ET-Ü11 - SS2016 Prof.Dr.L. Paditz

====================================

Extremwertaufgaben

D6. 2c,e,g; 3b,c; 10

Aufg. 2c

=========

Define $f(x,y)=\sin(x)+\sin(y)+\sin(x+y)$

done

Bereich $B=\{(x,y)\mid 0\le x\le\frac{\pi}{2}, 0\le y\le\frac{\pi}{2}\}$

$$\left.\begin{cases}\frac{d}{dx}(f(x,y))=0\\ \frac{d}{dy}(f(x,y))=0\end{cases}\right|_{x,y}$$

Fehler:Unzureichender Speicher

$\frac{d}{dx}(f(x,y))=0\Rightarrow Gl1$

$\cos(x+y)+\cos(x)=0$

$\frac{d}{dy}(f(x,y))=0\Rightarrow Gl2$

$\cos(x+y)+\cos(y)=0$

$Gl1-Gl2\Rightarrow Gl3$

$\cos(x)-\cos(y)=0$

Im Bereich B ergibt sich $x=y$, wegen $\cos(x)=\cos(y)$

$Gl1\mid y=x$

$\cos(x)+\cos(2\cdot x)=0$

solve(Gl1 | y=x, x)

$$\left\{x=2\cdot\pi\cdot\text{constn}(1)+\pi, x=2\cdot\pi\cdot\text{constn}(2)-\frac{\pi}{3}, x=2\cdot\pi\cdot\text{constn}(3)+\frac{\pi}{3}\right\}$$

Wegen B gibt es die einzige Lösung $x=y=\frac{\pi}{3}$

Hinr. Bed.:

Define $D(x,y)=\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))\times\frac{d^2}{dy^2}(f(x,y))-\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}(f(x,y))\right.\right.$

done

$D(x,y)|x=\frac{\pi}{3}$ and $y=\frac{\pi}{3}$

$$\frac{9}{4}$$

Wegen D>0 liegt ein Extremwert vor.

$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))|x=\frac{\pi}{3}$ and $y=\frac{\pi}{3}$

$$-\sqrt{3}$$

$\frac{d^2}{dy^2}(f(x,y))|x=\frac{\pi}{3}$ and $y=\frac{\pi}{3}$

$$-\sqrt{3}$$

Wegen $f_{xx}=f_{yy}<0$ liegt ein lok. Maximum vor.

Ergebnis:

$f(x,y)|x=\frac{\pi}{3}$ and $y=\frac{\pi}{3}$

$$\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}$$

$P\_max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$

3D−Grafik

Aufg. 2e

=========

Define $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-x\times y$

done

$B=\{(x,y)|x\neq 0, y\neq 0\}$ bedeutet, dass die x− und y−Achse aus dem Def.−Bereich von f herausfallen.

Damit zerfällt die Fläche f in vier Teilflächen über den jeweiligen Quadranten.

$$\left.\begin{cases}\frac{d}{dx}(f(x,y))=0\\ \frac{d}{dy}(f(x,y))=0\end{cases}\right|_{x,y}$$

$\{x=-1, y=-1\}$

$\frac{d}{dx}(f(x,y))=0\Rightarrow Gl1$

$$\frac{-(x^2\cdot y+1)}{x^2}=0$$

$\frac{d}{dy}(f(x,y))=0\Rightarrow Gl2$

$$\frac{-(x\cdot y^2+1)}{y^2}=0$$

Es gibt die einzige Lösung $x=y=-1$

Hinr. Bed.:

Define $D(x,y)=\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))\times\frac{d^2}{dy^2}(f(x,y))-\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}(f(x,y))\right.\right.$ ▶

done

$D(x,y)|x=-1 \text{ and } y=-1$

3

Wegen D>0 liegt ein Extremwert vor.

$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))|x=-1 \text{ and } y=-1$

−2

$\frac{d^2}{dy^2}(f(x,y))|x=-1 \text{ and } y=-1$

−2

Wegen $f_{xx}=f_{yy}<0$ liegt ein lok. Maximum vor.

Ergebnis:

$f(x,y)|x=-1 \text{ and } y=-1$

−3

P_max(−1,−1,−3)

3D−Grafik

Aufg. 2g

=========

Define $f(x,y)=\frac{x^4}{16}+\frac{x^2y^2}{8}-\frac{x^2}{8}+\frac{y^4}{16}-\frac{y^2}{2}$

done

$B=\mathbf{R}^2$

Damit besteht die Fläche f aus einem Stück.

$$\left.\begin{cases}\frac{d}{dx}(f(x,y))=0\\ \frac{d}{dy}(f(x,y))=0\end{cases}\right|_{x,y}$$

$$\{\{x=-1,y=0\},\{x=0,y=-2\},\{x=0,y=0\},\{x=0,y=2\},\{x=1,y=0\}\}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x,y))=0 \Rightarrow Gl1$$

$$\frac{x^3+x\cdot y^2-x}{4}=0$$

$$\frac{d}{dy}(f(x,y))=0 \Rightarrow Gl2$$

$$\frac{y^3+x^2\cdot y-4\cdot y}{4}=0$$

Man erkennt zunächst die Lösung x=y=0.

Weitere Fälle:

x=0 und y≠0:

simplify(Gl2/y×4)|x=0⇒Gl3

$$y^2-4=0$$

solve(Gl3,y)

$$\{y=-2,y=2\}$$

Es gibt hier die Lösungen x=0,y=−2 bzw. x=0,y=2

Weitere Fälle:

$x \neq 0$ und $y=0$:

simplify(Gl1/x×4)|y=0⇒Gl4

$$x^2-1=0$$

solve(Gl4,x)

$$\{x=-1, x=1\}$$

Es gibt hier die Lösungen $x=-1, y=0$ bzw. $x=1, y=0$

Damit gibt es fünf extremwertverdächtige Stellen für die gegekrümmte Fläche 4. Ordnung:

P1(0;0), P2(0;−2), P3(0;2), P4(−1;0), P5(1;0)

Hinr. Bed.:

Define $D(x,y)=\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))\times\frac{d^2}{dy^2}(f(x,y))-\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}(f(x,y))\right.\right.$ ▶

done

{D(x,y)|{x=0,y=0},D(x,y)|{x=0,y=−2},D(x,y)|{x=0,y=2} ▶

$$\left\{\frac{1}{4},\frac{3}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{8},-\frac{3}{8}\right\}$$

d.h. für P4 und P5 gibt es kein Extremum:

$$\begin{bmatrix} D(x,y)|\{x=0,y=0\} \\ D(x,y)|\{x=0,y=-2\} \\ D(x,y)|\{x=0,y=2\} \\ D(x,y)|\{x=-1,y=0\} \\ D(x,y)|\{x=1,y=0\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ -3/8 \\ -3/8 \end{bmatrix}$$

Wegen $D>0$ für P1, P2, P3 liegen drei Extremwerte vor.

$$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))|x=0 \text{ and } y=0$$

$$-\frac{1}{4}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))|x=0 \text{ and } y=-2$$

$$\frac{3}{4}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))|x=0 \text{ and } y=2$$

$$\frac{3}{4}$$

Wegen $f_{xx}=f_{yy}<0$ liegt bei P1 ein lok. Maximum vor.

Wegen $f_{xx}=f_{yy}>0$ liegen bei P2 und P3 ein lok. Minima vor.

Ergebnis:

$f(x,y)|x=0 \text{ and } y=0$

$$0$$

$f(x,y)|x=0 \text{ and } y=-2$

$$-1$$

$f(x,y)|x=0 \text{ and } y=2$

$$-1$$

P_max(0,0,0)

P_min(0,-2,-1) und P_min(0,2,-1)

3D-Grafik

Aufg. 3b

=========

Fläche dritter Ordnung mit Parabel als NB

(!Skizze als Karte mit Höhenlinien und NB)

Define $F(x,y,\lambda)=6x^2y+\lambda\times(x^2-y-8)$

done

$$\left.\begin{cases}\frac{d}{dx}(F(x,y,\lambda))=0\\ \frac{d}{dy}(F(x,y,\lambda))=0\\ \frac{d}{d\lambda}(F(x,y,\lambda))=0\end{cases}\right|_{x,y,\lambda}$$

$\{\{x=-2,y=-4,\lambda=24\},\{x=0,y=-8,\lambda=0\},\{x=2,y=-4,\lambda=24\}\}$

$6x^2y|\{x=0,y=-8\}$

0

$6x^2y|\{x=-2,y=-4\}$

−96

$6x^2y|\{x=2,y=-4\}$

−96

Die Fläche ist überall definiert und zusammenhängend.

Damit ist P_max(0,-8,0) und

P_min(-2,-4,-96) sowie P_min(2,-4,-96).

Aufg. 3c

=========

Fläche vierter Ordnung mit Gerade als NB

(!Skizze als Karte mit Höhenlinien und NB)

Define $F(x,y,\lambda)=x^2y^2+\lambda\times(2x+6y-12)$

done

$$\left.\begin{cases}\frac{d}{dx}(F(x,y,\lambda))=0\\ \frac{d}{dy}(F(x,y,\lambda))=0\\ \frac{d}{d\lambda}(F(x,y,\lambda))=0\end{cases}\right|_{x,y,\lambda}$$

$\{\{x=0,y=2,\lambda=0\},\{x=3,y=1,\lambda=-3\},\{x=6,y=0,\lambda=0\}\}$

$x^2y^2|\{x=0,y=2\}$

0

$x^2y^2|\{x=3,y=1\}$

9

$x^2y^2|\{x=6,y=0\}$

0

Die Fläche ist überall definiert und zusammenhängend.
Damit ist P_max(3,1,9) und
P_min(0,2,0) sowie P_min(6,0,0).

Aufg. 10
=========

ellipt. Paraboloid:

$z=x^2+2y^2 \Rightarrow Gl1$

$z=x^2+2\cdot y^2$

Ebene:

$4x-8y-z+24=0 \Rightarrow Gl2$

$$4\cdot x-8\cdot y-z+24=0$$

Schnittkurve:

$Gl2 | Gl1 \Rightarrow Gl3$

$$-x^2-2\cdot y^2+4\cdot x-8\cdot y+24=0$$

Gl3 ist die NB für Gl1 oder Gl2

Define $F(x,y,\lambda)=x^2+2y^2+\lambda\times(-x^2-2\cdot y^2+4\cdot x-8\cdot y+24)$

done

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{d}{dx}(F(x,y,\lambda))=0\\ \frac{d}{dy}(F(x,y,\lambda))=0\\ \frac{d}{d\lambda}(F(x,y,\lambda))=0\end{array}\right|_{x,y,\lambda}$$

$$\left\{\left\{x=-2\cdot\sqrt{3}+2, y=2\cdot\sqrt{3}-2, \lambda=\frac{-\sqrt{3}}{3}+1\right\}, \left\{x=2\cdot\sqrt{3}+2, y=-2\cdot\sqrt{3}-2, \ldots\right.\right.$$

$x^2+2y^2 | \{x=-2\cdot\sqrt{3}+2, y=2\cdot\sqrt{3}-2\}$

$$3\cdot(2\cdot\sqrt{3}-2)^2$$

simplify(ans)

$$-24\cdot\sqrt{3}+48$$

approx(ans)

$$6.430780618$$

$x^2+2y^2 | \{x=2\cdot\sqrt{3}+2, y=-2\cdot\sqrt{3}-2\}$

$$3\cdot(2\cdot\sqrt{3}+2)^2$$

simplify(ans)

$$24\cdot\sqrt{3}+48$$

approx(ans)

89.56921938

Ergebnis:

$P\_max\left(2\cdot\sqrt{3}+2, -2\cdot\sqrt{3}-2, 3\cdot(2\cdot\sqrt{3}+2)^2\right)$

$P\_min\left(-2\cdot\sqrt{3}+2, 2\cdot\sqrt{3}-2, 3\cdot(2\cdot\sqrt{3}-2)^2\right)$

gerundet:

$\text{approx}\left(\left\{2\cdot\sqrt{3}+2, -2\cdot\sqrt{3}-2, 3\cdot(2\cdot\sqrt{3}+2)^2\right\}\right)$

$\{5.464101615, -5.464101615, 89.56921938\}$

$\text{approx}\left(\left\{-2\cdot\sqrt{3}+2, 2\cdot\sqrt{3}-2, 3\cdot(2\cdot\sqrt{3}-2)^2\right\}\right)$

$\{-1.464101615, 1.464101615, 6.430780618\}$

Hinw.:

Die NB beschreibt eine Ellipse

$-x^2-2\cdot y^2+4\cdot x-8\cdot y+24=0,$

das ergibt mit quadratischer Ergänzung:

$x^2-4x+4+2\cdot\left(y^2+4y+4\right)=24+4+8=36$

d.h.

$(x-2)^2+2(y+2)^2=36$

Normalform:

$$\left(\frac{x-2}{6}\right)^2+\left(\frac{y+2}{3\sqrt{2}}\right)^2=1$$

Parameterdarstellung der Schnittkurve:

Define xst1(s,t)=2+6cos(t)

done

Define yst1(s,t)=$-2+3\sqrt{2}\sin(t)$

done

Define zst1(s,t)=4xst1(s,t)−8yst1(s,t)+24

done

3D−Grafik Z1:… Z2:…

Define z2(x,y)=4x−8y+24

done

Define z3(x,y)=x^2+2y^2

done

3D−Grafik Z1:… Z2:…

$\frac{d}{dt}(\text{zst1}(s,t))=0$

$-24\cdot\sqrt{2}\cdot\cos(t)-24\cdot\sin(t)=0$

solve(ans,t)

$\left\{t=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi\cdot\text{constn}(1)-\frac{\pi}{2}\right\}$

$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi\cdot 0-\frac{\pi}{2}\Rightarrow t1$

$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\pi}{2}$

$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi\cdot 1-\frac{\pi}{2}\Rightarrow t2$

$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\pi}{2}$

approx({t1,t2})

{−0.9553166181,2.186276035}

{xst1(s,t),yst1(s,t),zst1(s,t)}|t=t1

$$\{2\cdot\sqrt{3}+2,-2\cdot\sqrt{3}-2,12\cdot(2\cdot\sqrt{3}+2)+24\}$$

approx(ans)

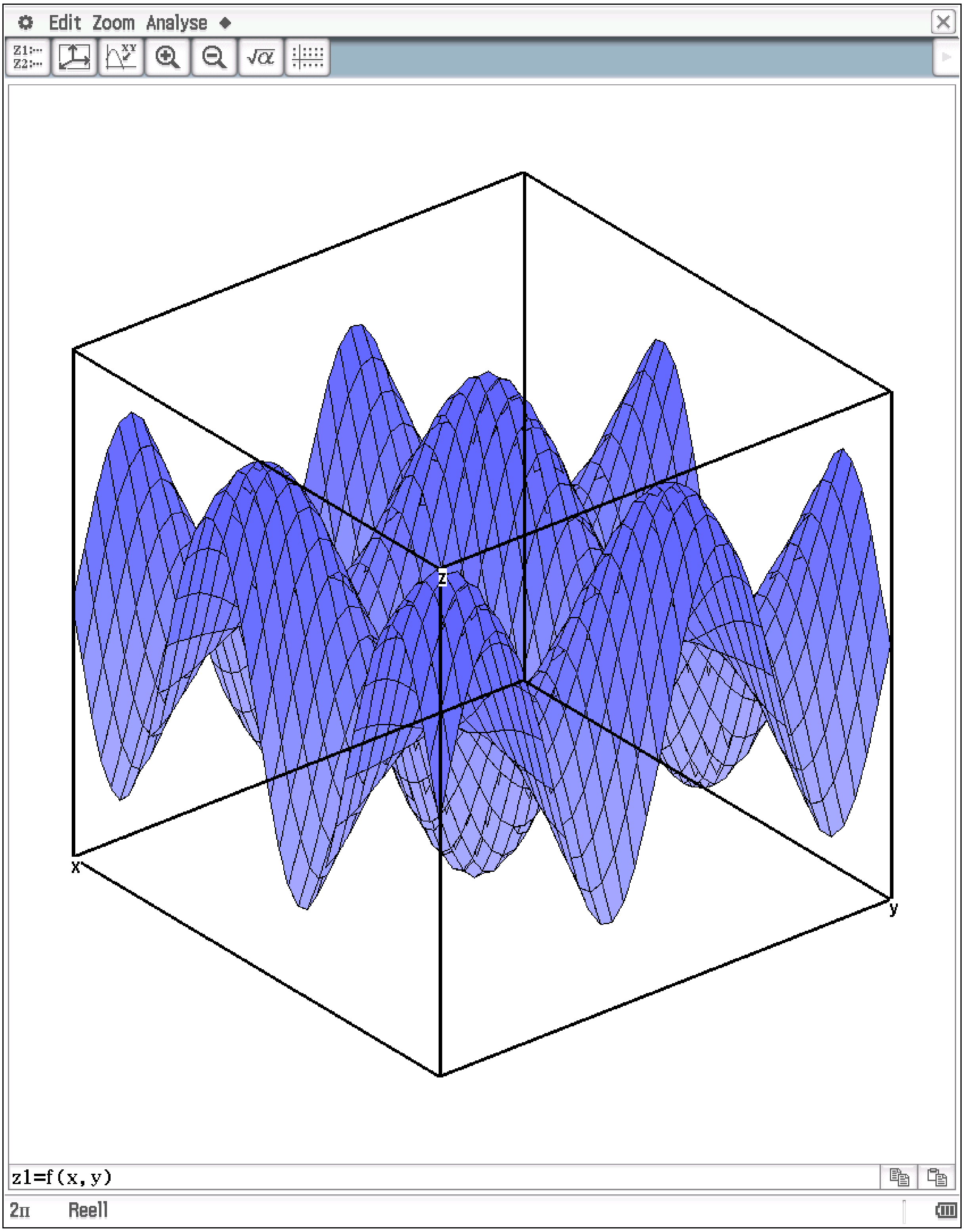
$$\{5.464101615,-5.464101615,89.56921938\}$$

{xst1(s,t),yst1(s,t),zst1(s,t)}|t=t2

$$\{-2\cdot\sqrt{3}+2,2\cdot\sqrt{3}-2,-12\cdot(2\cdot\sqrt{3}-2)+24\}$$

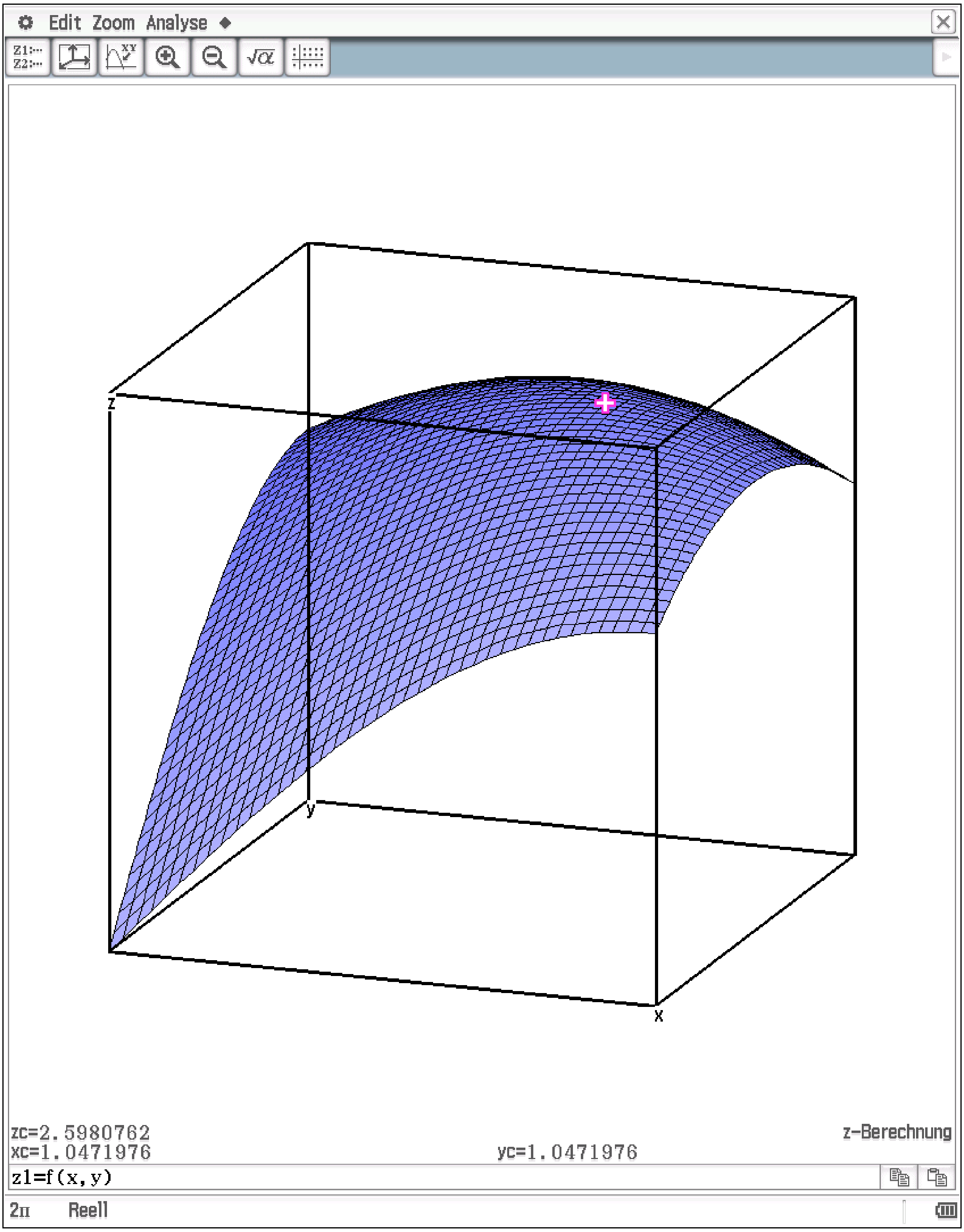
approx(ans)

$$\{-1.464101615,1.464101615,6.430780618\}$$

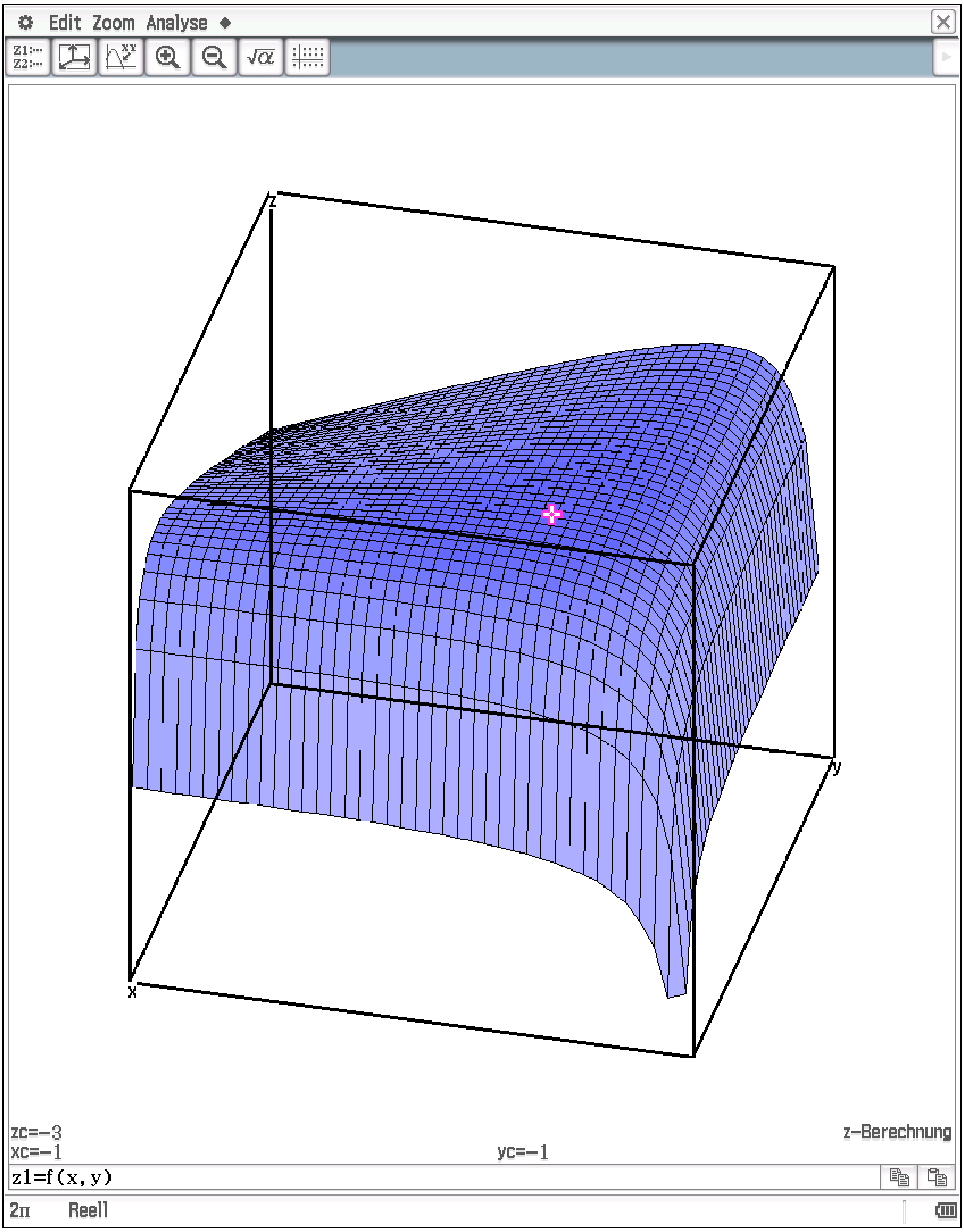


Aufg. D6.2c: wegen der Periodizität ergibt sich etwa das Oberflächenprofil eines Eierstapel-behältnisses, wie man es oft in Kaufhallen sieht.

Flächenstück über dem Bereich von 0 bis 4pi (für x und y)



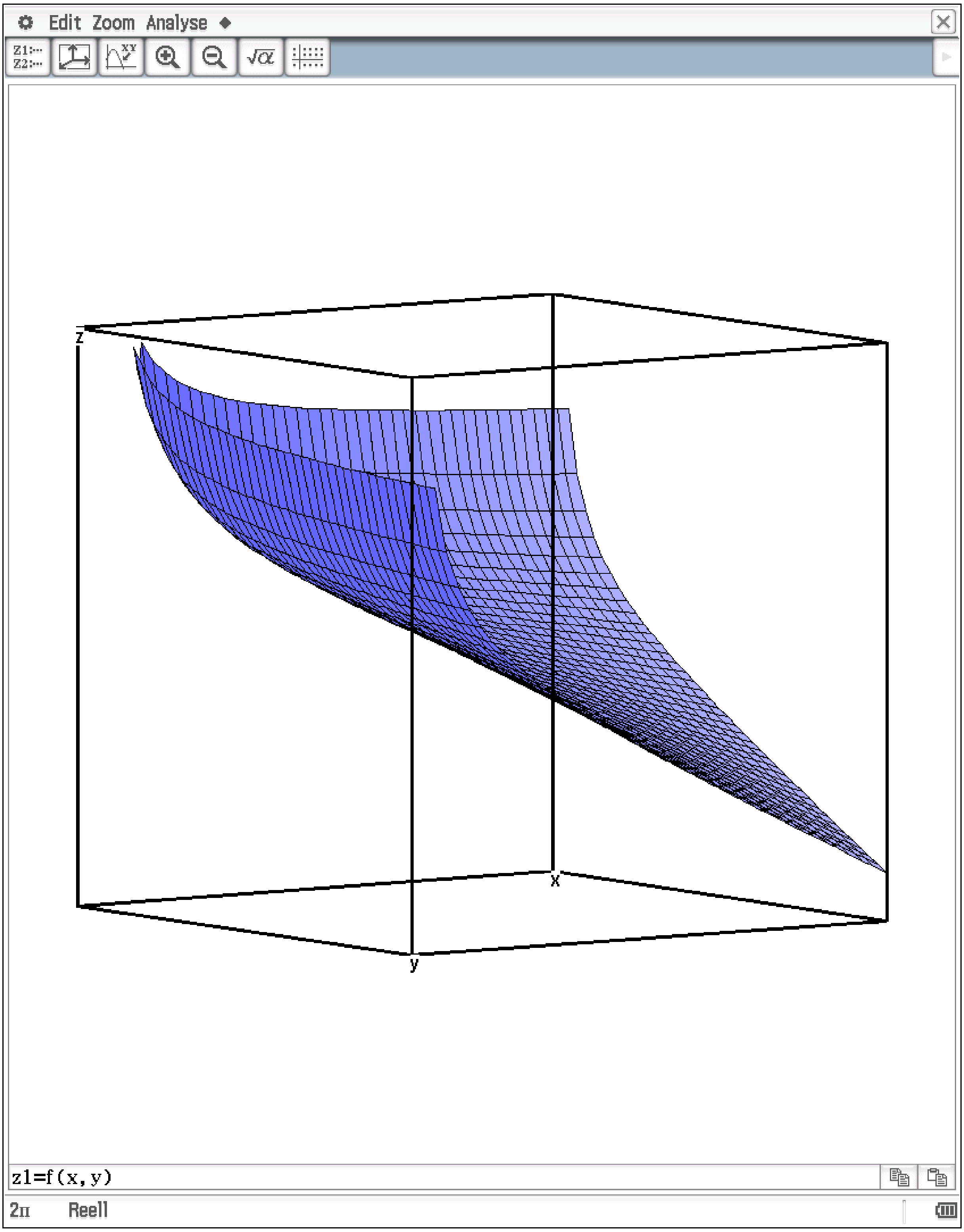
Aufg. D6.2c: Flächenstück über dem Bereich von 0 bis pi/2 (für x und y) mit z_max



Aufg. D6.2e Lage der Teilfläche unter dem III. Quadranten (-3<x,y<-0.01, -10<z<0)

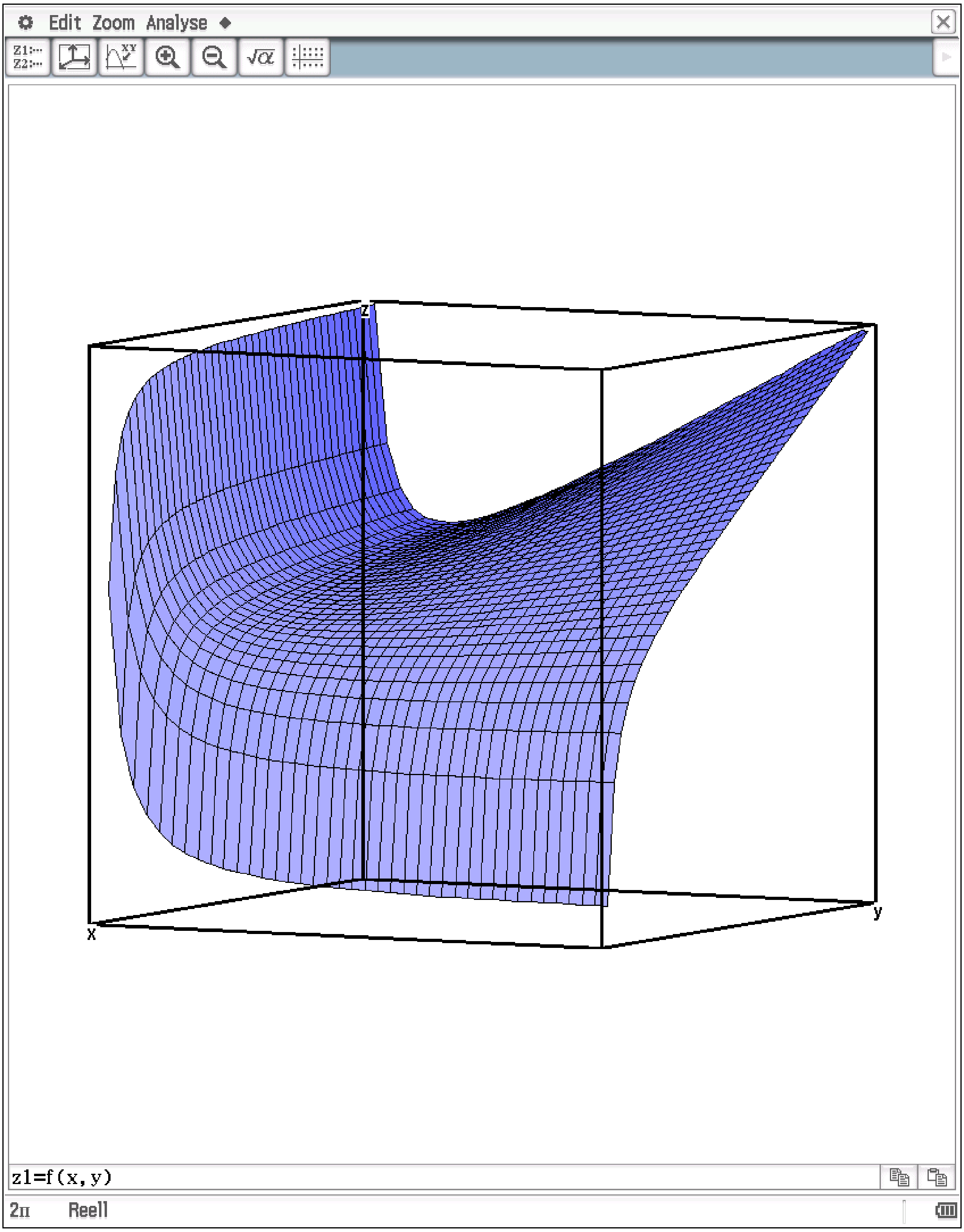
Gitterparameter jeweils auf 41

mit Hochpunkt P_max(-1|-1|-3)



Aufg. D6.2e Lage der Teilfläche über dem I. Quadranten (0.01<x,y<3, -10<z<10)

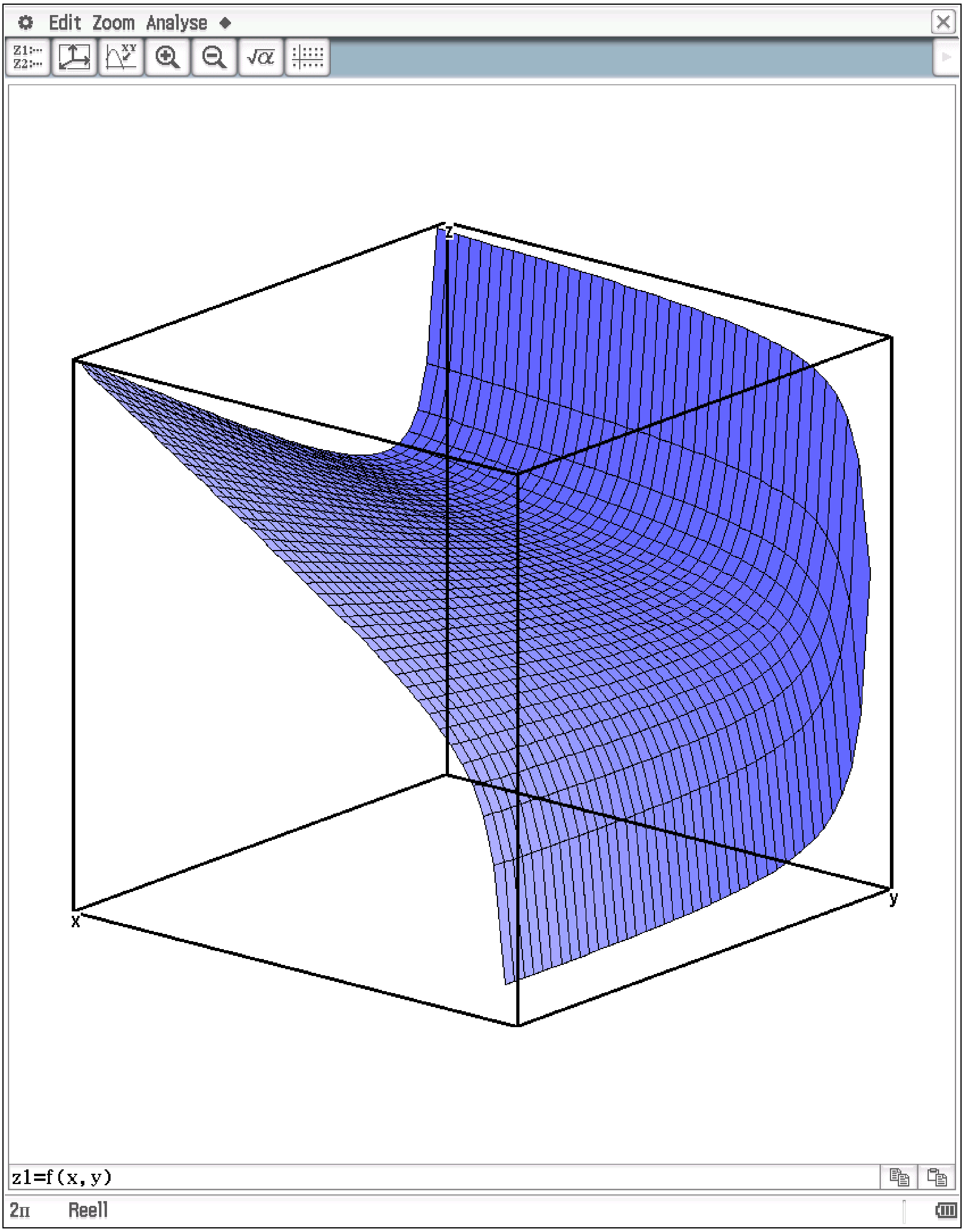
Streng monoton fallend



Aufg. D6.2e Lage der Teilfläche über dem II. Quadranten

(-4<x<-0.01, 0.01<y<3, -10<z<12)

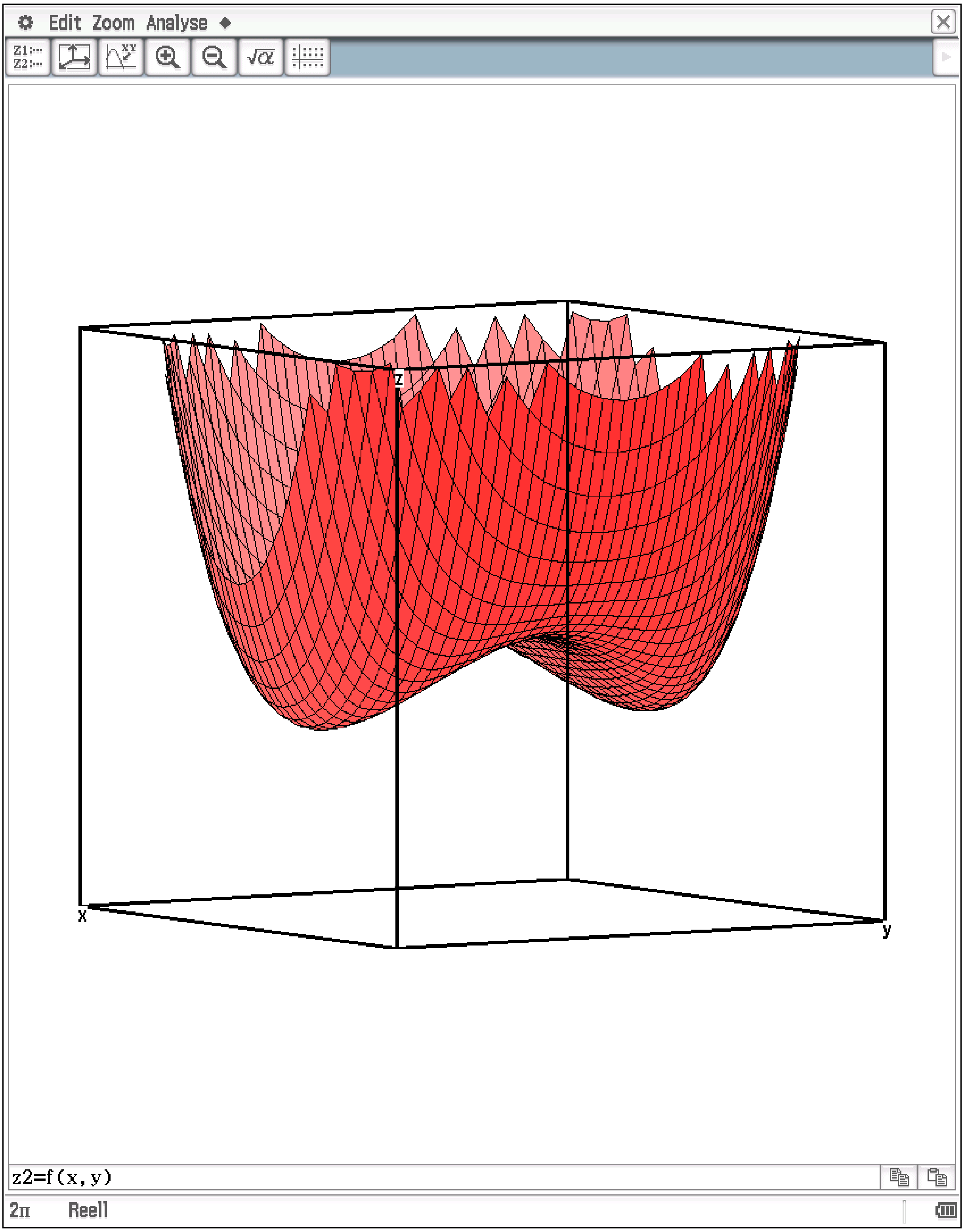
Streng monoton fallend bzw. wachsend



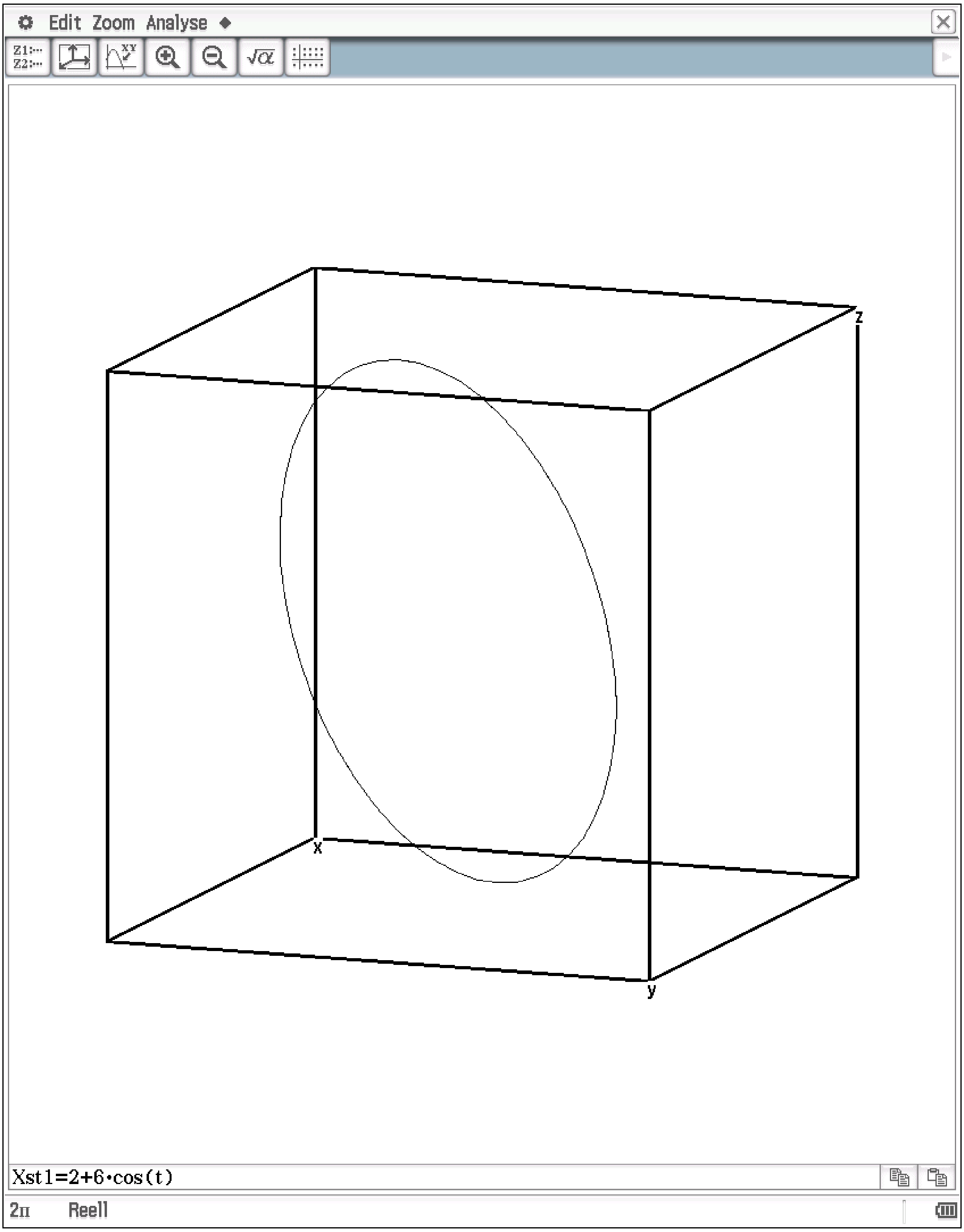
Aufg. D6.2e Lage der Teilfläche über dem IV. Quadranten

(0.01<x<3, -4<y<0.01, -10<z<12)

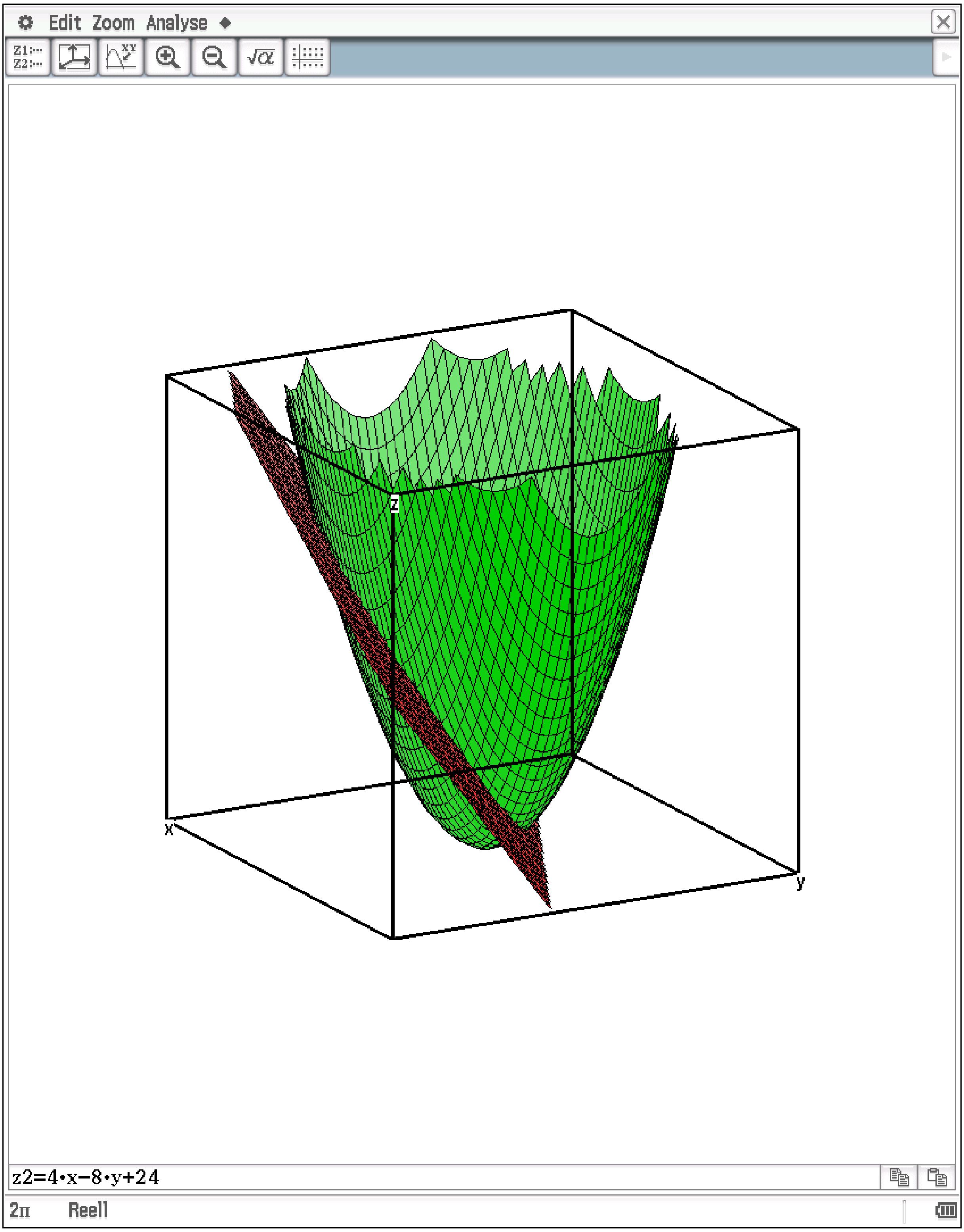
Streng monoton fallend bzw. wachsend



Aufg. D6.2g Die Lage der Extrema ist gut erkennbar (-3<x,y,z<3, Gitter: 45)



Aufg. D6.10 Schnittkurve (-10<x,y<10, 0<z<100, Gitter 50)



Aufg. D6.10 Schnitt Ebene-Paraboloid