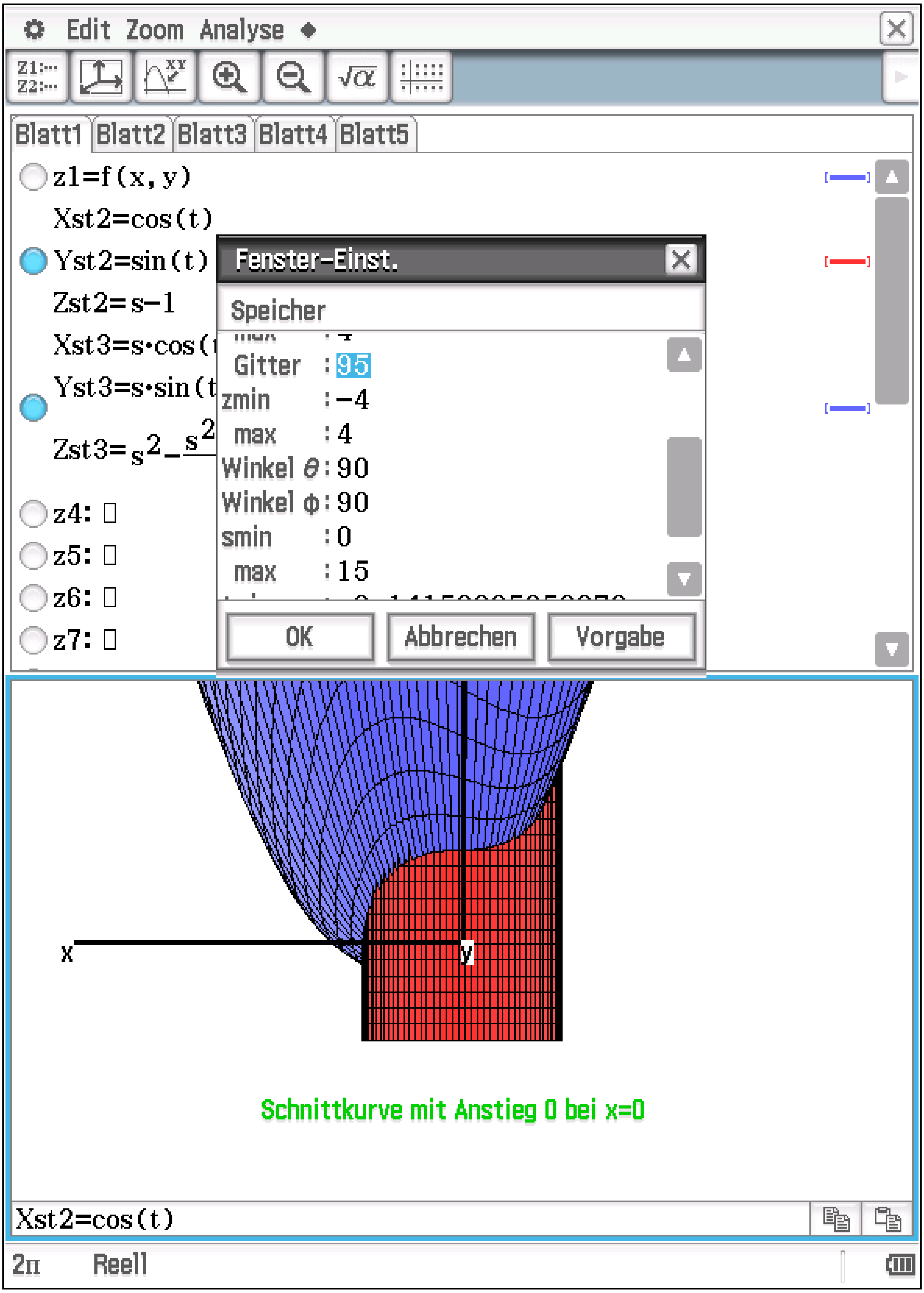


**Aufg. 4.3.**12 Betrachtung der Fläche im Kreiszylinder

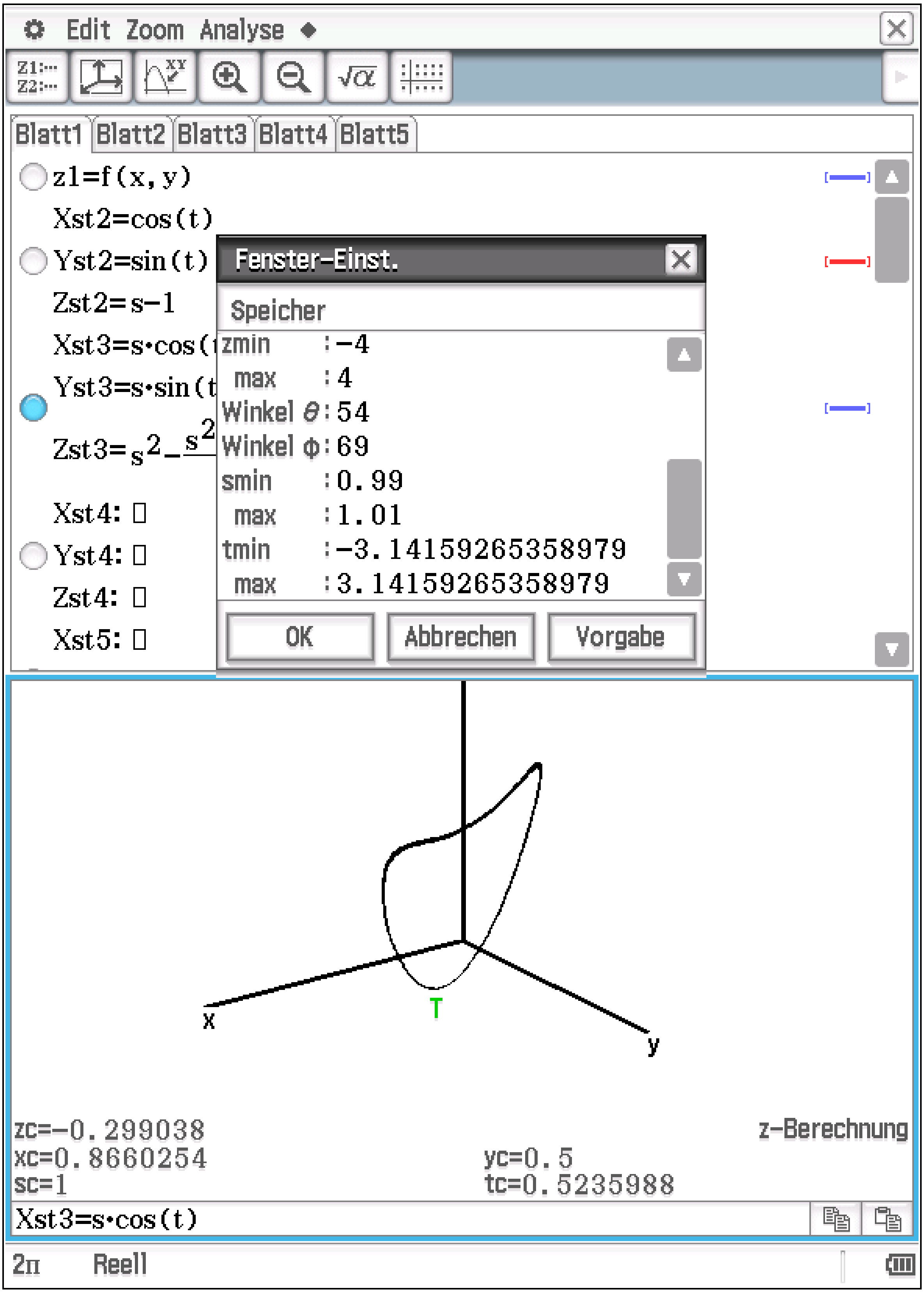


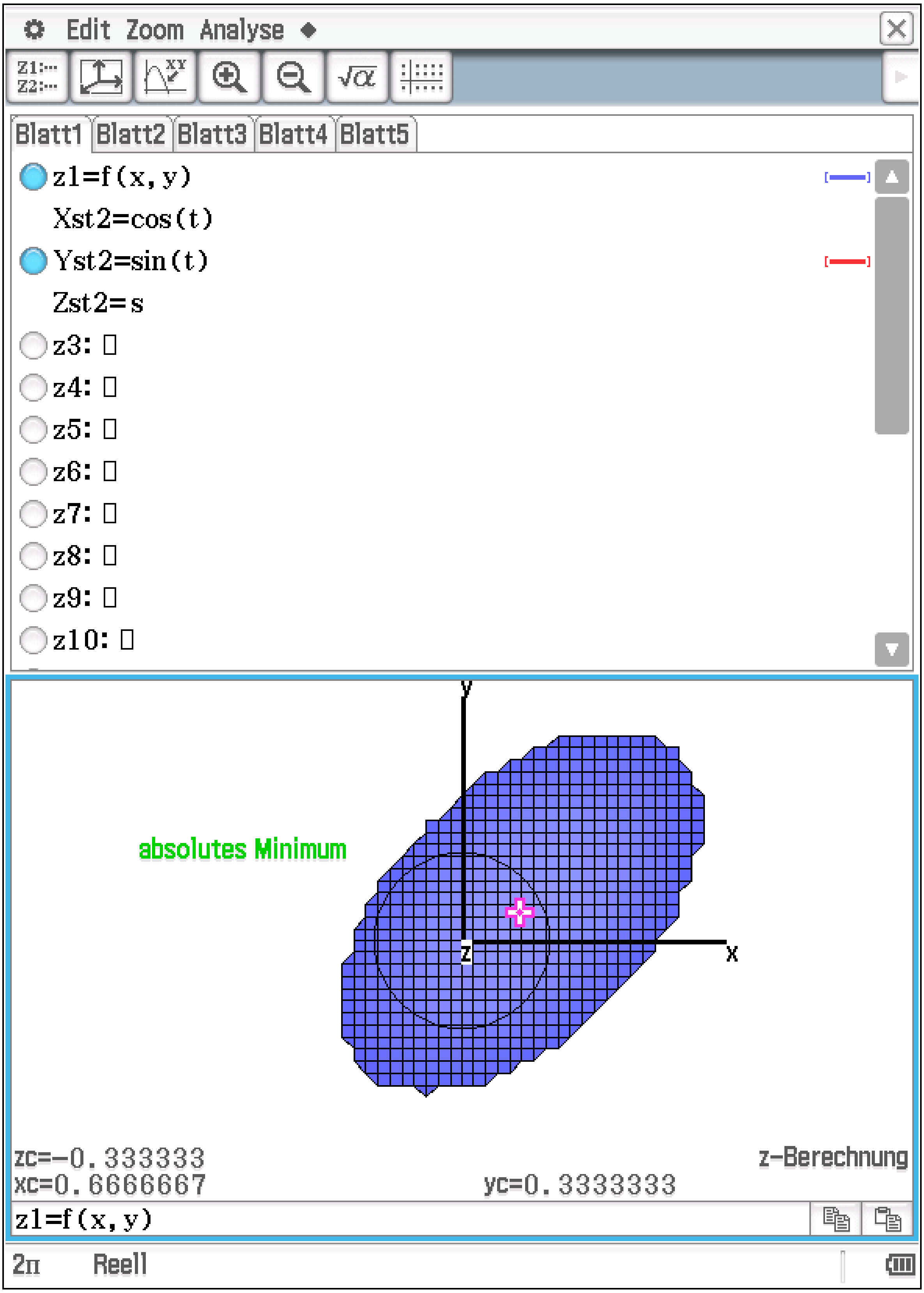

Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
z1=f(x, y)
Xst2=cos(t)
Yst2=sin(t)
Zst2=s−1
Xst3=s·cos(t)
Yst3=s·sin(t)
Zst3=s^2−(s^2·sin(2·t))/2−s·cos(t)
z4:
z5:
z6:
z7:
y
x
Randmax. und Randmin. gut erkennbar
Xst2=cos(t)
2π
Reell

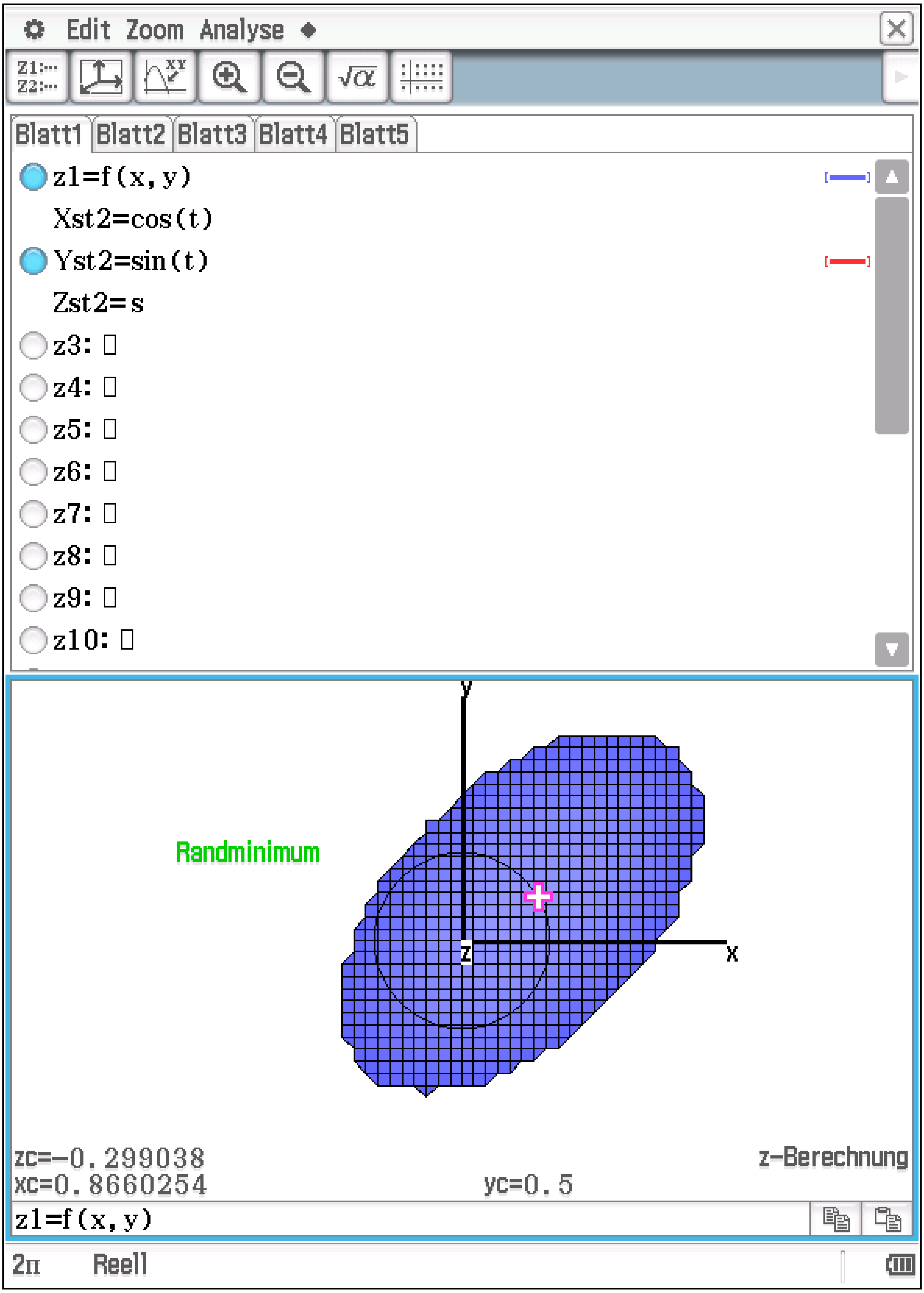
**Stufenpunkt bei x=0, y=-1, z=1**

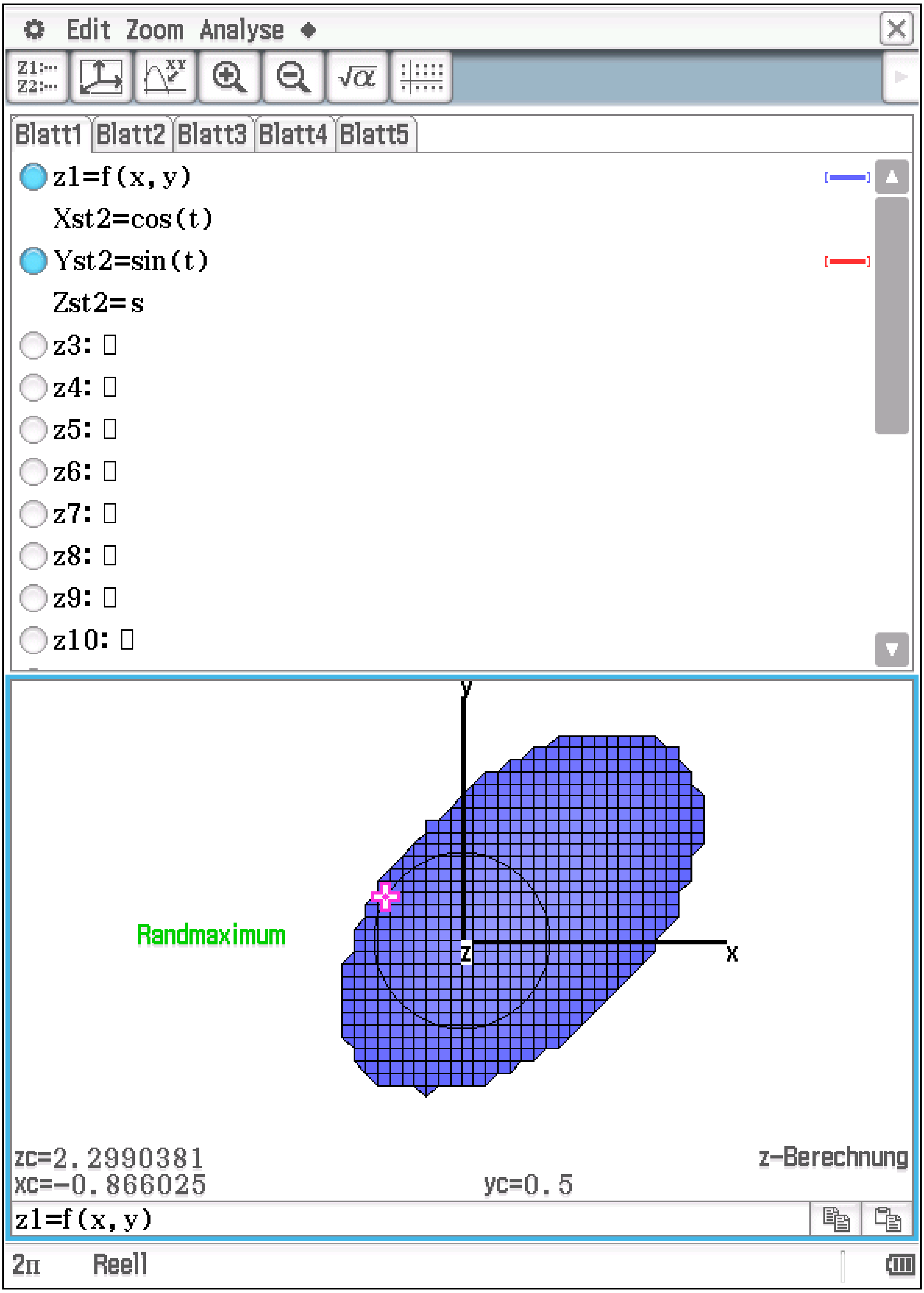


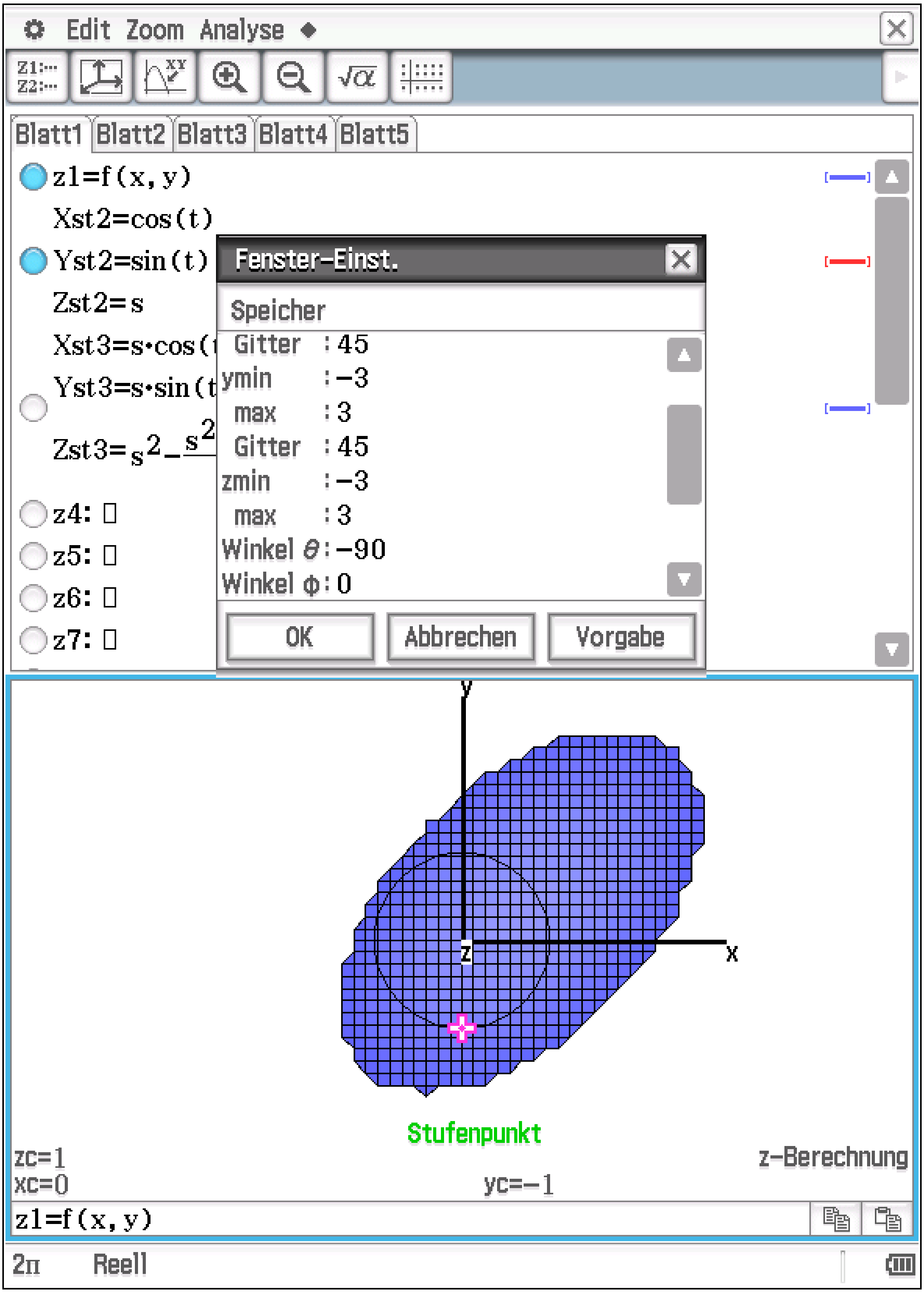
**Die Schnittkurve im Bild (T bei s=1, t=arctan(1/3^0.5))**




Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
z1=f(x,y)
Xst2=cos(t)
Yst2=sin(t)
Zst2=s
z3:
z4:
z5:
z6:
z7:
z8:
z9:
z10:
y
absolutes Minimum
z
x
zc=-0.333333
xc=0.6666667
yc=0.3333333
z-Berechnung
z1=f(x,y)
2π
Reell

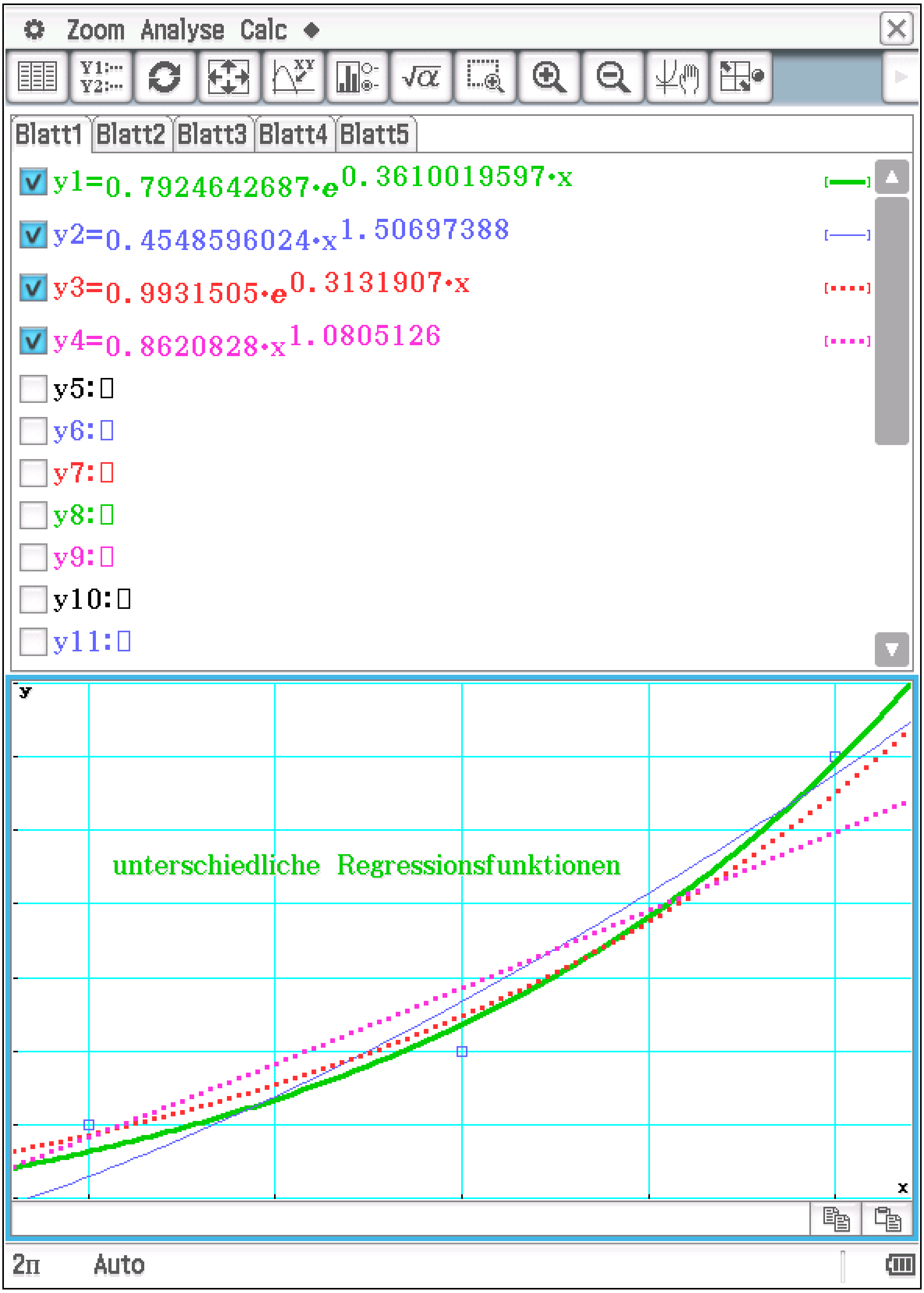

Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
z1=f(x,y)
Xst2=cos(t)
Yst2=sin(t)
Zst2=s
z3:
z4:
z5:
z6:
z7:
z8:
z9:
z10:
y
Randminimum
z
x
zc=-0.299038
xc=0.8660254
yc=0.5
z-Berechnung
z1=f(x,y)
2π
Reell

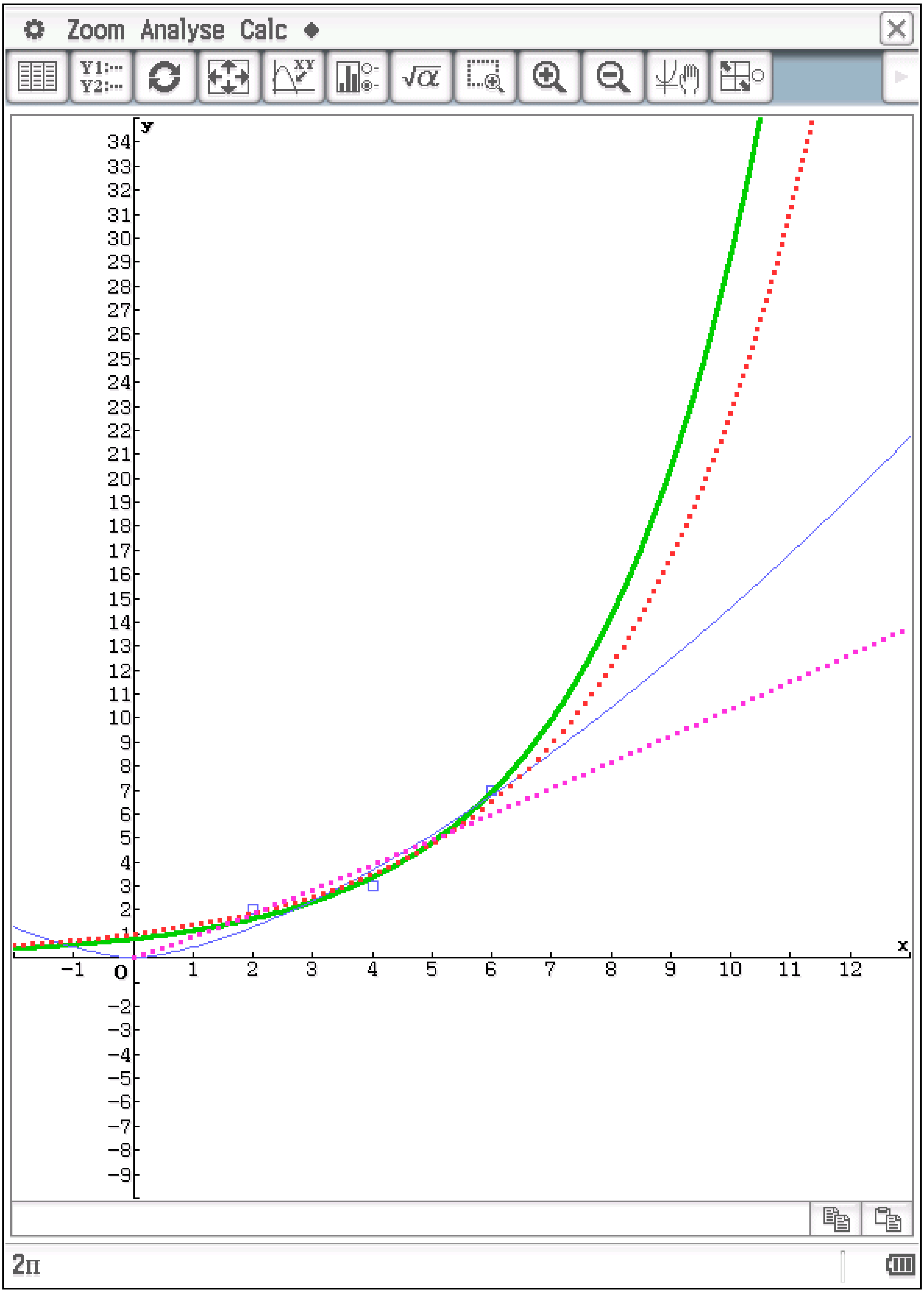

Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
z1=f(x, y)
Xst2=cos(t)
Yst2=sin(t)
Zst2=s
z3:
z4:
z5:
z6:
z7:
z8:
z9:
z10:
Randmaximum
zc=2.2990381
xc=-0.866025
yc=0.5
z-Berechnung
z1=f(x, y)
2π
Reell



Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
z1=f(x, y)
Xst2=cos(t)
Yst2=sin(t)
Zst2=s
Xst3=s·cos(t
Yst3=s·sin(t
z4:
z5:
z6:
z7:
Fenster-Einst.
Speicher
Gitter : 45
ymin : −3
max : 3
Gitter : 45
zmin : −3
max : 3
Winkel θ : −90
Winkel φ : 0
OK
Abbrechen
Vorgabe
y
x
z
Stufenpunkt
zc=1
xc=0
yc=−1
z-Berechnung
z1=f(x, y)
2π
Reell

**Aufg. 4.3.**19 nichtlineare und quasilineare Regression




Zoom Analyse Calc
Y1:
Y2:
y
x
2π

**Aufg. 4.3.**19  lineare Regression y=a*x (mit b=0)