SS2018 - 3.Übung - Prof.Paditz

Aufg. 3.3.

6a),8,13a),24,28,31,33g),33h),37g),42

Aufg. 3.2.6a) (Wiederholung)

Für das Gleichungssystem

$$2x_1 \qquad - 4x_4+3x_5 -x_6 = 10$$

$$-x_2 + \quad x_4-2x_5 \qquad = 2$$

$$3x_3+2x_4-3x_5+4x_6 = 7$$

gebe man die allgemeine Lösung an.

Lösung: Austauschverfahren

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 & 3 & -1 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -3 & 4 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow ST$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 & 3 & -1 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -3 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(ST,1,1)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 5 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(T1,2,1)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -3 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(T2,3,1)

done

matnew⇒T3

$$\begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 5 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{ET} & x_4=r & x_5=s & x_6=t & 1 \\ x_1 & 2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 5 \\ x_2 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ x_3 & -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

Lösung im $\mathbf{R}^6$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = r \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ \frac{7}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbf{R}.$$

andere Lösungsdarstellung: (1 als Pivot nutzen)

ST

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 & 3 & -1 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -3 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

x_6 geht in Zeile 1:

LinEqSys(ST, 1, 6)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 & 3 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 8 & 0 & 3 & -14 & 9 & -47 \end{bmatrix}$$

x_4 geht in Zeile 2:

LinEqSys(T1, 2, 4)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & -5 & -18 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 8 & -14 & 3 & -19 & -75 \end{bmatrix}$$

x_3 geht in Zeile 3:

LinEqSys(T2, 3, 3)

done

matnew⇒T3

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -5 & -18 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -\frac{8}{3} & \frac{14}{3} & \frac{19}{3} & 25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ET & x_1=3u & x_2=3v & x_5=3w & 1 \\ x_6 & 2 & -4 & -5 & -18 \\ x_4 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ x_3 & -\frac{8}{3} & \frac{14}{3} & \frac{19}{3} & 25 \end{bmatrix}$$

Lösung: (ganzzahlig)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = u\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + v\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 14 \\ 3 \\ 0 \\ -12 \end{bmatrix} + w\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 19 \\ 6 \\ 3 \\ -15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \\ 2 \\ 0 \\ -18 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u, v, w \in R.}$$

Probe:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}\cdot\left(r\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\cdot\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ \frac{7}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 2\cdot\left(2\cdot r-\frac{3\cdot s}{2}+\frac{t}{2}+5\right)-4\cdot r+3\cdot s-t \\ 2 \\ -3\cdot\left(\frac{2\cdot r}{3}-s+\frac{4\cdot t}{3}-\frac{7}{3}\right)+2\cdot r-3\cdot s+4\cdot t \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \left(u \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + v \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 14 \\ 3 \\ 0 \\ -12 \end{bmatrix} + w \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 19 \\ 6 \\ 3 \\ -15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \\ 2 \\ 0 \\ -18 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} -4 \cdot (3 \cdot v + 6 \cdot w + 2) + 12 \cdot v + 24 \cdot w + 18 \\ 2 \\ 4 \cdot (6 \cdot u - 12 \cdot v - 15 \cdot w - 18) - 3 \cdot (8 \cdot u - 14 \cdot v - 19 \cdot w - 25) + 2 \cdot (3 \cdot v \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Aufg. 3.2.8 (Wiederholung, vgl. 1.Übung)

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$-2tx_1 + tx_2 + 9x_3 = 6$$

$$2x_1 + 2x_2 + tx_3 = 1$$

a) Für welche Werte $t \in \mathbf{R}$ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?

b) Für welche Werte $t \in \mathbf{R}$ existieren unendlich viele Lösungen?

c) Für welche Werte $t \in \mathbf{R}$ existieren keine Lösungen?

d) Man berechne die Lösung für $t=1$.

e) Man berechne die Lösung zu b).

f) Wie können die Ergebnisse von a), b) und c) geometrisch interpretiert werden?

Lösung:

$A:=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2t & t & 9 \\ 2 & 2 & t \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2\cdot t & t & 9 \\ 2 & 2 & t \end{bmatrix}$$

$b:=\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

det(A)≠0

$$4\cdot t^2-6\cdot t-18\neq 0$$

solve(ans, t)

$$\left\{t\neq 3, t\neq -\frac{3}{2}\right\}$$

a) für $t\neq 3, t\neq -\frac{3}{2}$ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

b) für **t=3** ex. eine mehrdeutige Lösung (Ranggleichheit)

rank(A|t=3)

$$2$$

augment(A, b)⇒Ab

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2\cdot t & t & 9 & 6 \\ 2 & 2 & t & 1 \end{bmatrix}$$

rank(Ab|t=3)

$$2$$

c) für $t=-\frac{3}{2}$ ex. keine Lösung (Rangerhöhung)

rank$(A|t=-\frac{3}{2})$

2

rank$(Ab|t=-\frac{3}{2})$

3

d) t=1

$A^{-1}*b|t=1$

$$\begin{bmatrix} -\frac{7}{10} \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

e) t=3

rref(Ab|t=3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_3=s$, $x_2=-2s+1$, $x_1=0.5s-0.5$, $s\in\mathbf{R}$.

f) vgl. 1. Übung

Aufg. 3.3. 6a)

Man zeige, dass die folgenden Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ eine Basis in $\mathbf{R}^3$ bilden. Wie lauten die Koordinaten von Vektor **b** bezüglich dieser Basis?

$\mathbf{a}_1=(1,0,0)^T$, $\mathbf{a}_2=(1,1,0)^T$, $\mathbf{a}_3=(1,0,1)^T$,

$\mathbf{b}=(0,0,1)^T$.

Lösung:

$$A:=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$\det(A)\neq 0$

$$1\neq 0$$

$$b:=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$A^{-1} * b$

$$\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$\mathbf{b=-a_1+a_3}$

Aufg. 3.3.8

Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{a}=(1,2,-2)^T$ und $\mathbf{b}=(4,0,3)^T$.

a) Welchen Winkel (Grad) schließen die Vektoren **a** und **b** ein?

b) Man berechne die Projektion von **a** auf die Richtung von **b** sowie von **b** auf die Richtung von **a**.

c) Man berechne den spitzen Winkel zwischen den Diagonalen des Parallelogramms, das **a** und **b** aufspannen.

Lösung:

a)

a:=trn([1 2 −2])

$$\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}$$

b:=trn([4 0 3])

$$\begin{bmatrix}4\\0\\3\end{bmatrix}$$

$\cos^{-1}(\mathrm{dotP}(\frac{a}{\mathrm{norm}(a)},\frac{b}{\mathrm{norm}(b)}))$

$$\frac{180\cdot\left(\frac{-\cos^{-1}\left(\frac{2}{15}\right)\cdot\pi}{180}+\pi\right)}{\pi}$$

approx(ans)

97.66225566

Winkel ≈ 97,66°

b) Projektion von **a** auf die Richtung von **b**

$\mathrm{dotP}(a,\frac{b}{\mathrm{norm}(b)})*\frac{b}{\mathrm{norm}(b)}$

$$\begin{bmatrix}-\frac{8}{25}\\0\\-\frac{6}{25}\end{bmatrix}$$

Projektion von **b** auf die Richtung von **a**

$\text{dotP}\left(b, \frac{a}{\text{norm}(a)}\right) * \frac{a}{\text{norm}(a)}$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

c) Diagnalen sind **a−b** bzw. **a+b**

$\cos^{-1}\left(\text{dotP}\left(\frac{a+b}{\text{norm}(a+b)}, \frac{a-b}{\text{norm}(a-b)}\right)\right)$

$$\frac{180 \cdot \left(\frac{-\cos^{-1}\left(\frac{8 \cdot \sqrt{285}}{285}\right) \cdot \pi}{180} + \pi \right)}{\pi}$$

approx(ans)

$$118.2863935$$

approx(180−ans)

$$61.71360645$$

Schnittwinkel ≈ 61,71°

Aufg. 3.3. 13a)

Durch drei Punkte A, B, C wird ein Dreieck festgelegt. Berechnen Sie die Länge der drei Seiten, die Winkel im Dreieck sowie den Flächeninhalt.

A(1,4,−2),B(3,1,0),C(−1,1,2)

Lösung:

$A := \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$B := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$C := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

norm(B−A)

$$\sqrt{17}$$

approx(ans)

4.123105626

norm(C−A)

$$\sqrt{29}$$

approx(ans)

5.385164807

norm(C−B)

$$2\cdot\sqrt{5}$$

approx(ans)

4.472135955

Es gilt für die Seitenlängen:

$c = ||AB|| \approx 4,123$

$b = ||AC|| \approx 5,385$

$a = ||BC|| \approx 4,472$

$\alpha := \cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(B-A, C-A)}{\text{norm}(B-A)*\text{norm}(C-A)}\right)$

$$\cos^{-1}\left(\frac{13\cdot\sqrt{493}}{493}\right)$$

approx(ans)

$$54.16234705$$

$\beta := \cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(A-B, C-B)}{\text{norm}(B-A)*\text{norm}(C-B)}\right)$

$$\cos^{-1}\left(\frac{2\cdot\sqrt{85}}{85}\right)$$

approx(ans)

$$77.47119229$$

$\gamma := \cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(A-C, B-C)}{\text{norm}(C-A)*\text{norm}(C-B)}\right)$

$$\cos^{-1}\left(\frac{8\cdot\sqrt{145}}{145}\right)$$

approx(ans)

$$48.36646066$$

approx($\alpha+\beta+\gamma$)

$$180$$

Es gilt für die Winkel:

$\alpha \approx 54,16°$

$\beta \approx 77,47°$

$\gamma \approx 48,37°$

$F := \frac{1}{2}\text{norm}(\text{crossP}(B-A, C-A))$

$$9$$

Flächeninhalt F=9.

Aufg. 3.3.24

Man bestimme die Gleichung der Geraden g, die durch den Punkt P(−1,3) gehen und vom Punkt Q(2,−1) den Abstand d=4 haben.

Lösung: Skizze (es gibt zwei Lösungen für g)

$P{:=}\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$$

$Q{:=}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

norm(Q−P)

$$5$$

DelVar α

done

$\sin(\alpha)=\frac{4}{5}$

$$\sin(\alpha)=\frac{4}{5}$$

$\sin^{-1}(\frac{4}{5})$

$$\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$$

approx(ans)

$$53.13010235$$

Lotfußpunkt L:

Anstieg der Geraden durch PQ:

$\cos^{-1}(\mathrm{dotP}(\frac{Q-P}{\mathrm{norm}(Q-P)}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix})$

$$\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$

approx(ans)

$$53.13010235$$

Damit ist die eine Gerade **y=3=const.**

Weiter: Anstieg der anderen Geraden:

$\tan(-2*\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right))$

$$-\tan\left(2\cdot\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$$

simplify(ans)

$$\frac{24}{7}$$

$y=\frac{24}{7}*(x+1)+3$

$$y=\frac{24\cdot(x+1)}{7}-3$$

Damit ist die andere Gerade $y=\frac{24}{7}x+\frac{45}{7}$.

$\tan(-\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right))$

$$-\frac{4}{3}$$

Gerade durch PQ: $y=-\frac{4}{3}\cdot(x+1)+3$

2D–Grafik Y1:… Y2:…

Aufg. 3.3.28 Gegeben sind drei Ebenen

E_1: $2x-y-z=7$; E_2: $6x+y+5z=-3$; E_3: $2x+2y+5z=-11$.

Bestimmen Sie – falls vorhanden – den (die) Schnittpunkt(e) der drei Ebenen. Unter welchem Winkel schneiden sich die Ebenen E_1 und E_2?

Lösung:

$$A:=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 6 & 1 & 5\\ 2 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 6 & 1 & 5\\ 2 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

det(A)

0

keine eindeutige Lösung!

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & -1 & -7\\ 6 & 1 & 5 & 3\\ 2 & 2 & 5 & 11\end{bmatrix}\Rightarrow ST$$

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & -1 & -7\\ 6 & 1 & 5 & 3\\ 2 & 2 & 5 & 11\end{bmatrix}$$

LinEqSys(ST,2,2)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix}8 & 4 & -4\\ -6 & -5 & -3\\ -10 & -5 & 5\end{bmatrix}$$

LinEqSys(T1,3,2)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ET & x_1=t & 1 \\ y_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 4 & -8 \\ x_3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

mehrdeutige Lösung: Gerade

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t * \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in R.$$

$$\text{dotP}\left(\frac{[2\ -1\ -1]}{\text{norm}([2\ -1\ -1])}, \frac{[6\ 1\ 5]}{\text{norm}([6\ 1\ 5])}\right)$$

$$\frac{\sqrt{93}}{31}$$

$\cos^{-1}(\text{ans})$

$$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{93}}{31}\right)$$

approx(ans)

71.87533956

Schnittwinkel 71,88°

Aufg. 3.3.31

In welchem Punkt durchstößt eine Gerade g, die auf der Ebene E: $x-2y+2z=3$ senkrecht steht und den Punkt P(6,-8,13) enthält, die Ebene E?

Lösung:

$$n := \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$t*n+\begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 13 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} t+6 \\ -2\cdot t-8 \\ 2\cdot t+13 \end{bmatrix}$$

$x-2y+2z=3 \mid \{x=t+6, y=-2\cdot t-8, z=2\cdot t+13\}$

$$2\cdot(2\cdot t+13)+2\cdot(2\cdot t+8)+t+6=3$$

solve(ans, t)

$$\{t=-5\}$$

$t*n+\begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 13 \end{bmatrix} \mid t=-5$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Durchstoßpunkt: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Aufg. 3.3. 33g)

Gegeben sind die Punkte $P_1(4,1,3)$, $P_2(-2,2,1)$, $P_3(1,-3,2)$ und $P_4(2,1,5)$. Wie lautet die Gleichung der Ebene E durch P_1, P_2, P_3 (Parameterdarstellung)?

Lösung: P_4 wird hier nicht benötigt.

$P_1:=\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}4\\1\\3\end{bmatrix}$$

$$P_2 := \begin{bmatrix}-2\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-2\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$P_3 := \begin{bmatrix}1\\-3\\2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\-3\\2\end{bmatrix}$$

$P_1+s*(P_2-P_1)+t*(P_3-P_1)$

$$\begin{bmatrix}-6\cdot s-3\cdot t+4\\s-4\cdot t+1\\-2\cdot s-t+3\end{bmatrix}$$

$x=-6\cdot s-3\cdot t+4, y=s-4\cdot t+1,\ \ z=-2\cdot s-t+3,\ \ s,t\in\mathbf{R}.$

d.h.

$$\begin{bmatrix}x(s,t)\\y(s,t)\\z(s,t)\end{bmatrix}=s*\begin{bmatrix}-6\\1\\-2\end{bmatrix}+t*\begin{bmatrix}-3\\-4\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\1\\3\end{bmatrix},\quad s,t\in\mathbf{R}.$$

solve({x=−6•s−3•t+4, y=s−4•t+1}, {s, t})

$$\left\{s=\frac{-(4\cdot x-3\cdot y-13)}{27},\ t=\frac{-(x+6\cdot y-10)}{27}\right\}$$

$$z=-2\cdot s-t+3\,|\,\left\{s=\frac{-(4\cdot x-3\cdot y-13)}{27},\ t=\frac{-(x+6\cdot y-10)}{27}\right\}$$

$$z=\frac{x+6\cdot y-10}{27}+\frac{2\cdot(4\cdot x-3\cdot y-13)}{27}+3$$

simplify(ans)

$$z=\frac{x+5}{3}$$

parameterfrei: $x-3z+5=0$

Aufg. 3.3.33h)

Gegeben sind die Punkte $P_1(4,1,3)$, $P_2(-2,2,1)$, $P_3(1,-3,2)$ und $P_4(2,1,5)$. Welchen Abstand hat der Punkt P_4 von E?

Lösung:

$$P_4:=\begin{bmatrix}2\\1\\5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2\\1\\5\end{bmatrix}$$

$$n:=\begin{bmatrix}1\\0\\-3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\-3\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{dotP}\left(P_4-P_1,\frac{n}{\mathrm{norm}(n)}\right)$$

$$\frac{-4\cdot\sqrt{10}}{5}$$

approx(ans)

$$-2.529822128$$

Abstand ≈ 2,53

Aufg. 3.3.37g)

Welche Kurve wird durch die folgende Gleichung beschrieben? Skizzieren Sie das Bild der Kurve.

$4x^2+2x+y^2=5$

Lösung:

Kurve 2. Ordnung, quadratische Ergänzung:

$4x^2+2x+y^2=5$ ergibt $4*(x^2+2*\frac{1}{4}x)+y^2=5$

$4*(x+\frac{1}{4})^2+y^2=5+\frac{1}{4}=\frac{21}{4}$

$$\left(\frac{x+\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{21}{16}}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{21}{4}}}\right)^2=1$$

Ellipsengleichung mit den Halbachsen $a=\sqrt{\frac{21}{16}}<b=\sqrt{\frac{21}{4}}$

Mittelpunkt: $M(-\frac{1}{4},0)$

solve$(4x^2+2x+y^2=5, y)$

$$\left\{y=-\sqrt{-4\cdot x^2-2\cdot x+5}, y=\sqrt{-4\cdot x^2-2\cdot x+5}\right\}$$

obere Kurvenast:

Define $y1(x)=\sqrt{-4\cdot x^2-2\cdot x+5}$

done

untere Kurvenast:

Define $y2(x)=-\sqrt{-4\cdot x^2-2\cdot x+5}$

done

Parameterdarstellung:

Define $xt3(t)=-\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{21}{16}}*\cos(t)$

done

Define $yt3(t)=\sqrt{\frac{21}{4}}*\sin(t)$

done

2D−Grafik

Aufg. 3.3.42

Das kartesische (x, y)−Koordinatensystem soll um $\alpha=\pi/6$ (im Uhrzeigersinn = math. neg. Drehsinn!) gedreht werden.

a) Welche Koordinaten hat ein beliebiger Punkt X=(x, y) im gedrehten (x', y')−Koordinatensystem?

b) Welche Koordinaten hat speziell der Punkt M=(2, 3)?

c) Wie lautet die Darstellung eines Kreises mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung im (x', y')−System?

d) Welche Gleichung hat die Parabel $y=x^2$ im (x', y')−System?

Lösung:

a) Drehmatrix **A** (im Uhrzeigersinn = math. neg. Drehsinn!)

$\alpha:=\pi/6$

$$\frac{\pi}{6}$$

$$A:=\begin{bmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=A*\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

b)

$A*\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}\sqrt{3}+\frac{3}{2}\\ \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}-1\end{bmatrix}$$

approx(ans)

$$\begin{bmatrix}3.232050808\\1.598076211\end{bmatrix}$$

$M'(\sqrt{3}+\frac{3}{2},\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}-1)$

c)

$A^{-1}*\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}\cdot x'}{2}-\frac{y'}{2}\\ \frac{x'}{2}+\frac{\sqrt{3}\cdot y'}{2}\end{bmatrix}$$

DelVar x, y, R

done

$x^2+y^2=r^2$ geht über in

$(\frac{\sqrt{3}\cdot x'}{2}-\frac{y'}{2})^2+(\frac{x'}{2}+\frac{\sqrt{3}\cdot y'}{2})^2=r^2$

$$\left(\frac{\sqrt{3}\cdot x'}{2}-\frac{y'}{2}\right)^2+\left(\frac{x'}{2}+\frac{\sqrt{3}\cdot y'}{2}\right)^2=r^2$$

simplify(ans)

$$(x')^2+(y')^2=r^2$$

d) $y=x^2$ geht über in

$$\frac{x'}{2}-\frac{\sqrt{3}\cdot y'}{2}=(\frac{\sqrt{3}\cdot x'}{2}+\frac{y'}{2})^{2}$$

$$\frac{x'}{2}-\frac{\sqrt{3}\cdot y'}{2}=\left(\frac{\sqrt{3}\cdot x'}{2}+\frac{y'}{2}\right)^{2}$$

$$-4*\left(\frac{x'}{2}-\frac{\sqrt{3}\cdot y'}{2}-(\frac{\sqrt{3}\cdot x'}{2}+\frac{y'}{2})^{2}\right)=0$$

$$4\cdot\left(\left(\frac{\sqrt{3}\cdot x'}{2}+\frac{y'}{2}\right)^{2}-\frac{x'}{2}+\frac{\sqrt{3}\cdot y'}{2}\right)=0$$

simplify(ans)

$$3\cdot(x')^{2}+(y')^{2}+\sqrt{3}\cdot(2\cdot x'\cdot y'+2\cdot y')-2\cdot x'=0$$

$$3\cdot x'^{2}+y'^{2}-\sqrt{3}\cdot(2\cdot x'\cdot y'+2\cdot y')-2\cdot x'=0$$

$$\text{solve}(3\cdot x^{2}+y^{2}-\sqrt{3}\cdot(2\cdot x\cdot y+2\cdot y)-2\cdot x=0,y)$$

$$\{y=\sqrt{3}\cdot(x+1)-\sqrt{8\cdot x+3},\ y=\sqrt{3}\cdot(x+1)+\sqrt{8\cdot x+3}\}$$

$$\text{Define }y1(x)=\sqrt{3}\cdot(x+1)-\sqrt{8\cdot x+3}$$

done

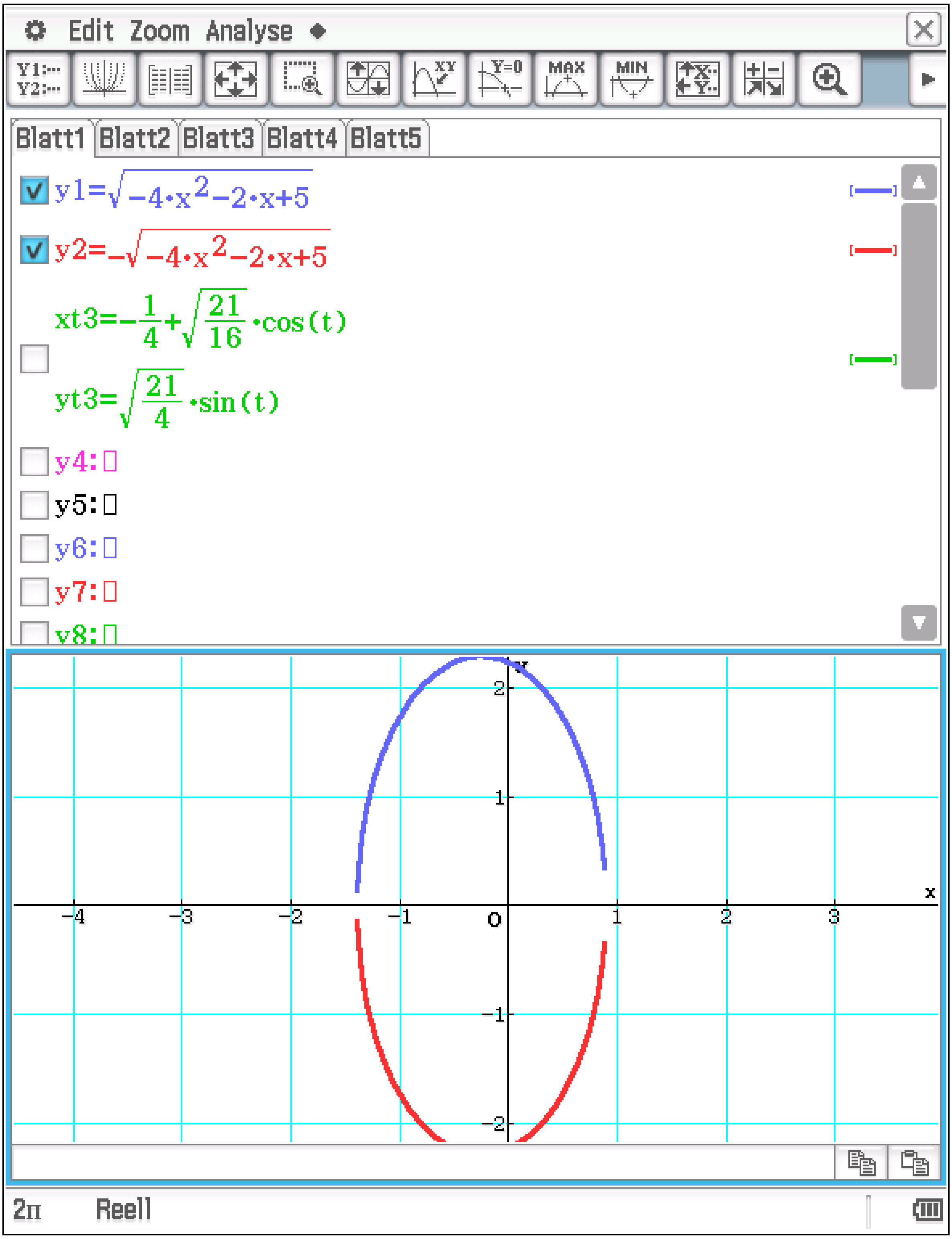
$$\text{Define }y2(x)=\sqrt{3}\cdot(x+1)+\sqrt{8\cdot x+3}$$

done

2D-Grafik Y1:··· Y2:···

Parabel um 30° im Uhrzeigersinn gedreht.

Aufg. 3.3.37g) Ellipse



Aufg. 3.3.42 Parabel um 30° im Uhrzeigersinn gedreht.