SS2018 – 1.Übung – Prof.Paditz

Aufg.

1.Übung:

3.1. 3a),6f),11, sowie **3.2.** 1a),8,12a),26a),30

Aufg.3.1.3a)

Gegeben sind die Matrizen

$A:=\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$B:=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie folgende Matrix, falls diese existiert:

$A-3*B^T$

trn(B)

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

3*ans

$$\begin{bmatrix} -12 & -3 \\ 0 & 12 \\ 9 & 21 \end{bmatrix}$$

A−ans

$$\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 1 & -9 \\ -4 & -25 \end{bmatrix}$$

stop

Aufg. 3. 1. 6f)

Berechnen Sie folgende Determinante

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$-x+3\cdot y+1$$

Determinantenentwicklung nach 3. Spalte:

(Schachbrettregel beachten!)

$$(-1)^{1+3}\cdot y\cdot\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right)+(-1)^{2+3}\cdot 0\cdot\det\left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right)+(-1)^{3}$$

$$-x+3\cdot y+1$$

stop

Aufg. 3. 1. 11

In einem Betrieb werden aus den Rohstoffen R_1, R_2, R_3 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 und hieraus die Endprodukte E_1, E_2, E_3 hergestellt.

Den folgenden Tabellen ist zu entnehmen, wieviel Einheiten der Rohstoffe R_i zur Herstellung je einer Einheit der Zwischenprodukte Z_j bzw. wieviel Einheiten der Zwischenprodukte Z_j zur Herstellung je einer Einheit der Endprodukte E_k erforderlich sind:

$$\begin{array}{c|ccc} & Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ \hline R_1 & 2 & 0 & 1 \\ R_2 & 3 & 1 & 0 \\ R_3 & 0 & 1 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & E_1 & E_2 & E_3 \\ \hline Z_1 & 4 & 0 & 1 \\ Z_2 & 1 & 3 & 0 \\ Z_3 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Wie groß ist der Rohstoffbedarf für 100 Einheiten E_1, 120 Einheiten E_2 und 150 Einheiten E_3?

Lösung:

$$A:=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B:=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = A * \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} = B * \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix},$$

hieraus:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = A * B * \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = C * \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = C * \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 150 \end{bmatrix},$$

somit

$C:=A*B$

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 13 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} =$$

$$C * \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 150 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1520 \\ 2110 \\ 1720 \end{bmatrix}$$

Aufg. 3. 2. 1a)

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 \phantom{{}+2x_4} &= 1 \\ -3x_1 + 2x_2 \phantom{{}-2x_3} + x_4 &= 5 \\ 8x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(Es handelt sich um drei (Hyper-)Ebenen im $\mathbf{R}^4$)

Lösung:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

augment(A, -b)⇒ST

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & -5 \\ 8 & -2 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

x_1 geht auf Zeile1:

LinEqSys(ST, 1, 1)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & -8 \\ -10 & -18 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

x_2 geht auf Zeile2:

LinEqSys(T1, 2, 1)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{8}{5} \\ -6 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

x_3 geht auf Zeile3:

LinEqSys(T2, 3, 1)

done

matnew⇒T3

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{7}{15} \\ -1 & \frac{16}{5} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Endtabelle:

$$\begin{bmatrix} T3 & x_4 & 1 \\ x_1= & -\frac{1}{3} & \frac{7}{15} \\ x_2= & -1 & \frac{16}{5} \\ x_3= & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$x_4=t$ (nicht getauscht), $t\in\mathbf{R}$,

$x_1=-\frac{1}{3}t+\frac{7}{15}$, $x_2=-t+\frac{16}{5}$, $x_3=\frac{2}{3}t-\frac{4}{3}$.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=t*\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{7}{15} \\ \frac{16}{5} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t\in\mathbf{R},$$

Es handelt sich um eine (Schnitt-)Gerade im $\mathbf{R}^4$.

Probe:

$$A*\begin{bmatrix} -\frac{1}{3}t+\frac{7}{15} \\ -t+\frac{16}{5} \\ \frac{2}{3}t-\frac{4}{3} \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2\cdot\left(\frac{2\cdot t}{3}-\frac{4}{3}\right)-\frac{4\cdot t}{3}+\frac{11}{3} \\ 3\cdot\left(\frac{t}{3}-\frac{7}{15}\right)-2\cdot\left(t-\frac{16}{5}\right)+t \\ -8\cdot\left(\frac{t}{3}-\frac{7}{15}\right)-2\cdot\left(\frac{2\cdot t}{3}-\frac{4}{3}\right)+2\cdot\left(t-\frac{16}{5}\right)+2\cdot t \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

alternativ: Gauß-Algorithmus

reduzierte Stufenform (normierte Zeilenstufenform):

rref(augment(A, b))

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{15} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{16}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & = 1 \\ \text{1. Zeile:} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{15} \\ \text{2. Zeile:} & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{16}{5} \\ \text{3. Zeile:} & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Stufenform (Zeilenstufenform):

ref(augment(A, b))

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & \frac{1}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & = 1 \\ \text{1. Zeile:} & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ \text{2. Zeile:} & 0 & 1 & \frac{6}{5} & \frac{1}{5} & \frac{8}{5} \\ \text{3. Zeile:} & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

stop

Aufg. 3. 2. 8

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 &= 0\\
-2tx_1 + tx_2 + 9x_3 &= 6\\
2x_1 + 2x_2 + tx_3 &= 1
\end{aligned}
$$

a) Für welche Werte $t \in \mathbf{R}$ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?

b) Für welche Werte $t \in \mathbf{R}$ existieren unendlich viele Lösungen?

c) Für welche Werte $t \in \mathbf{R}$ existieren keine Lösungen?

d) Man berechne die Lösung für t=1.

e) Man berechne die Lösung zu b).

f) Wie können die Ergebnisse von a), b) und c) geometrisch interpretiert werden?

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2t & t & 9 \\ 2 & 2 & t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 \cdot t & t & 9 \\ 2 & 2 & t \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

augment(A, −b)⇒ST

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 \cdot t & t & 9 & -6 \\ 2 & 2 & t & -1 \end{bmatrix}$$

x_2 in Zeile1:

LinEqSys(ST, 1, 2)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -4\cdot t & -t+9 & -6 \\ -2 & t-2 & -1 \end{bmatrix}$$

x_1 in Zeile3:

LinEqSys(T1,3,1)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix} -t+1 & 1 \\ -2\cdot t^2+3\cdot t+9 & 2\cdot t-6 \\ \frac{t}{2}-1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

solve$(-2\cdot t^2+3\cdot t+9\neq 0, t)$

$$\left\{t\neq 3, t\neq -\frac{3}{2}\right\}$$

x3 in Zeile2:

LinEqSys(T2,2,1)

done

matnew⇒T3

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2\cdot t+3} \\ \frac{1}{t+\frac{3}{2}} \\ \frac{-7}{2\cdot(2\cdot t+3)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T3 & 1 \\ x_2= & \frac{5}{2\cdot t+3} \\ x_3= & \frac{1}{t+\frac{3}{2}} \\ x_1= & \frac{-7}{2\cdot(2\cdot t+3)} \end{bmatrix}$$

zu a) eindeutig lösbar für $t\neq 3, t\neq -\frac{3}{2}$

zu b) unendl. viele Lösungen für t=3 (Zeile2 widerspruchsfrei)

zu c) keine Lösung für $t=-\frac{3}{2}$ (Zeile2 widerspruchsvoll)

zu d) eindeutig lösbar

T3|t=1

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \\ -\frac{7}{10} \end{bmatrix}$$

$x_1=-\frac{7}{10}$, $x_2=1$, $x_3=\frac{2}{5}$

zu e)

T2|t=3

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$x_3=s$, $x_2=-s+1$, $x_1=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}$, $s\in\mathbf{R}$.

zu f)

a) Schnitt dreier Ebenen in einem Punkt

b) Schnitt dreier Ebenen in einer Geraden

$ST|t=3$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 9 & -6 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

rref(augment(A, b))

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-7}{2\cdot(2\cdot t+3)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2\cdot t+3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{t+\frac{3}{2}} \end{bmatrix}$$

ref(augment(A, b))

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{t+9}{2\cdot t} & \frac{3}{t} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{t+\frac{3}{2}} \end{bmatrix}$$

stop

Define z1(x, y)=−2x−y

done

Define z2(x, y)=(6+6x−3y)/9

done

Define z3(x, y)=(1−2x−2y)/3

done

3D−Grafik Z1:… Z2:…

c) kein gemeinsamer Punkt

$ST|t=-\frac{3}{2}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -\frac{3}{2} & 9 & -6 \\ 2 & 2 & -\frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

Rang der erweiterten Matrix = 3:

rank(ans)

$$3$$

Rang der Koeff.-Matrix = 2:

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -\frac{3}{2} & 9 \\ 2 & 2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}\right)$$

$$2$$

Keine Ranggleichheit, d.h. keine Lösung.

stop

Define z1(x,y)=-2x-y

done

Define $z2(x,y)=\left(6-3x+\frac{3}{2}y\right)/9$

done

Define $z3(x,y)=(1-2x-2y)/\left(-\frac{3}{2}\right)$

done

3D-Grafik Z1:… Z2:…

d) ein gemeinsamer Punkt

ST|t=1

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 9 & -6 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Define z1(x,y)=−2x−y

done

Define z2(x,y)=(6+2x−y)/9

done

Define z3(x,y)=1−2x−2y

done

3D−Grafik

alternativ:

Der Fall $t \neq 3$ wird hier nicht erkannt:

rref(augment(A,b))

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-7}{2\cdot(2\cdot t+3)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2\cdot t+3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{t+\frac{3}{2}} \end{bmatrix}$$

$t \neq -\frac{3}{2}$.

rref(augment(A,b)$|t=-\frac{3}{2}$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Widerspruch in 3.Zeile für $t=-\frac{3}{2}$.

rref(augment(A,b)|t=3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kein Widerspruch in 3. Zeile für t=3.

det(A)

$$4 \cdot t^2 - 6 \cdot t - 18$$

solve(ans=0, t)

$$\left\{t=3, t=-\frac{3}{2}\right\}$$

stop

Aufg. 3.2. 12a)

Bestimmen Sie für die folgende Reaktion die stöchiometrischen Koeffzienten a, b, ...:

$a \cdot HCl + b \cdot KMnO_4 + c \cdot H_3AsO_3 \Leftrightarrow d \cdot H_3AsO_4 + e \cdot MnCl_2 + f \cdot KCl + g \cdot H_2O$.

Lösung: Einzelbilanzen

H: a+3c=3d+2g

Cl: a=2e+f

K: b=f

Mn: b=e

O: 4b+3c=4d+g

As: c=d

homogenes LGS: **A*x=o**

x=$(a, b, c, d, e, f, g)^T$, **o**=$(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$,

fill(0, 6, 7)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow ST$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Austauschverfahren ohne 1-Spalte (=**o**)

a geht in Zeile 1:

LinEqSys(ST, 1, 1)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b geht in Zeile 3:

LinEqSys(T1, 3, 1)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c geht in Zeile 6:

LinEqSys(T2, 6, 1)

done

matnew⇒T3

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d geht in Zeile 5:

LinEqSys(T3, 5, 1)

done

matnew⇒T4

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

e geht in Zeile 4:

LinEqSys(T4, 4, 1)

done

matnew⇒T5

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

f geht in Zeile 2:

LinEqSys(T5, 2, 1)

done

matnew⇒T6

$$\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

g nicht getauscht:

$$\begin{bmatrix} a \\ f \\ b \\ e \\ d \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} * g$$

g=3 setzen, damit positive ganzzahlige Lösungen entstehen.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} * 3$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ f \\ b \\ e \\ d \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

a=6，b=2，c=5，d=5，e=2，f=2，g=3.

alternativ:

rref(ST)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Aufg. 3.2. 26a)

Man bestimme die inverse Matrix von

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -5 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -5 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

A^{-1}

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

det(A)

$$-8$$

Berechnung über Adjunktenmatrix (transponiert):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} * \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 10 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Adjunktenmatrix (transponiert):

vorzeichenbehaftete Unterdeterminanten

$\det(A)*A^{-1}$

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 10 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} \det() & -\det() & \det() \\ -\det() & \det() & -\det() \\ \det() & -\det() & \det() \end{bmatrix}$, z.B. folgende Adjunkten

$\alpha_{11}=\det(\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix})$

$$\alpha_{11}=-4$$

$\alpha_{21}=-\det(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix})$

$$\alpha_{21}=0$$

$\alpha_{12}=-\det(\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix})$

$$\alpha_{12}=8$$

usw.

oder Austauchverfahren (ohne Spaltentilgung):

A

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -5 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(A, 1, 1)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

1.Spalte wieder einfügen:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 6/2 & 3 & -5 \\ -4/2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A1$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -5 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(A1,2,2)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

2.Spalte wieder einfügen:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1/3 & \frac{5}{3} \\ 0 & -2/3 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow A2$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

LinEqSys(A2,3,3)

done

matnew⇒T3

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

3. Spalte wieder einfügen:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{3}/(-\frac{4}{3}) \\ 0 & -\frac{1}{2} & -3/4 \end{bmatrix} \Rightarrow A3$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

A^{-1}

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Aufg. 3. 2. 30

Ein zweistufiger Produktionsprozess mit den Rohstoffen R_1, R_2, den Zwischenprodukten Z_1, Z_2, Z_3 und den Endprodukten E_1, E_2 werde durch die folgenden Tabellen beschrieben (vgl. die Aufgabenstellung beispielsweise in **3. 1.** 11.):

$$\begin{array}{c|ccc} & Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ \hline R_1 & 2 & 1 & 2 \\ R_2 & 1 & 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & E_1 & E_2 \\ \hline Z_1 & 2 & 1 \\ Z_2 & 1 & 2 \\ Z_3 & 0 & 2 \end{array}$$

Man ermittle die Mengen der Endprodukte E_1, E_2, wenn 3000 Mengeneinheiten Rohstoff R_1 und 3200 Mengeneinheiten Rohstoff R_2 voll für die Produktion eingesetzt werden.

Lösung:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

d.h. $\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = C * \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$

$$C := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

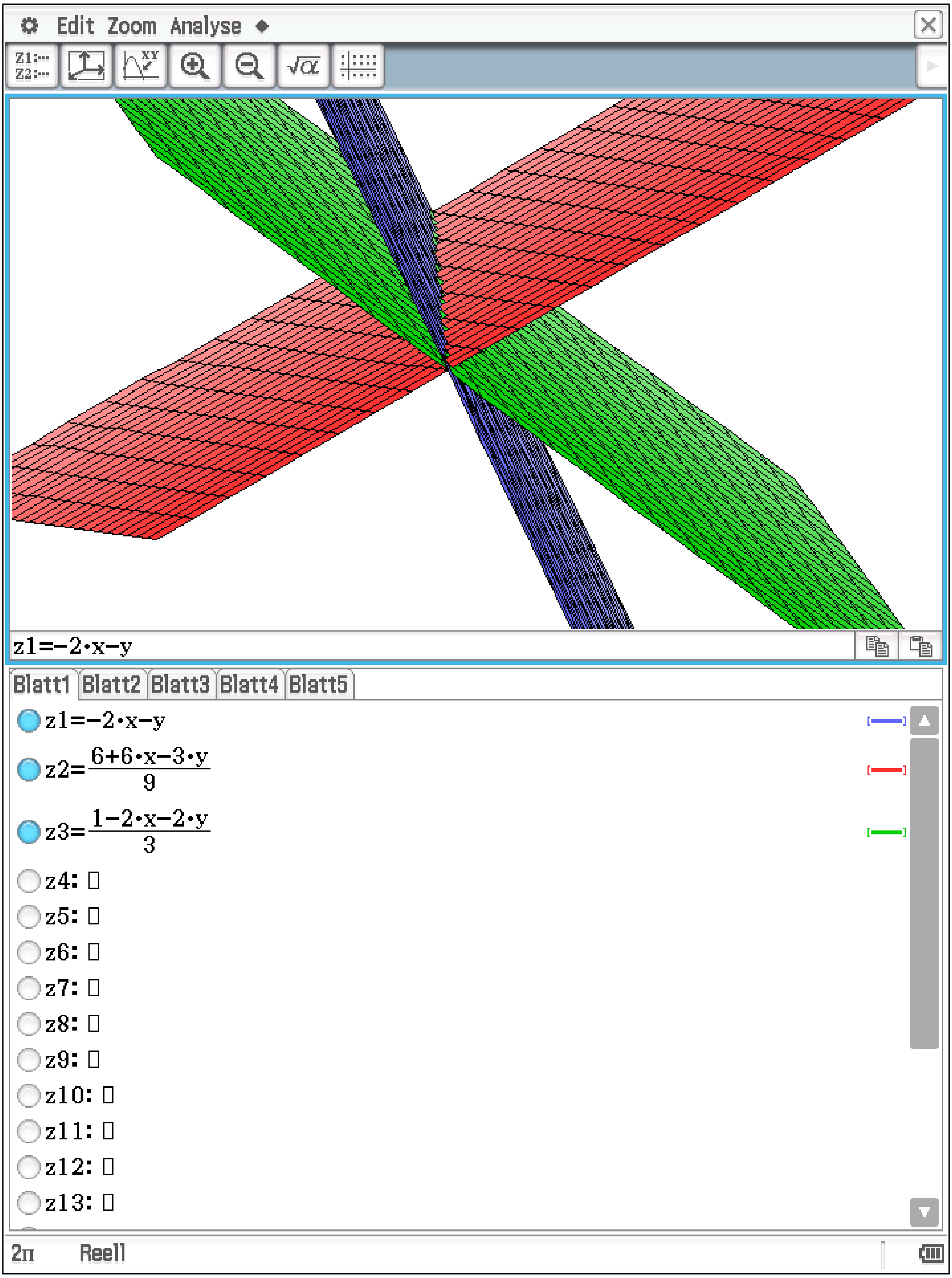
$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = C^{-1} * \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} =$$

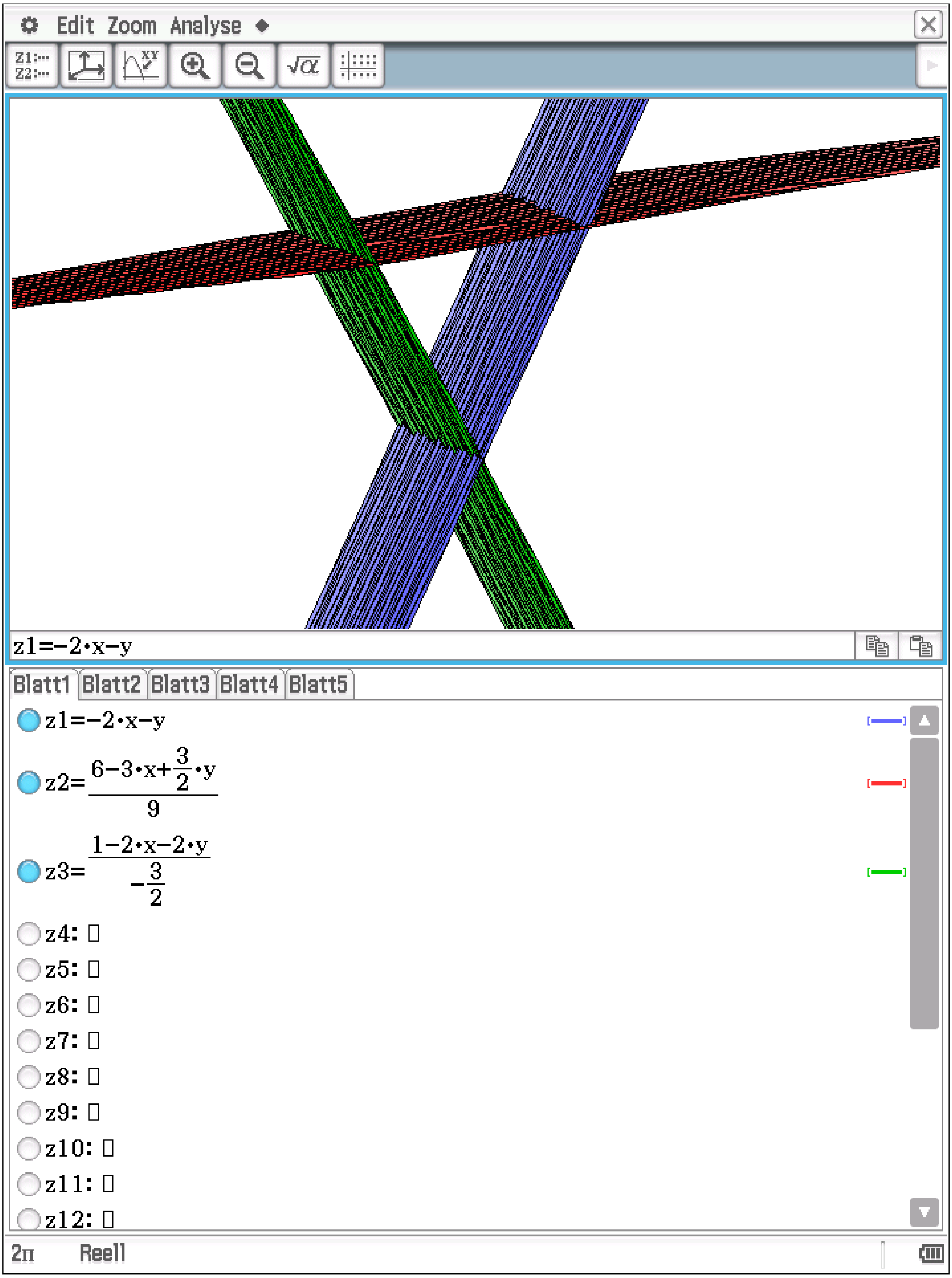
$$C^{-1} * \begin{bmatrix} 3000 \\ 3200 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 280 \\ 200 \end{bmatrix}$$

Aufg. 3.2.8b)   Gemeinsame Schnittgerade



Aufg. 3.2.8c)   keine gemeinsamen Punkte



Aufg. 3.2.8d) Genau einen gemeinsamen Punkt