Teach&Talk Essen 24.11.2018

Prof.Dr. Ludwig Paditz, HTW Dresden

"3D-Grafik mit dem ClassPad II - Anwendungsbeispiele"

==========

Im Sommer 2015 wurde die CP-Version 02.00.3001 mit der 3D-Grafik veröffentlicht und eher zufällig wurde festgestellt, dass sogar mehrere 3D-Grafiken gleichzeitig möglich sind, obwohl nach wie vor im 3D-Grafikeditor jeweils nur eine abgespeicherte Funktion aktiv geschaltet werden kann. Um gleichzeitig mehrere 3D-Funktionen aktiv zu bekommen, müssen diese von außen her definiert werden.

Diese Option war von den Softwareentwicklern in Japan zunächst gar nicht beabsichtigt, um den Prozessor des ClassPad (aktuelles OS 02.01.5000) nicht zu überlasten. In der Emulatorversion (aktuelle Version

02.01.5000) besteht diese Sorge nicht.

Anhand von Beispielen (z.B. Schnitt dreier Ebenen oder volumengrößte Pyramide in einer Kugel) wird gezeigt, wie die 3D-Grafiken erzeugt werden können. Das erste Beispiel illustriert das Lösungsverhalten eines linearen Gleichungssystems, während im zweiten Beispiel die Lösung einer Extremwertaufgabe grafisch veranschaulicht wird.

==========

1. Lösungsverhalten eines linearen Gleichungssystems mit einem Parameter

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2\cdot x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -2t\cdot x_1 + t\cdot x_2 + 9\cdot x_3 &= 6 \\ 2\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + t\cdot x_3 &= 1 \end{aligned}$$

a) Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?

b) Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ existieren unendlich viele Lösungen?

c) Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ existieren keine Lösungen?

d) Man berechne die Lösung für $t=1$.

e) Man berechne die Lösung zu b).

f) Wie können die Ergebnisse von a), b) und c) geometrisch interpretiert werden?

Untersuchung des LGS mit dem Austauschverfahren:

(s. Programm im library-Ordner: LinEqSys(...))

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2\cdot t & t & 9 \\ 2 & 2 & t \end{bmatrix} \Rightarrow A$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2\cdot t & t & 9 \\ 2 & 2 & t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow b$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

augment(A,−b)⇒ST

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2\cdot t & t & 9 & -6 \\ 2 & 2 & t & -1 \end{bmatrix}$$

Starttabelle mit den Hilfsvariablen $y_1=y_2=y_3=0$:

$$\begin{bmatrix} ST & x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ y_1= & 2 & 1 & 1 & 0 \\ y_2= & -2\cdot t & t & 9 & -6 \\ y_3= & 2 & 2 & t & -1 \end{bmatrix}$$

x_2 in Zeile1 mit y_1 tauschen: Pivot=1≠0, d.h.

$x_2=-2x_1-1x_3-0$ in 1. und 3.Zeile ersetzen:

LinEqSys(ST,1,2)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -4\cdot t & -t+9 & -6 \\ -2 & t-2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T1 & x_1 & x_3 & 1 \\ x_2= & -2 & -1 & 0 \\ y_2= & -4\cdot t & -t+9 & -6 \\ y_3= & -2 & t-2 & -1 \end{bmatrix}$$

x_1 in Zeile3 mit y_3 tauschen: Pivot=−2≠0, d.h.

$x_1=-\frac{t-2}{-2}x_3+\frac{1}{-2}$ in 1. und 2.Zeile ersetzen:

LinEqSys(T1,3,1)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix} -t+1 & 1 \\ -2\cdot t^2+3\cdot t+9 & 2\cdot t-6 \\ \frac{t}{2}-1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T2 & x_3 & 1 \\ x_2= & -t+1 & 1 \\ y_2= & -2\cdot t^2+3\cdot t+9 & 2\cdot t-6 \\ x_1= & \frac{t}{2}-1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

solve$(-2t^2+3t+9\neq 0, t)$

$$\left\{t\neq 3, t\neq -\frac{3}{2}\right\}$$

x_3 in Zeile2 mit y_2 tauschen: Pivot$=-2\cdot t^2+3\cdot t+9\neq 0$,

d.h. $t\neq 3, t\neq -\frac{3}{2}$

LinEqSys(T2, 2, 1)

done

matnew⇒T3

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2\cdot t+3} \\ \frac{1}{t+\frac{3}{2}} \\ \frac{-7}{2\cdot(2\cdot t+3)} \end{bmatrix}$$

Endtabelle T3=ET für $t\neq 3, t\neq -\frac{3}{2}$

$$\begin{bmatrix} T3 & 1 \\ x_2= & \frac{5}{2\cdot t+3} \\ x_3= & \frac{1}{t+\frac{3}{2}} \\ x_1= & \frac{-7}{2\cdot(2\cdot t+3)} \end{bmatrix}$$

zu a) eindeutig lösbar für $t\neq 3, t\neq -\frac{3}{2}$

Koeffizientenmatrix:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2\cdot t & t & 9 \\ 2 & 2 & t \end{bmatrix}\right)\neq 0$$

$$4\cdot t^2-6\cdot t-18\neq 0$$

solve(ans, t)

$$\left\{t\neq 3, t\neq -\frac{3}{2}\right\}$$

zu b) unendl. viele Lösungen für t=3 (Zeile2 in T2 widerspruchsfrei)

augment(A, b)⇒Ab

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2\cdot t & t & 9 & 6 \\ 2 & 2 & t & 1 \end{bmatrix}$$

keine Rangerhöhung durch b:

rank(A|t=3)=rank(Ab|t=3)

$$2=2$$

zu c) keine Lösung für $t=-\frac{3}{2}$ (Zeile2 in T2 widerspruchsvoll)

Rangerhöhung durch b:

$\text{rank}(A|t=-\frac{3}{2})<\text{rank}(Ab|t=-\frac{3}{2})$

$2<3$

zu d) eindeutig lösbar für t=1 (vgl. a))

$A^{-1}\cdot b|t=1$

$$\begin{bmatrix} -\frac{7}{10} \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$T3|t=1$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \\ -\frac{7}{10} \end{bmatrix}$$

$x_1=-\frac{7}{10}$, $x_2=1$, $x_3=\frac{2}{5}$

zu e) mehrdeutige Lösung für t=3

$$\begin{bmatrix} T2 & x_3 & 1 \\ x_2= & -t+1 & 1 \\ y_2= & -2\cdot t^2+3\cdot t+9 & 2\cdot t-6 \\ x_1= & \frac{t}{2}-1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$T2|t=3$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$x_3=s$, $x_2=-2s+1$, $x_1=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}$, $s\in\mathbb{R}$.

zu f)

a) Schnitt dreier Ebenen in einem Punkt: $t \neq 3, t \neq -\frac{3}{2}$

$x_1 = -\frac{7}{10}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{2}{5}$

b) Schnitt dreier Ebenen in einer Geraden: $t=3$

Ausgangssystem mit t=3:

ST|t=3

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 9 & -6 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

rref(augment(A, b))

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-7}{2\cdot(2\cdot t+3)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2\cdot t+3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{t+\frac{3}{2}} \end{bmatrix}$$

zeilenreduzierte Normalform (rref):

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & = & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & \frac{-7}{2\cdot(2\cdot t+3)} \\ 0 & 1 & 0 & & \frac{5}{2\cdot t+3} \\ 0 & 0 & 1 & & \frac{1}{t+\frac{3}{2}} \end{bmatrix}$$

ref(augment(A, b))

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{t+9}{2\cdot t} & \frac{3}{t} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{t+\frac{3}{2}} \end{bmatrix}$$

reduzierte Normalform (ref)

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & = & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & 0 \\ 0 & 1 & \frac{t+9}{2\cdot t} & & \frac{3}{t} \\ 0 & 0 & 1 & & \frac{1}{t+\frac{3}{2}} \end{bmatrix}$$

stop

ST|t=3

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 9 & -6 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ST & x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ y_1= & 2 & 1 & 1 & 0 \\ y_2= & -2\cdot t & t & 9 & -6 \\ y_3= & 2 & 2 & t & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ST & x=x_1 & y=x_2 & z=x_3 & 1 \\ y_1= & 2 & 1 & 1 & 0 \\ y_2= & -6 & 3 & 9 & -6 \\ y_3= & 2 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Define z1(x,y)=-2x-y

done

Define z2(x,y)=(6+6x-3y)/9

done

Define z3(x,y)=(1-2x-2y)/3

done

3D-Grafik: mehrdeutige Lösung	Z1:… Z2:…

c) kein gemeinsamer Punkt

ST|t=-3/2

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -\frac{3}{2} & 9 & -6 \\ 2 & 2 & -\frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ST & x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ y_1= & 2 & 1 & 1 & 0 \\ y_2= & -2\cdot t & t & 9 & -6 \\ y_3= & 2 & 2 & t & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ST & x=x_1 & y=x_2 & z=x_3 & 1 \\ y_1= & 2 & 1 & 1 & 0 \\ y_2= & 3 & -\frac{3}{2} & 9 & -6 \\ y_3= & 2 & 2 & -\frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

Rang der erweiterten Matrix = 3:

rank(ans)

3

Rang der Koeff.-Matrix = 2:

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -\frac{3}{2} & 9 \\ 2 & 2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}\right)$$

2

keine Ranggleichheit, d.h. keine Lösung.

stop

Define z1(x,y)=-2x-y

done

Define $z2(x,y)=(6-3x+\frac{3}{2}y)/9$

done

Define $z3(x,y)=(1-2x-2y)/(-\frac{3}{2})$

done

3D-Grafik: keine Lösung	Z1:··· Z2:···

stop

d) ein gemeinsamer Punkt

ST|t=1

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 9 & -6 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ST & x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ y_1= & 2 & 1 & 1 & 0 \\ y_2= & -2\cdot t & t & 9 & -6 \\ y_3= & 2 & 2 & t & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ST & x=x_1 & y=x_2 & z=x_3 & 1 \\ y_1= & 2 & 1 & 1 & 0 \\ y_2= & -2 & 1 & 9 & -6 \\ y_3= & 2 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Define z1(x,y)=-2x-y

done

Define z2(x,y)=(6+2x-y)/9

done

Define z3(x,y)=1-2x-2y

done

3D-Grafik: eindeutig Lösung

stop

alternativ:

Der Fall t≠3 wird hier nicht erkannt:

rref(augment(A,b))

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-7}{2\cdot(2\cdot t+3)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2\cdot t+3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{t+\frac{3}{2}} \end{bmatrix}$$

$t \neq -\frac{3}{2}$.

rref(augment(A,b)|t=-3/2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Widerspruch in 3.Zeile für $t=-\frac{3}{2}$.

rref(augment(A,b)|t=3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kein Widerspruch in 3.Zeile für t=3.

det(A)

$$4\cdot t^2-6\cdot t-18$$

solve(ans=0,t)

$$\left\{t=3,\ t=-\frac{3}{2}\right\}$$

stop

Lit.-Hinweis zum Austauschverfahren:

==========

Paditz,L. (2012):

Parameterbehaftete lineare Gleichungssysteme

in der Hochschullehre: Das Austauschverfahren

Computeralgebra - Rundbrief Nr. 51

(Ausgabe Oktober/2012), S. 19-22,

http://www.fachgruppe-computeralgebra.de/

data/CA-Rundbrief/car51.pdf

s. auch:

http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/en/?q=an%3A2013e.00569

2. Volumengrößte Pyramide in einer Kugel (Extremwertaufgabe)

==========

Kugeloberfläche: $x^2+y^2+z^2=R^2$.

regelmäßige Pyramide mit quadratischer Grundfläche.

Pyramidenspitze im Nordpol: $N(0,0,R)$

Grundfläche mit den vier Eckpunkten unterhalb der x-Achse bzw. y-Achse auf der Kugeloberfläche:

mit

$P_1(r,0,-\sqrt{R^2-r^2}),P_2(-r,0,-\sqrt{R^2-r^2}),P_3(0,r,-\sqrt{R^2-}$ ▶

2D-Grafik "Draufsicht" Y1:··· Y2:···

DelVar R,r

done

Kantenlänge des Quadrates:

$$\text{norm}\left(\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ -\sqrt{R^2-r^2} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 \\ r \\ -\sqrt{R^2-r^2} \end{bmatrix}\right)\,|\,r>0$$

$\sqrt{2}\cdot r$

Pyramidenvolumen:

Define $V(r)=\frac{1}{3}\cdot(\sqrt{2}\cdot r)^2\cdot(R+\sqrt{R^2-r^2})$

done

$\frac{d}{dr}(V(r))=0$

$$\frac{-\left(6\cdot r^3-4\cdot R^2\cdot r-4\cdot R\cdot r\cdot\sqrt{R^2-r^2}\right)}{3\cdot\sqrt{R^2-r^2}}=0$$

solve(ans, r) | R>0

$$\left\{r=0,\ r=\frac{-2\cdot\sqrt{2}\cdot R}{3},\ r=\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot R}{3}\right\}$$

$\frac{d^2}{dr^2}(V(r))\ |r=\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot R}{3}$

$$\frac{27\cdot\left(\frac{4\cdot R^5}{81}-\frac{68\cdot R^4\cdot|R|}{81}\right)}{R^4}$$

(ans | R>0) < 0

$$\frac{-64\cdot R}{3}<0$$

Damit liegt ein Max. vor.

Lösung

$V(\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot R}{3})\ |R>0$

$$\frac{64\cdot R^3}{81}$$

zum Vergleich: Kugelvolumen $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$

Vergleich:

$$\frac{\frac{64\cdot R^3}{81}}{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3}$$

$$\frac{16}{27\cdot\pi}$$

approx(ans)

0.1886280807

maximales Pyramidenvolumen:

ca. 18,86% des Kugelvolumens.

grafische Darstellung (3D):

Kugeloberfläche mit R=1: $-1 \le s \le 0$, $0 \le t \le 1$,

Define $xst1(s,t)=\cos(s\pi)\cdot\sin(t\pi)$

done

Define $yst1(s,t)=\sin(s\pi)\cdot\sin(t\pi)$

done

Define $zst1(s,t)=\cos(t\pi)$

done

Grundfläche der Pyramide (Quadrat)

$1 \Rightarrow R$

1

$\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot R}{3} \Rightarrow r$

$\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}$

Define $xst2(s,t)=r\cdot(1-(s+1)-t)$

done

Define $yst2(s,t)=r\cdot(-(s+1)+t)$

done

Define $zst2(s,t)=-\sqrt{R^2-r^2}$

done

$Zst2(s,t)$

$-\frac{1}{3}$

Seitenflächen (Dreiecke)

Define $xst3(s,t)=-r\cdot(s+1)$

done

Define $yst3(s,t)=-r\cdot(-(s+1)+t)\cdot\begin{cases}1, & t\geq s+1\\ \frac{1}{0}, & t<s+1\end{cases}$

done

Define $zst3(s,t)=1-\frac{4}{3}\cdot t$

done

Define $xst4(s,t)=r\cdot(s+1)$

done

Define $yst4(s,t)=-r\cdot(-(s+1)+t)\cdot\begin{cases}1, & t\geq s+1\\ \frac{1}{0}, & t<s+1\end{cases}$

done

Define $zst4(s,t)=1-\frac{4}{3}\cdot t$

done

Parameterbereich: $-1\leq s\leq 0,\ 0\leq t\leq 1,$

Betrachtungsquader: $-2\leq x,y,z\leq 2$

Anzahl der Linien im Liniennetz: s,t−Linien = 25

$R:=1$

1

$r:=\frac{2}{3}\sqrt{2}$

$\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}$

grafische Darstellung (3D) Z1:··· Z2:···

stop

vollständige Pyramide:

==========

Grundfläche der Pyramide (Quadrat)

$1 \Rightarrow R$

$$1$$

$\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot R}{3} \Rightarrow r$

$$\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}$$

Define xst2(s,t)=r·(1−(s+1)−t)

done

Define yst2(s,t)=r·(−(s+1)+t)

done

Define zst2(s,t)=$-\sqrt{R^2-r^2}$

done

Zst2(s,t)

$$-\frac{1}{3}$$

Seitenflächen (Dreiecke)

Define xst3(s,t)=−r·(s+1)

done

Define yst3(s,t)=$-r\cdot(-(s+1)+t)\cdot\begin{cases}1, & t\geq s+1\\ \frac{1}{0}, & t<s+1\end{cases}$

done

Define zst3(s,t)=$1-\frac{4}{3}\cdot t$

done

Define xst4(s,t)=r·(s+1)

done

Define $yst4(s,t)=-r\cdot(-(s+1)+t)\cdot\begin{cases}1, & t\geq s+1\\ \frac{1}{0}, & t<s+1\end{cases}$

done

Define $zst4(s,t)=1-\frac{4}{3}\cdot t$

done

Define $xst5(s,t)=-r\cdot(s+1)$

done

Define $yst5(s,t)=r\cdot(-(s+1)+t)\cdot\begin{cases}1, & t\geq s+1\\ \frac{1}{0}, & t<s+1\end{cases}$

done

Define $zst5(s,t)=1-\frac{4}{3}\cdot t$

done

Define $xst6(s,t)=r\cdot(s+1)$

done

Define $yst6(s,t)=r\cdot(-(s+1)+t)\cdot\begin{cases}1, & t\geq s+1\\ \frac{1}{0}, & t<s+1\end{cases}$

done

Define $zst6(s,t)=1-\frac{4}{3}\cdot t$

done

Parameterbereich: $-1\leq s\leq 0,\ 0\leq t\leq 1,$

Betrachtungsquader: $-2\leq x,y,z\leq 2$

Anzahl der Linien im Liniennetz: s,t−Linien = 25

R:=1

1

$r := \frac{2}{3}\sqrt{2}$

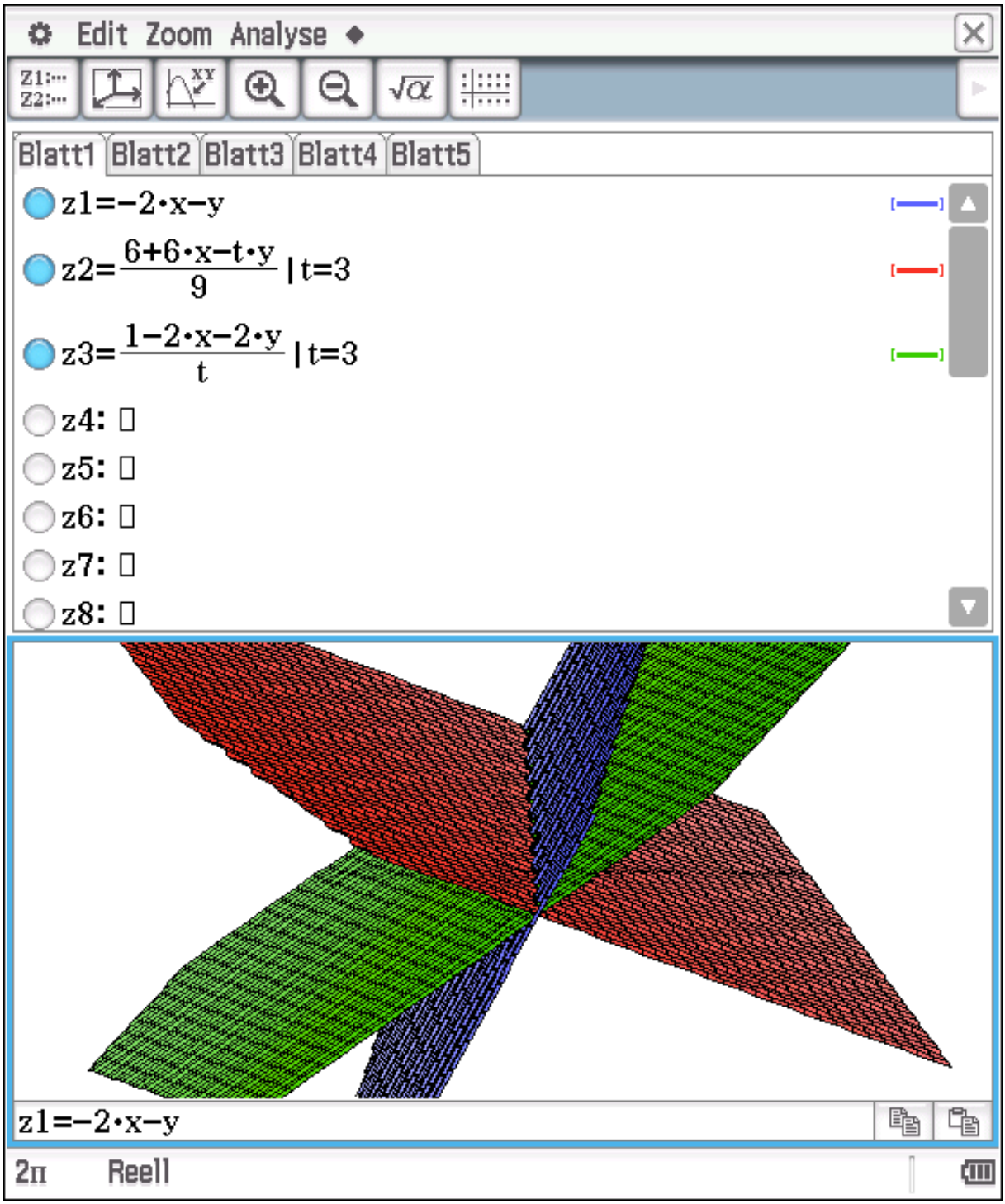
$$\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3}$$

3D−Grafik der Pyramide

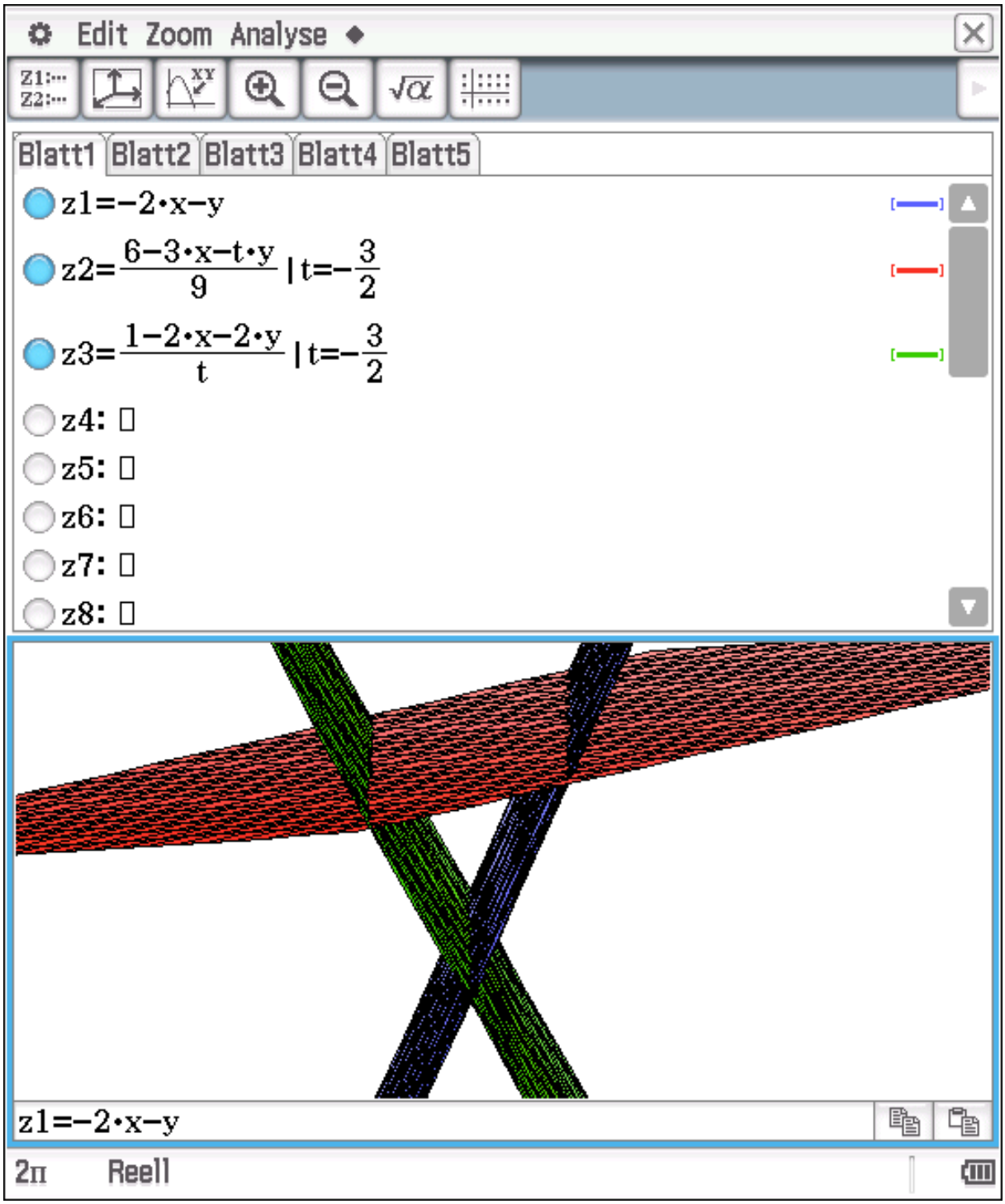
Z1:···
Z2:···

T&T Essen 2018 - Prof. Dr. Ludwig Paditz, HTW Dresden

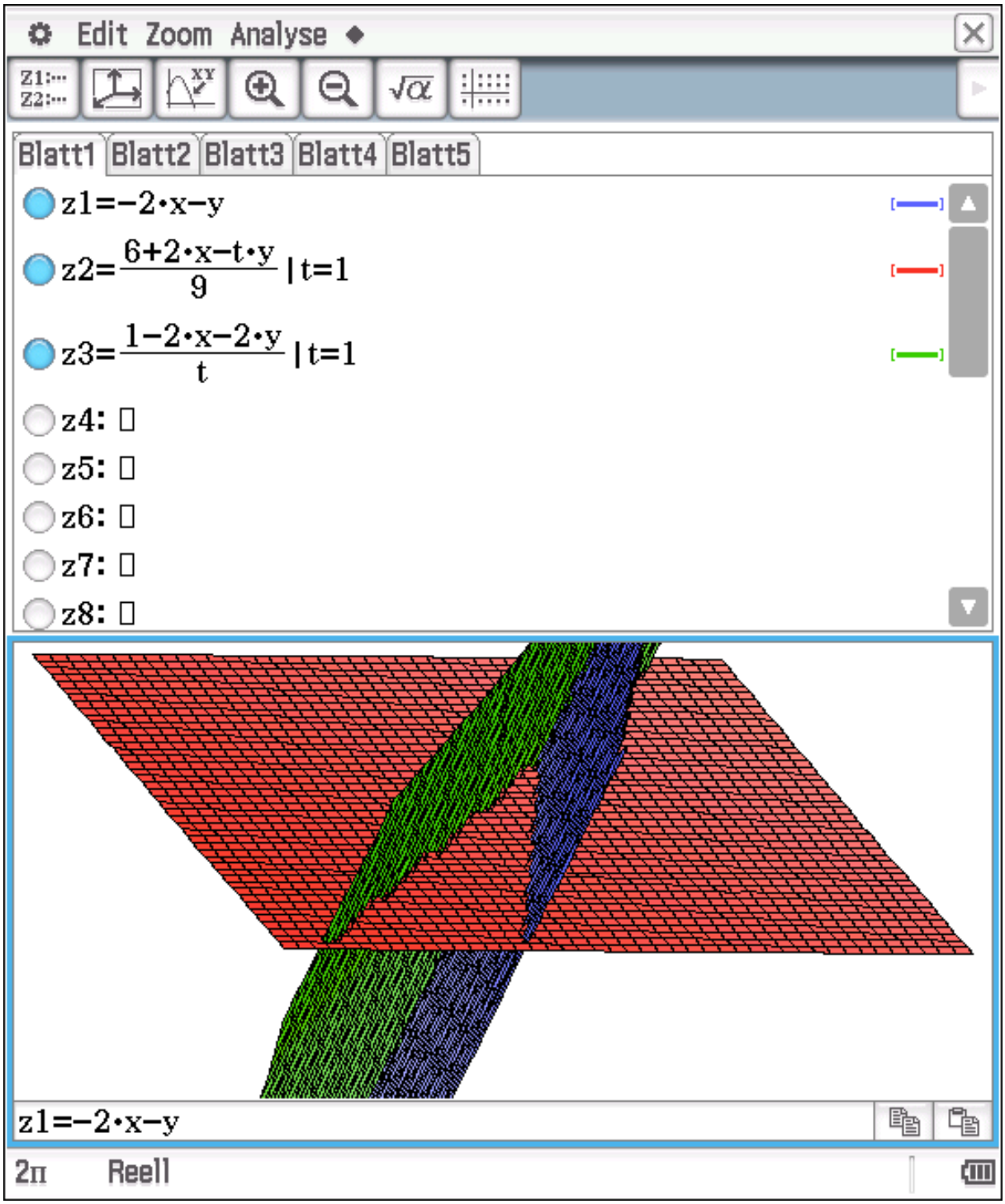
Schnitt dreier Ebenen in einer Geraden: mehrdeutige Lösung des LGS



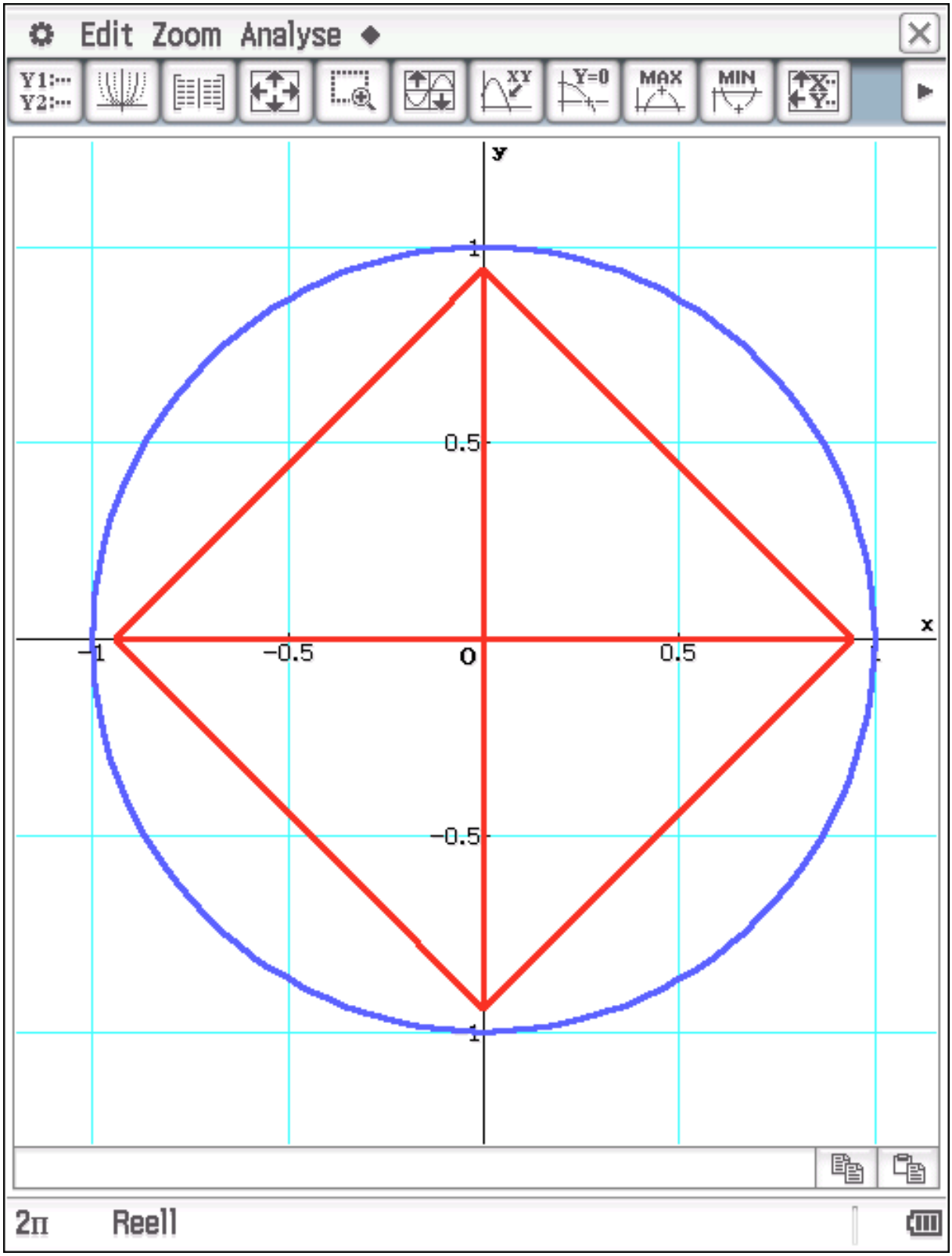
paarweiser Schnitt dreier Ebenen: keine Lösung des LGS



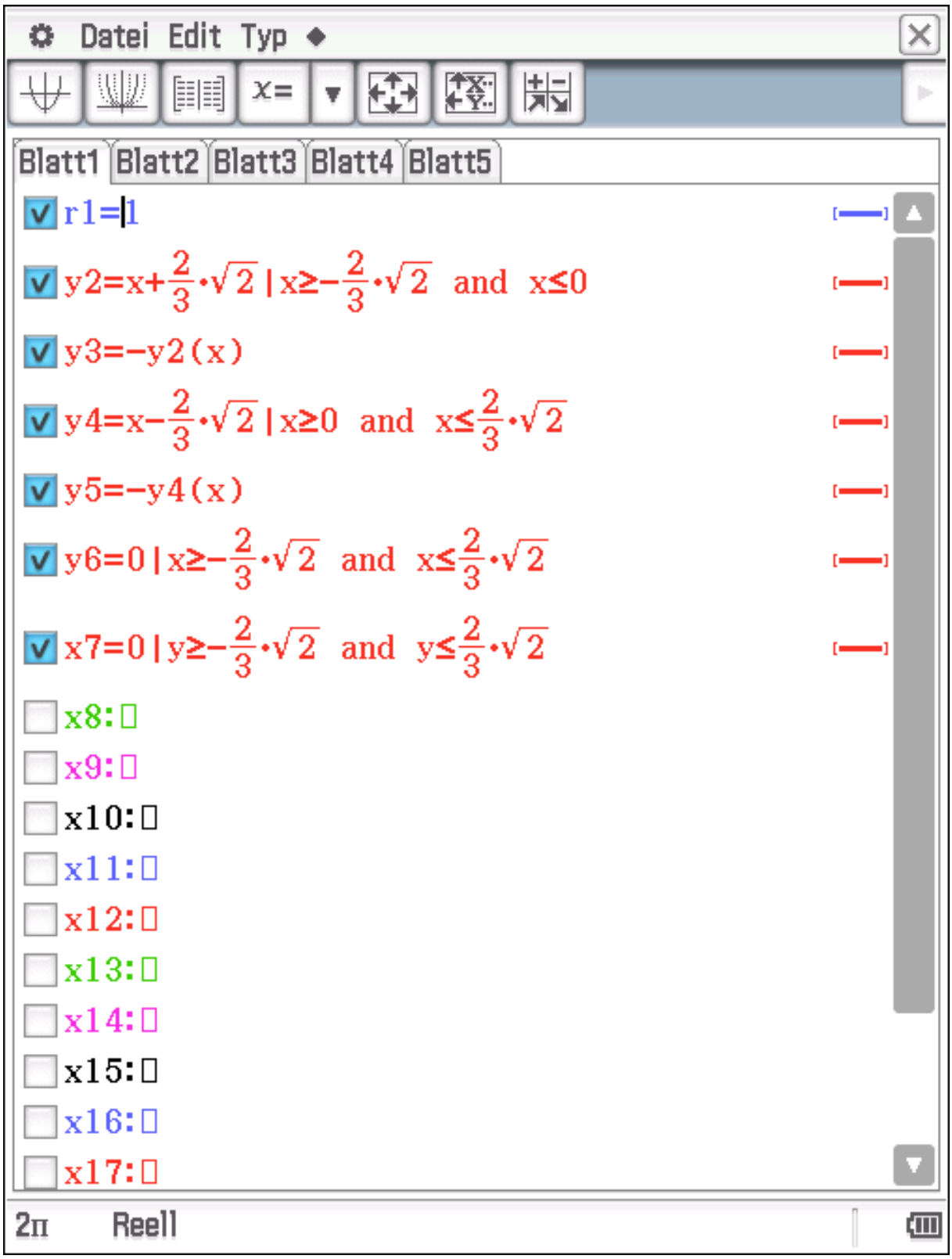
Schnitt dreier Ebenen in einem Punkt: eindeutige Lösung des LGS



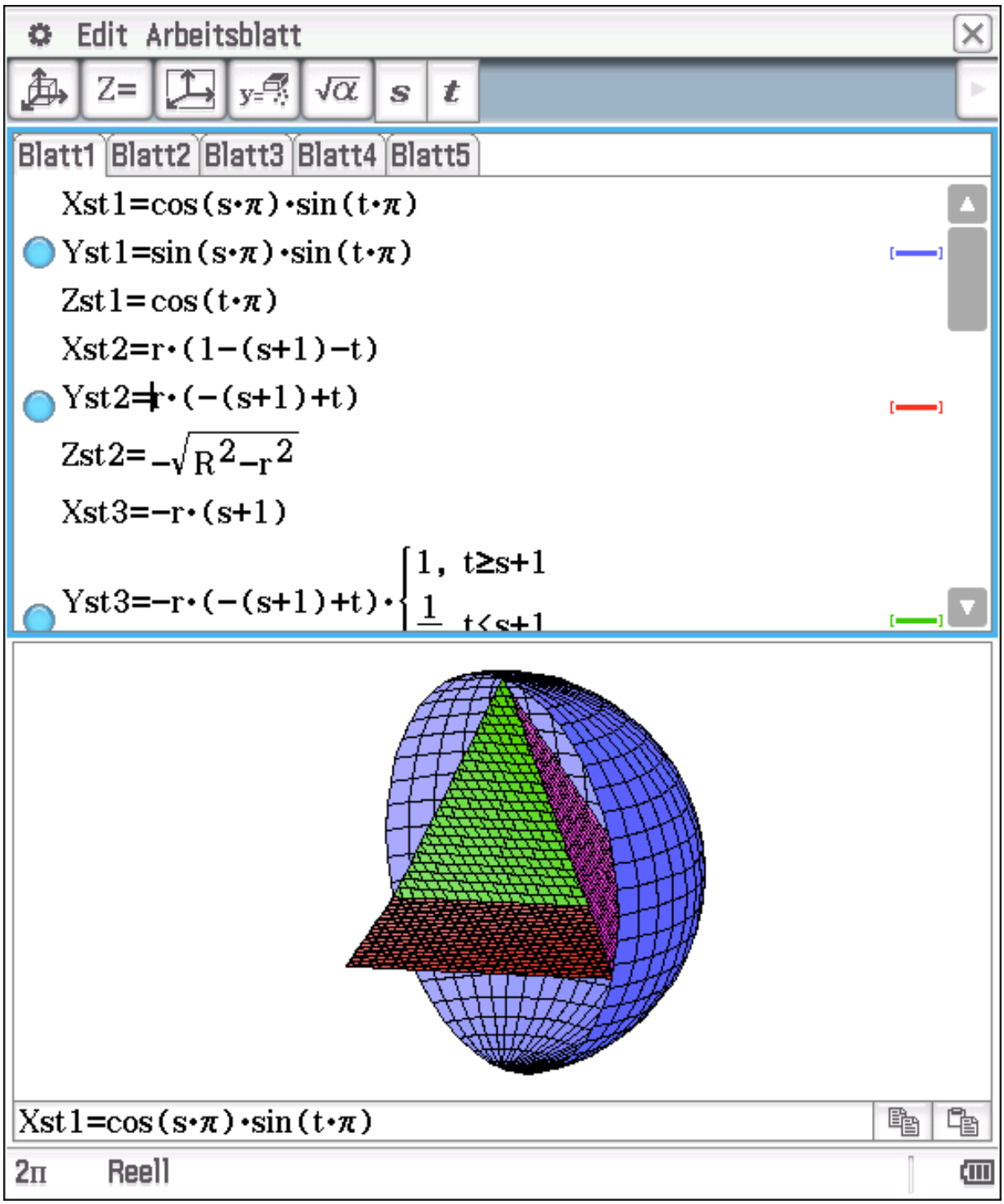
volumengrößte Pyramide in einer Kugel – Draufsicht



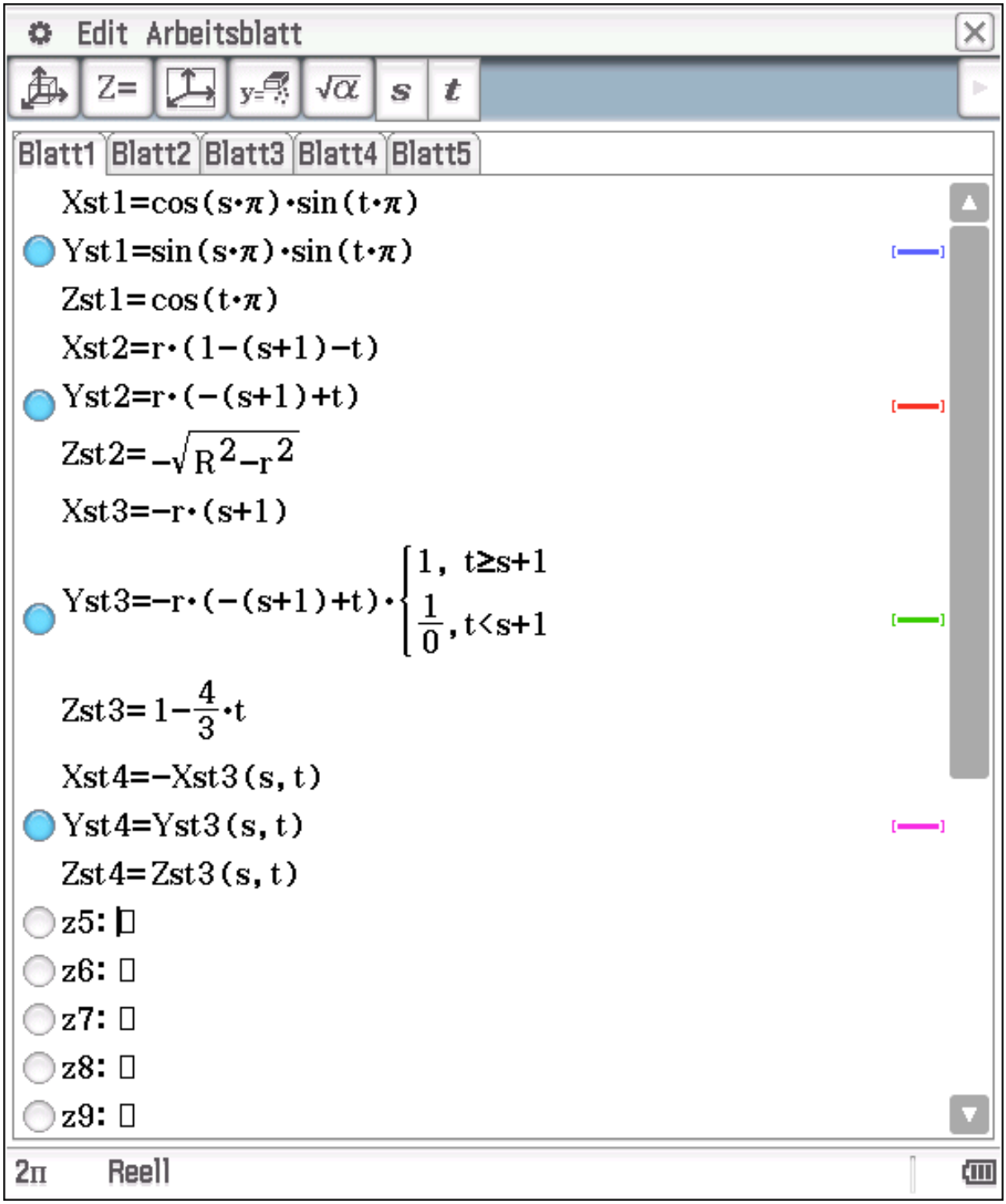
volumengrößte Pyramide in einer Kugel – Draufsicht



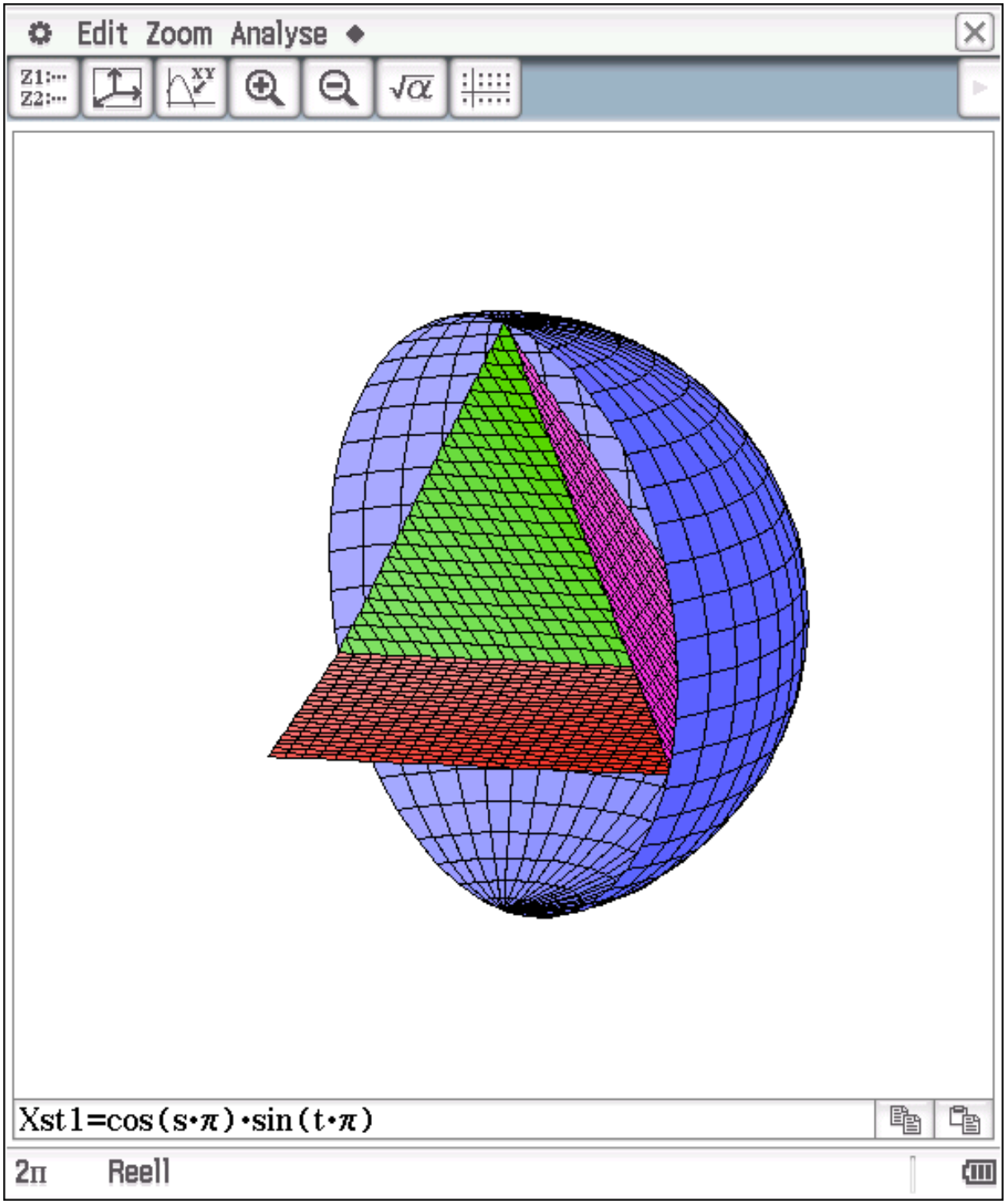
volumengrößte Pyramide in einer Kugel



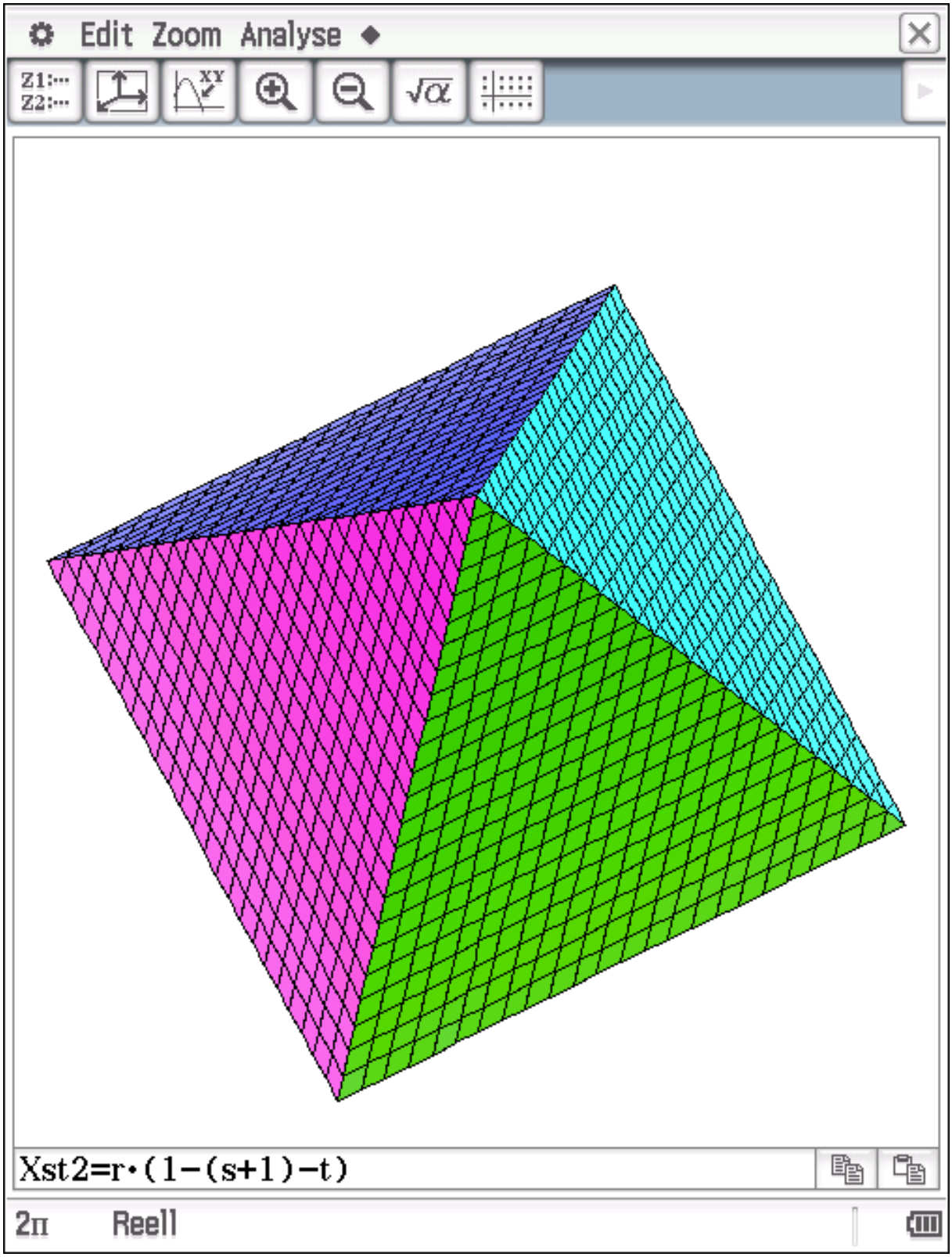
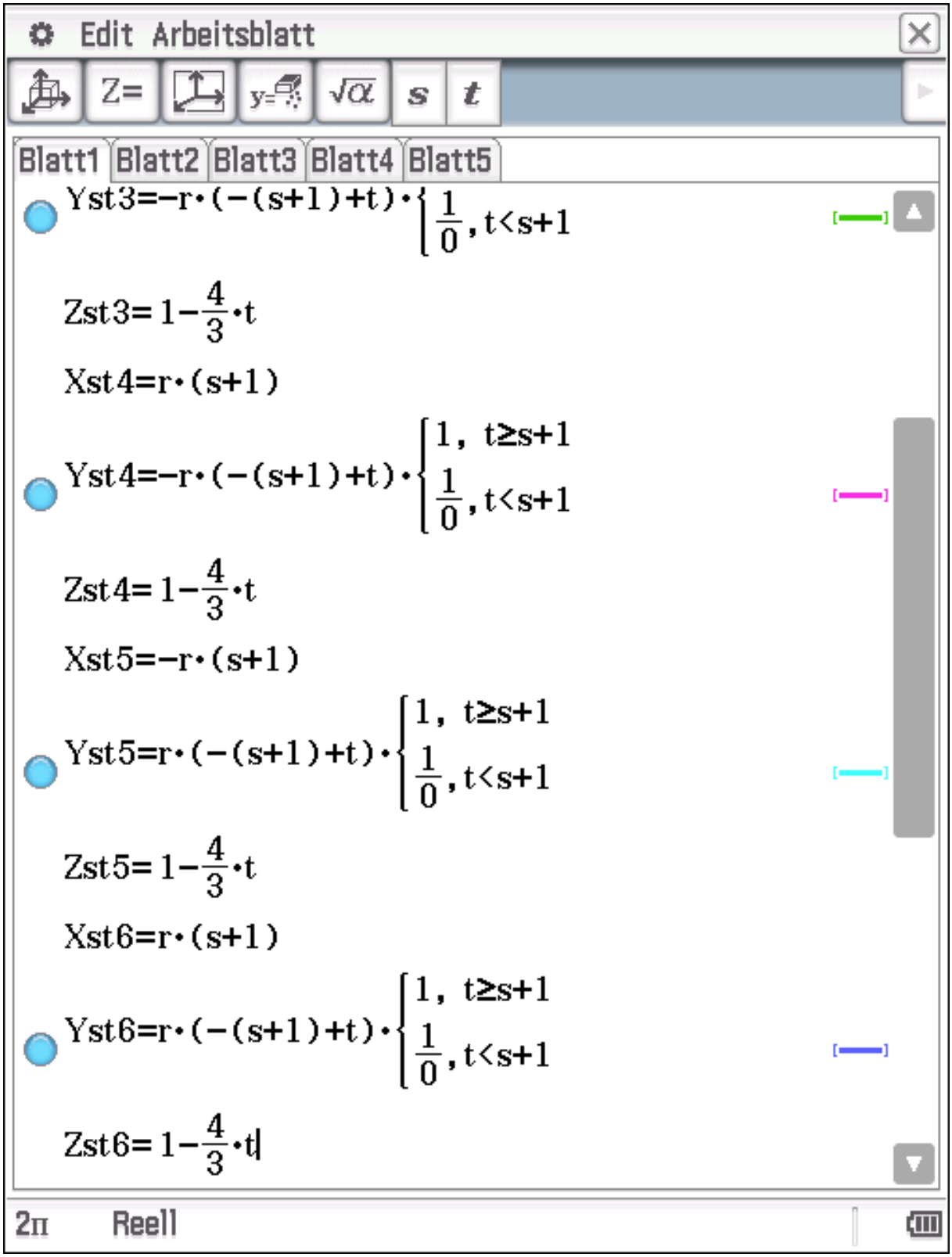
die Teilflächen in Parameterdarstellung:



Blick in die Kugel mit der Pyramide:



Die Pyramide



Die Pyramide