Teach&Talk 2010
Prof. Dr. Ludwig Paditz

Differenzialgleichungen:
Mathematische Modelle und Lösungswege
==

In der Sekundarstufe II werden auch Differenzialgleichungen behandelt.
An ausgewählten Beispielen **aus Schulbüchern Beruflicher Gymnasien**

[1] Sachsen: ISBN 978-3-427-21525-7,
Lösungen: 978-3-427-21526-4,
[2] Hessen: ISBN 978-3-427-11514-4,
Lösungen: 978-3-427-11515-1,
[3] Rheinland-Pfalz: ISBN 978-3-427-11530-4,
Lösungen 978-3-427-11531-1,

wird aufgezeigt, wie hier der ClassPad als nützliches Werkzeug eingesetzt werden kann.
Die Teilnehmer können während des Workshops einiges selbst ausprobieren,
sofern sie einen ClassPad ab Betriebssystem 3.04 zur Verfügung haben.

Neben der analytischen Rechnung wird auch die **Differenzialgleichungsgrafik** demonstriert:
Integralkurven im Richtungsfeld.
Es wird zusätzlich ein Ausblick auf **Differenzialgleichungssysteme** gegeben
und auf Lösungsmöglichkeiten mit dem ClassPad hingewiesen.

In bestimmten Anwendungsaufgaben erweist sich
auch die **Laplace-Transformation**
als nützlich, die ebenfalls im ClassPad implementiert ist.
===

1. Abkühlungsprozeß - Mathematisches Modell
===

Aufgabenstellung:
Nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetz ist die Geschwindigkeit der Abkühlung eines Körpers proportional der Temperaturdifferenz gegenüber dem umgebenden Medium.
Die Anfangstemperatur des Körpers sei $T_0=100°C$.
Nach einer Zeit $t_1=10min$ hat sich der Körper an der Luft mit der konstanten Temperatur $T=20°C$ auf $T_1=60°C$ abgekühlt.
Nach welcher Zeit t_2 hat der Körper die Temperatur $T_2=25°C$ erreicht?

Lösung:

Prinzipskizze zur Abkühlung	Y1:… Y2:…

Modellansatz:
Die Geschwindigkeit eines veränderlichen Prozesses erhält man über die 1. Ableitung der veränderlichen Größe,

z.B.
Weg-Zeit-Gesetz $s=s(t)$, s zurückgelegter Weg nach der Zeit t,

Geschwindigkeit zur Zeit t: v(t)=s'(t).

Nun hier:
T=T(t) sei die erreichte Temperatur T zur Zeit t,
dann ist
T'(t) die Geschwindigkeit der Abkühlung zur Zeit t.

T'(t) ist offenbar negativ.
Sei k>0 der Proportionalitätsfaktor (ein physikalischer Parameter).
Dann gilt nach Newton:

T'(t)=-k*(T(t)-T)

(Hinw.: Beachten Sie die unterschiedl. Symbole
T=T(t) und T=const.=20 .)

Zusatzbedingungen (sogen. Randbedingungen):
t_0=0 und T(t_0)=100
t_1=10 und T(t_1)=60

Damit haben wir ein RWP für T=T(t)
(Randwertproblem über dem Intervall [t_0,t_1]):
T'(t)=-k*(T(t)-T),T(t_0)=100,T(t_1)=60

Lösung mit dem dSolve-Befehl (Syntax beachten):

Eine Dgl. 1.Ordnung kann nur als AWP (Anfangswertproblem) eingegeben werden:
dSolve(T'=-k*(T-T),t,T,t=0,T=100)

$$\left\{T=-|T-100|\cdot e^{-k\cdot t}+T, T=|T-100|\cdot e^{-k\cdot t}+T\right\}$$

dSolve(T'=-k*(T-T),t,T,t=0,T=100)|T=20

$$\left\{T=-80\cdot e^{-k\cdot t}+20, T=80\cdot e^{-k\cdot t}+20\right\}$$

Wegen $T(0)=100$ ist die Lösung $T=-80\cdot e^{-k\cdot t}+20$ eine Scheinlösung und entfällt.

Zwischenergebnis:

$T(t)=80\cdot e^{-k\cdot t}+20$

Berücksichtigung der rechten Randbedingung $T(10)=60$:

$\mathrm{solve}(80\cdot e^{-k\cdot t}+20=60,k)|t=10$

$$\left\{k=\frac{\ln(2)}{10}\right\}$$

Die Temperaturfunktion lautet:

$T(t)=80\cdot e^{-k\cdot t}+20$ mit $k=\dfrac{\ln(2)}{10}$

$\mathrm{simplify}(80\cdot e^{-k\cdot t}+20|k=\dfrac{\ln(2)}{10})$

$$\frac{80}{2^{\frac{t}{10}}}+20$$

Die Temperaturfunktion lautet nunmehr:

$\mathbf{T(t)=80\times 2^{\frac{-t}{10}}+20,\ t\geq 0.}$

========================

Zusatzfrage:

$T(t)=80\times 2^{\frac{-t}{10}}+20=25$, ges. t

$\mathrm{solve}(80\times 2^{\frac{-t}{10}}+20=25,t)$

$$\{t=40\}$$

Antwortsatz: Nach 40min ist der Körper auf 25°C abgekühlt.

Hinweis:
Lösung der Dgl. per Hand über TdV (Trennung der Variablen):

$\frac{dT}{dt}=-k\times(T-20)$ ergibt $\frac{dT}{T-20}=-kdt$. Nun Integration der Dgl. mit Integrationskonstante C

$$\int_{\square}^{\square} \frac{1}{T-20}\,dT = \int_{\square}^{\square} -k\,dt + C$$

$$\ln(|T-20|)=-k\cdot t+C$$

solve(ans,T)

$$\left\{T=-e^{-k\cdot t+C}+20, T=e^{-k\cdot t+C}+20\right\}$$

usw.

2. Unterschiedliche Aufgabentypen mit Dgln.

===

Je nach Aufgabentyp ist der dSolve-Befehl unterschiedlich zu nutzen:

2.1 einfachste Dgl. ohne Zusatzbedingungen:

==

[1] S.308:
dSolve(f'=2,x,f)
Die Stammfunktion zu **$y=f'(x)=2$** lautet
$y=f(x)=2x+C_1$

[1] S.308:
dSolve(f''=k,x,f)

$$\left\{f=\frac{k\cdot x^2}{2}+x\cdot \mathrm{const}(2)+\mathrm{const}(1)\right\}$$

Die Stammfunktion zu **y=f''(x)=k** lautet

$$y=f(x)=\frac{k\cdot x^2}{2}+x\cdot C_1+C_2$$

[2] S.183 bzw. [3] S.93:

dSolve(8y'''-3y''=0,x,y)

$$\left\{y=e^{\frac{3\cdot x}{8}}\cdot \mathrm{const}(1)+x\cdot \mathrm{const}(3)+\mathrm{const}(2)\right\}$$

Die Lösung zu **8y'''-3y''=0** lautet

$$y=f(x)=e^{\frac{3\cdot x}{8}}\cdot C_3+x\cdot C_1+C_2$$

Wichtig!

Die "dSolve"-Funktion kann Differenzialgleichungen bis dritter Ordnung lösen, weshalb maximal Ableitungssymbole dritter Ordnung (y''') verwendet werden können. Bei Ausführung einer "dSolve"-Berechnung mit Ableitungssymbolen höherer als dritter Ordnung erhält man die Fehlermeldung "Ungültige Syntax".

z.B. dSolve(y''''=0,x,y) ist nicht zulässig.

Ausweg: Ordnung der Dgl. herabsetzen, sofern möglich: y'''=0 ergibt y'''=C1

Einen Integrationsschritt per Hand ausführen:

dSolve(y'''=C1,x,y)

$$\left\{y=\frac{C1\cdot x^3}{6}+x^2\cdot \mathrm{const}(3)+x\cdot \mathrm{const}(2)+\mathrm{const}(1)\right\}$$

dSolve(y'''=C_1,x,y)

$$\{y=x^2\cdot const(1)+x\cdot const(2)+const(3)\}$$

dSolve(y'''=C_3,x,y)

$$\left\{y=\frac{C_3\cdot x^3}{6}+x^2\cdot const(3)+x\cdot const(2)+const(1)\right\}$$

Hinweis: C_1(=0) sowie C_0 und C_2 sind Systemvariablen und dürfen hier nicht verwendet werden.

Alternativ: Substitution: z(x)=y'(x) ergibt die Ersatz-Dgl.

dSolve(z'''=0,x,z)|z=y'

$$\{y'=x^2\cdot const(1)+x\cdot const(2)+const(3)\}$$

dSolve($y'=x^2\cdot C1+x\cdot C2+C3$,x,y)

$$\left\{y=\frac{C1\cdot x^3}{3}+\frac{C2\cdot x^2}{2}+C3\cdot x+const(1)\right\}$$

dSolve($y'=x^2\cdot const(3)+x\cdot const(2)+const(1)$,x,y)

$$\left\{y=\frac{x^3\cdot const(3)}{3}+\frac{x^2\cdot const(2)}{2}+x\cdot const(1)+const(1)\right\}$$

fehlerhaftes Ergebnis, da statt const(4) die Systemkonstante const(1) erneut auftritt**!**

Bem.: die alternative Notation der Ableitung ist hier nicht zugelassen:

dSolve$\left(\frac{d}{dx}(y)=0,x,y\right)$ ergibt "falscher Argumenttyp"

dSolve(diff(y,x)=0,x,y) ergibt "falscher Argumenttyp"

2.2 einfache Dgln. mit Zusatzbedingungen:

==

[3] S.96: **eine Anfangsbedingung** y(2)=5

dSolve(y'=xe^{x},x,y,x=2,y=5)

$$\{y=x\cdot e^{x}-e^{x}-e^{2}+5\}$$

[3] S.97: **zwei Anfangsbedingungen** y(2)=8 und y'(2)=0
(im Punkt P(2|8) soll die Tangente waagerecht verlaufen)
dSolve(y''=-2.3x+4,x,y,x=2,y=8,x=2,y'=0)

$$\left\{y=\frac{-23\cdot x^{3}}{60}+2\cdot x^{2}-\frac{17\cdot x}{5}+\frac{148}{15}\right\}$$

mit **drei Anfangsbedingungen:**
AWP(Anfangswertproblem)

dSolve(y'''-3y''+3y'-y=e^{-x}cos(2x),x,y,x=0,y=0,x=0,▸

$$\left\{y=\frac{x\cdot e^{x}}{32}-\frac{e^{x}}{32}+\frac{\cos(2\cdot x)\cdot e^{-x}}{32}+\frac{\sin(2\cdot x)\cdot e^{-x}}{32}\right\}$$

[3] S.114: mit **zwei Randbedingungen:**
RWP(Randwertproblem)

dSolve(y''-22y'+170y=0,x,y,x=0,y=2π,x=$\frac{3\pi}{28}$,y=0)

$$\{y=2\cdot \cos(7\cdot x)\cdot \pi\cdot e^{11\cdot x}+2\cdot \sin(7\cdot x)\cdot \pi\cdot e^{11\cdot x}\}$$

simplify(ans)

$$\{y=2\cdot(\cos(7\cdot x)+\sin(7\cdot x))\cdot \pi\cdot e^{11\cdot x}\}$$

Ein **ARWP**(Anfangs-Randwert-Problem):
[3] S.117 mit Zusatzbedingungen:
dSolve(y'''+10y''-23y'-132y=0,x,y,x=0,y=e,x=0,y'=e,▸

$$\left\{y=\frac{8\cdot e^{4\cdot x+12}}{128\cdot e^{15}-135\cdot e^{8}+847}-\frac{108\cdot e^{4\cdot x+9}}{128\cdot e^{15}-135\cdot e^{8}+847}+\frac{\quad}{128}\right.▸$$

2.3 Einige Beispiele nichtlin. Dgln.
====================================

[1] S.317 Aufg.01f

dSolve(f'=f^2,x,f)

$$\left\{f=\frac{-1}{x-\mathrm{const}(1)}\right\}$$

[1] S.317 Wachstumsprozeß, d.h. f'>0:

dSolve(f'=k×f×(S-f),x,f)

$$\left\{\frac{(|f|)^{\frac{1}{S}}}{(|S-f|)^{\frac{1}{S}}}=e^{k\cdot x}\cdot\mathrm{const}(1)\right\}$$

Trotz f'>0 können die Vorzeichen der Faktoren auf der rechten Seite der Dgl. noch variieren. Es entstehen Beträge für f und S-f.

ans^S

$$\left\{\left(\frac{(|f|)^{\frac{1}{S}}}{(|S-f|)^{\frac{1}{S}}}\right)^{S}=\left(e^{k\cdot x}\cdot\mathrm{const}(1)\right)^{S}\right\}$$

simplify(ans)

$$\left\{\left|\frac{f}{S-f}\right|=e^{S\cdot k\cdot x}\cdot(\mathrm{const}(1))^{S}\right\}$$

simplify(ans)|f>0

$$\left\{f\cdot\left|\frac{1}{S-f}\right|=e^{S\cdot k\cdot x}\cdot(\mathrm{const}(1))^{S}\right\}$$

simplify(ans)|S>f

$$\left\{f\cdot\left|\frac{1}{S-f}\right|=e^{S\cdot k\cdot x}\cdot(\mathrm{const}(1))^{S}\right\}$$

Die Betragsauflösung |S-f| gelingt nicht, obwohl

S>f die Ungleichung S−f>0 bedeutet.

$\text{solve}(f\cdot \frac{1}{S-f}=e^{S\cdot k\cdot x}\cdot C1,f)$

$$\left\{f=\frac{C1\cdot S\cdot e^{S\cdot k\cdot x}}{C1\cdot e^{S\cdot k\cdot x}+1}\right\}$$

Kürzen von $e^{S\cdot k\cdot x}$ ergibt: $f(x)=\frac{C1\cdot S}{C1+1\cdot e^{-S\cdot k\cdot x}}$

Erweitern mit (S−c) ergibt:

$$f(x)=\frac{(S-c)\cdot C1\cdot S}{(S-c)\cdot C1+(S-c)\cdot e^{-S\cdot k\cdot x}}$$

Mit der Subst. $C1=\frac{c}{S-c}$ folgt:

$$f(x)=\frac{c\cdot S}{c+(S-c)\cdot e^{-S\cdot k\cdot x}}$$

Damit kann die Lösung der Dgl. in unterschiedlicher Form dargestellt werden!

2.4 kompliziertere Testbeispiele:

================================

$\text{dSolve}(y\cdot y''+(y')^2=1,x,y)$ ⇒ Ergebnis

$$\left\{\sqrt{y^2-e^{2\cdot \text{const}(1)}}=-x+\text{const}(2),\sqrt{y^2-e^{2\cdot \text{const}(1)}}=\blacktriangleright\right.$$

Ergebnis lautet:

$\sqrt{y^2-e^{2\cdot \text{const}(1)}}=-x+\text{const}(2)$ oder

$\sqrt{y^2-e^{2\cdot \text{const}(1)}}=x+\text{const}(2)$ oder

$\sqrt{y^2+e^{2\cdot \text{const}(1)}}=-x+\text{const}(2)$ oder

$\sqrt{y^2+e^{2\cdot \text{const}(1)}}=x+\text{const}(2)$.

Zusammenfassend mit $C_3=\mp e^{2\cdot C_1}$

$\sqrt{y^2+C_3}=\pm x+C_2$ oder $\sqrt{y^2-C_3}=\pm x+C_2$

Hieraus folgt mit $C_4=\pm C_3$ und $C_5=\pm C_2$
$y^2=C_4+(x+C_5)^2$

z.B. mit der Anfangsbedingung y(0)=1 erhält man
dann: $C_4=1-C_5^2$

Lösung des AWP $y\cdot y''+(y')^2=1,\ y(0)=1>0,$
$y=y(x)=+\sqrt{1-C_5^2+(x+C_5)^2}=+\sqrt{1+2xC_5+x^2}$,
==
d.h.
die neg. Wurzel entfällt wegen der
Anfangsbedingung.

ein andererς Beispiel, das mit dSolve nicht
lösbar ist:
dSolve($(y'')^2=4x(y'-1)$,x,y,x=0,y=0,x=0,y'=2)
$$\left\{y''=-2\cdot\sqrt{y'-1},y''=2\cdot\sqrt{y'-1}\right\}$$
Vereinfachung der Aufgabe mit y'(x)=z(x)
(Substitution, Erniedrigung der Ordnung)
dSolve($(z')^2=4x(z-1)$,x,z,x=0,z=2)
$$\left\{z=x^2-2\cdot x+2,z=x^2+2\cdot x+2\right\}$$
dSolve($y'=x^2-2\cdot x+2$,x,y,x=0,y=0)
$$\left\{y=\frac{x^3}{3}-x^2+2\cdot x\right\}$$

dSolve(y'=x^2+2·x+2,x,y,x=0,y=0)

$$\left\{y=\frac{x^3}{3}+x^2+2\cdot x\right\}$$

Ergebnis für das AWP: $y=y(x)=\frac{x^3}{3}\pm x^2+2\cdot x$

==

Schließlich betrachten wir

dSolve(x×y'=sin(y),x,y)

$\left\{y=-2\cdot \tan^{-1}\left(|x|\cdot e^{const(1)}\right)+2\cdot\pi\cdot constn(1), y=2\cdot\tan^{-1}(\blacktriangleright\right.$

Mit **constn(1)** bzw. **constn(2)** wird eine ganzzahlige Systemvariable bezeichnet, die hier die Periodizität für sin(y) beschreibt.
Da die arctan-Funktion eine ungerade Funktion ist, kann das Vorzeichen nach der Betragsauflösung von |x| herausgezogen werden:

Lösung:

$y=y(x)=\pm 2\cdot\arctan(x\cdot C)+2\cdot\pi\cdot m$, $C\in\mathbf{R}$, $m\in\mathbf{Z}$

3. Dgl.-Systeme

=================

dSolve({y'=z+3y,z'=2z+2y},x,{y,z})

$\left\{y=e^{4\cdot x}\cdot const(2)+e^{x}\cdot const(1), z=e^{4\cdot x}\cdot const(2)-2\cdot\blacktriangleright\right.$

Lösung:

$y=y(x)=C1\cdot e^{x}+C2\cdot e^{4x}$, $z=z(x)=-2\cdot C1\cdot e^{x}+C2\cdot e^{4x}$

dSolve({y'=z+3y,z'=2z+2y},x,{y,z},x=0,y=1,x=0,z=-▸

$$\left\{y=\frac{e^{4\cdot x}}{3}+\frac{2\cdot e^{x}}{3},z=\frac{e^{4\cdot x}}{3}-\frac{4\cdot e^{x}}{3}\right\}$$

dSolve kann das Dgl.-System lösen und berücksichtigt auch die AB.

$$\left.\begin{cases} y=C1\cdot e^{x}+C2\cdot e^{4x}|x=0 \text{ and } y=1 \\ z=-2\cdot C1\cdot e^{x}+C2\cdot e^{4x}|x=0 \text{ and } z=-1 \end{cases}\right|_{C1,C2}$$

$$\left\{C1=\frac{2}{3},C2=\frac{1}{3}\right\}$$

dSolve({y'+5y-2z=e^{x},z'-y+6z=e^{2x}},x,{y,z})

$$\left\{y=\frac{e^{2\cdot x}}{27}+\frac{7\cdot e^{x}}{40}+e^{-4\cdot x}\cdot \text{const}(2)+e^{-7\cdot x}\cdot \text{const}(1),z=\right. ▸$$

Lösung:

$$y=\frac{e^{2\cdot x}}{27}+\frac{7\cdot e^{x}}{40}+e^{-4\cdot x}\cdot C2+e^{-7\cdot x}\cdot C1$$

$$z=\frac{7\cdot e^{2\cdot x}}{54}+\frac{e^{x}}{40}+\frac{e^{-4\cdot x}\cdot C2}{2}-e^{-7\cdot x}\cdot C1$$

dSolve({y'+5y-2z=e^{x},z'-y+6z=e^{2x}},x,{y,z},x=0,y=0▸

$$\left\{y=\frac{e^{2\cdot x}}{27}+\frac{7\cdot e^{x}}{40}-\frac{11\cdot e^{-4\cdot x}}{45}+\frac{7\cdot e^{-7\cdot x}}{216},z=\frac{7\cdot e^{2\cdot x}}{54}+\frac{e^{x}}{40}\right. ▸$$

Hinweis:

Die Zusatzbedingungen müssen hier Anfangsbedingungen für y und z sein.
Randbedingungen oder Zusatzbedingungen für die die Ableitungen werden nicht berücksichtigt.

4. Nutzung der Laplacetransformation für lineare Dgln. mit konstanten Koeffizienten

=======================================

[2] S.183 bzw. [3] S.93:

dSolve(8y'''-3y''=0,x,y)

$$\left\{y=e^{\frac{3\cdot x}{8}}\cdot const(1)+x\cdot const(3)+const(2)\right\}$$

laplace(8y'''-3y''=0,x,y,s)

$$-8\cdot\left(s^2\cdot y(0)+s\cdot y'(0)+y''(0)-Lp\cdot s^3\right)+3\cdot\left(s\cdot y(0)+y'(0)-L\right.$$

ans|y(0)=a and y'(0)=b and y''(0)=c

$$8\cdot\left(Lp\cdot s^3-a\cdot s^2-b\cdot s-c\right)-3\cdot\left(Lp\cdot s^2-a\cdot s-b\right)=0$$

Die Anfangswerte wurden mit a,b,c vorgegeben.
Lp=Lp(s) bezeichnet standardmässig die L-Transformierte von y(x)

solve(ans,Lp)

$$\left\{Lp=\frac{8\cdot a\cdot s^2-3\cdot a\cdot s+8\cdot b\cdot s-3\cdot b+8\cdot c}{s^2\cdot(8\cdot s-3)}\right\}$$

$$y=invLaplace\left(\frac{8\cdot a\cdot s^2-3\cdot a\cdot s+8\cdot b\cdot s-3\cdot b+8\cdot c}{s^2\cdot(8\cdot s-3)},s,x\right)$$

$$y=\frac{64\cdot c\cdot e^{\frac{3\cdot x}{8}}}{9}+b\cdot x-\frac{8\cdot c\cdot x}{3}+a-\frac{64\cdot c}{9}$$

Somit $y=y(x)=C1\cdot e^{\frac{3\cdot x}{8}}+C2\cdot x+C3$ mit $C1=\frac{64\cdot c}{9}$,

$C2=b-\frac{8\cdot c}{3}$, $C3=a-\frac{64\cdot c}{9}$.

Werden die Anfangswerte mit konkreten Zahlen vorgegeben, erhält man mit der L-Transformation sofort die Lösung des AWP wie folgt:

$$\text{dSolve}(y'''-3y''+3y'-y=e^{-x}\cos(2x),x,y,x=0,y=0,x=0,\blacktriangleright$$

$$\left\{y=\frac{x\cdot e^{x}}{32}-\frac{e^{x}}{32}+\frac{\cos(2\cdot x)\cdot e^{-x}}{32}+\frac{\sin(2\cdot x)\cdot e^{-x}}{32}\right\}$$

$$\text{laplace}(y'''-3y''+3y'-y=e^{-x}\cos(2x),x,y,s)$$

$$-s^2\cdot y(0)-s\cdot y'(0)-y''(0)+Lp\cdot s^3+3\cdot\left(s\cdot y(0)+y'(0)-Lp\cdot s\blacktriangleright\right.$$

$$\text{ans}|\{y(0)=0,y'(0)=\frac{1}{32},y''(0)=\frac{-3}{16}\}$$

$$Lp\cdot s^3-3\cdot\left(Lp\cdot s^2-\frac{1}{32}\right)+3\cdot Lp\cdot s-Lp-\frac{s}{32}+\frac{3}{16}=\frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$

$$\text{solve}(\text{ans},Lp)$$

$$\left\{Lp=\frac{s^2-6\cdot s+13}{32\cdot\left(s^2+2\cdot s+5\right)\cdot(s-1)^2}\right\}$$

$$y=\text{invLaplace}\left(\frac{s^2-6\cdot s+13}{32\cdot\left(s^2+2\cdot s+5\right)\cdot(s-1)^2},s,x\right)$$

$$y=\frac{x\cdot e^{x}}{32}-\frac{e^{x}}{32}+\frac{\cos(2\cdot x)\cdot e^{-x}}{32}+\frac{\sin(2\cdot x)\cdot e^{-x}}{32}$$

Verwendung des L-Operators:

$$\mathcal{L}_x\left(e^{-x}\cos(2x)\right)[s]$$

$$\frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$

$$\mathcal{L}_x\left(\frac{d^3}{dx^3}(y(x))-3\frac{d^2}{dx^2}(y(x))\,3\frac{d}{dx}(y(x))-y(x)\right)[s]$$

$$\int_0^\infty \frac{d^3}{dx^3}(y(x))\cdot e^{-s\cdot x}dx-9\cdot\int_0^\infty \frac{d^2}{dx^2}(y(x))\cdot\frac{d}{dx}(y(x))\cdot e^{-s\cdot}\blacktriangleright$$

Der **L-Operator** kann nur konkrete Funktionsterme transformieren. Zur Transformation einer Dgl. muss der **laplace-Befehl** genutzt werden.

laplace(y'''-3y''+3y'-y,x,y,s)

$-s^2\cdot y(0)-s\cdot y'(0)-y''(0)+Lp\cdot s^3+3\cdot\left(s\cdot y(0)+y'(0)-Lp\cdot s\right.$ ▸

getLeft(ans)=$\mathcal{L}_x\left(e^{-x}\cos(2x)\right)[s]$

$3\cdot\left(s\cdot y(0)+y'(0)-Lp\cdot s^2\right)-s^2\cdot y(0)-s\cdot y'(0)-3\cdot(y(0)-Lp\cdot$ ▸

solve(ans,Lp)|$\{y(0)=0,y'(0)=\frac{1}{32},y''(0)=\frac{-3}{16}\}$

$$\left\{Lp=\frac{\frac{s^3}{32}-\frac{7\cdot s^2}{32}+\frac{19\cdot s}{32}-\frac{13}{32}}{\left(s^2+2\cdot s+5\right)\cdot(s-1)^3}\right\}$$

$$y=\mathcal{L}^{-1}_s\left(\frac{\frac{s^3}{32}-\frac{7\cdot s^2}{32}+\frac{19\cdot s}{32}-\frac{13}{32}}{\left(s^2+2\cdot s+5\right)\cdot(s-1)^3}\right)[x]$$

$$y=\frac{x\cdot e^x}{32}-\frac{e^x}{32}+\frac{\cos(2\cdot x)\cdot e^{-x}}{32}+\frac{\sin(2\cdot x)\cdot e^{-x}}{32}$$

Die Nutzung des **inversen L-Operators** und der **invLaplace-Befehl** sind im Gebrauch identisch.

5. Differenzialgleichungsgrafik

============================

Für Dgln. des Typs y'=F(x,y) mit Anfangsbedingungen der Art y(xo)=yo können Richtungsfelder mit speziellen Integralkurven dargestellt werden. Zusätzlich können weitere Funktionen der Art y=f(x) in die Grafik übernommen werden.

[3] S.94 oder [2] S.184
$y'(x)=2x$, d.h. $F(x,y)=2x$
Isoklinenschar y'=const. ergibt x=const.=c.

Grafik	y':…

Die senkrechten Geraden wurden als $y=1000\times(x-c)$ eingegeben.

Beispiel: $x\times y'-y=x^2$ ergibt $y'=\frac{x^2+y}{x}=F(x,y)$

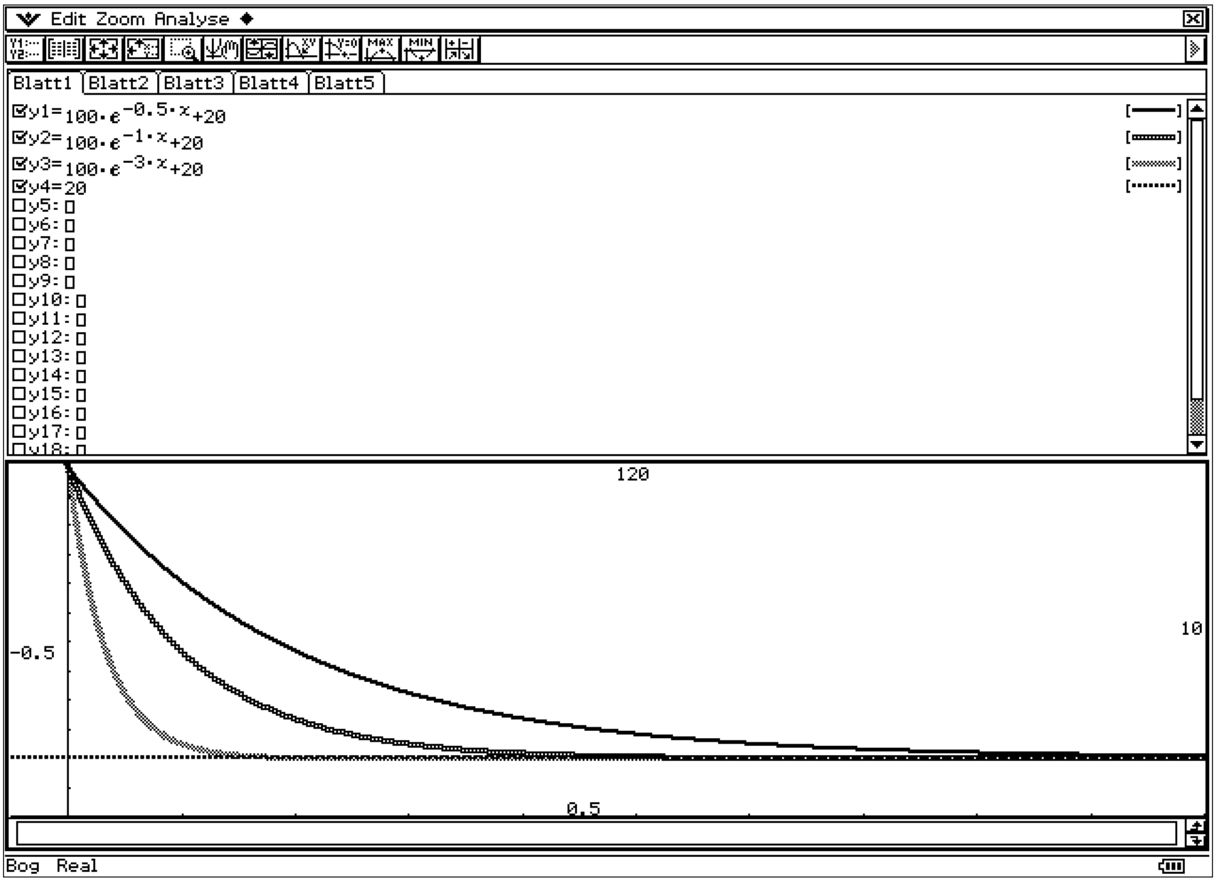
Isoklinenschar: $\frac{x^2+y}{x}=c$ bzw. $y=-x^2+x\times c=x\times(c-x)$
(nach unten geöffnete Parabeln mit den Nullstellen $x=0$ und $x=c$)

Grafik	y':…

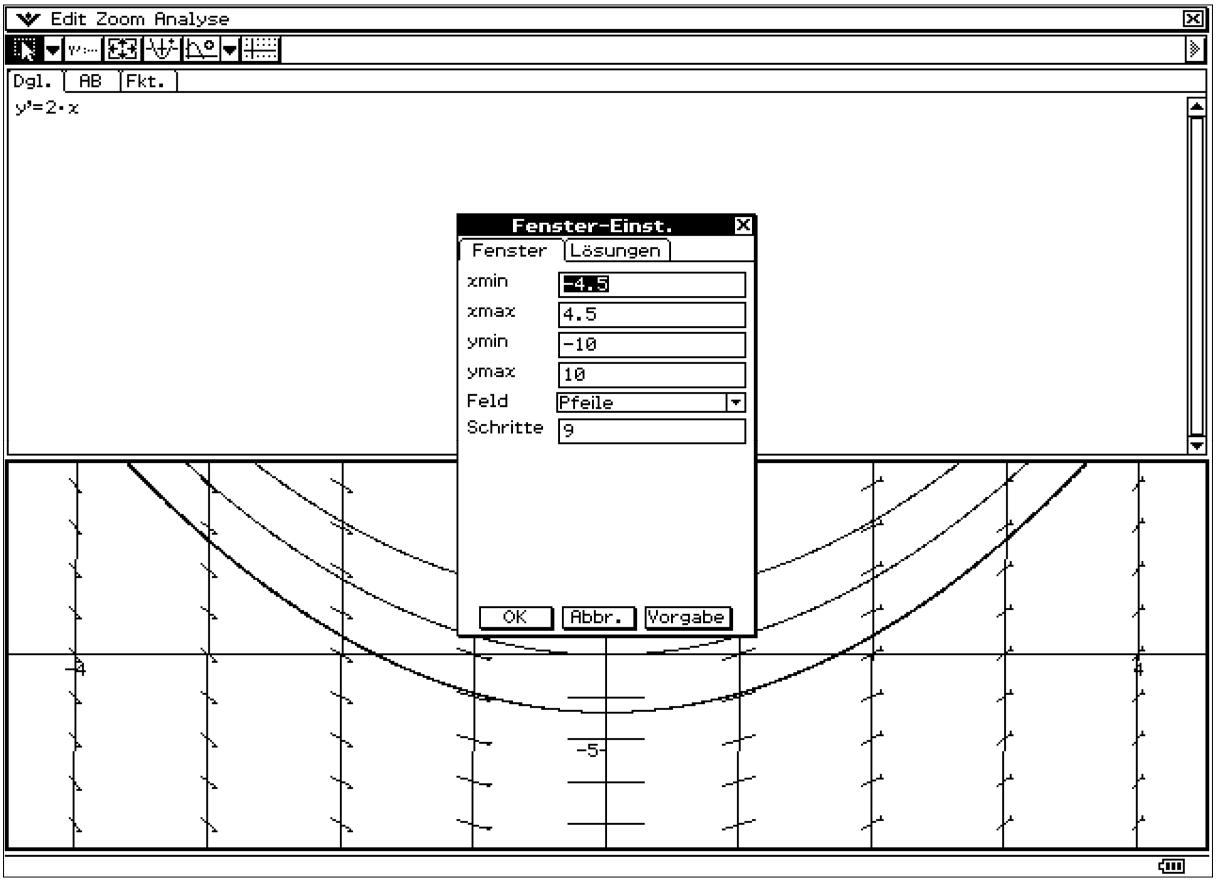
Die Integralkurven sind offenbar nach oben geöffnete Parabeln.

Download:
=========
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/TeachTalk2010-Paditz.vcp

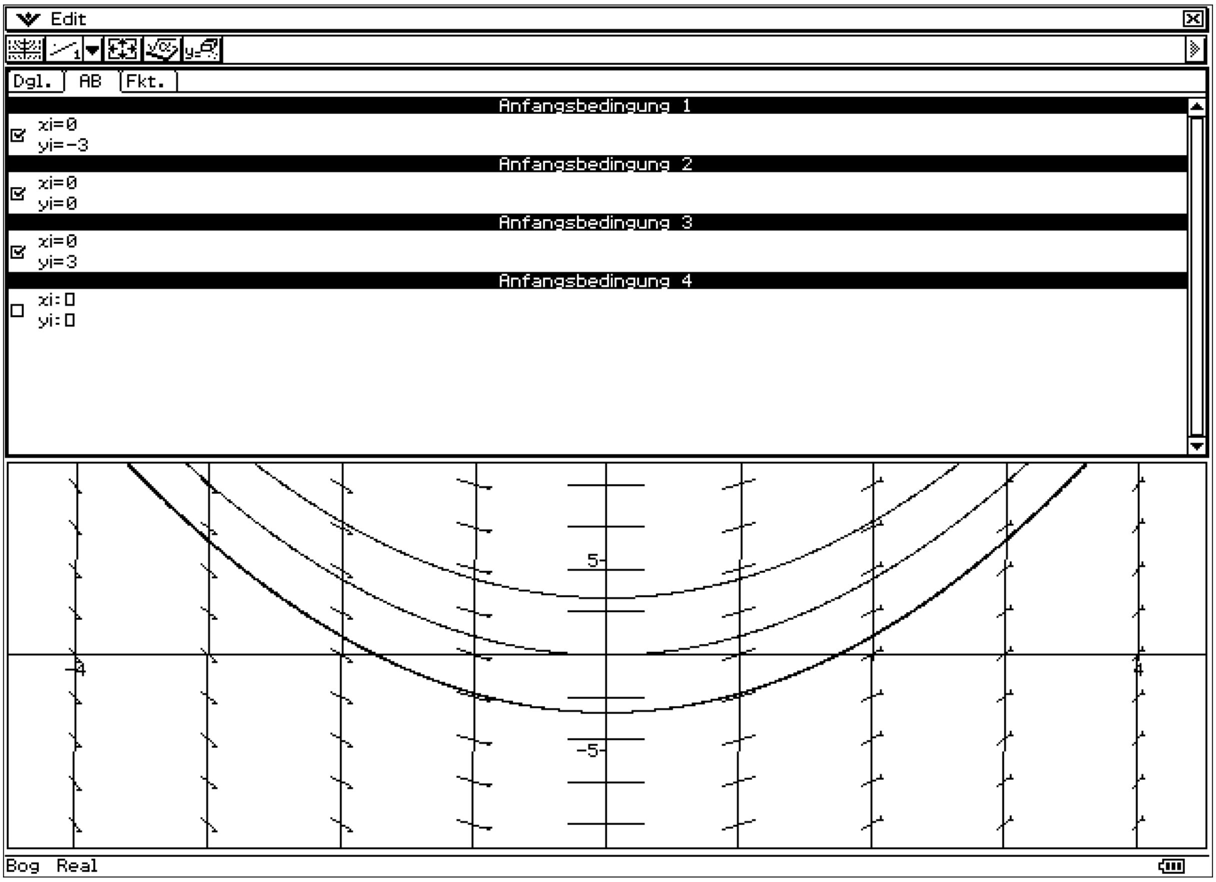
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/TeachTalk2010-Paditz.pdf



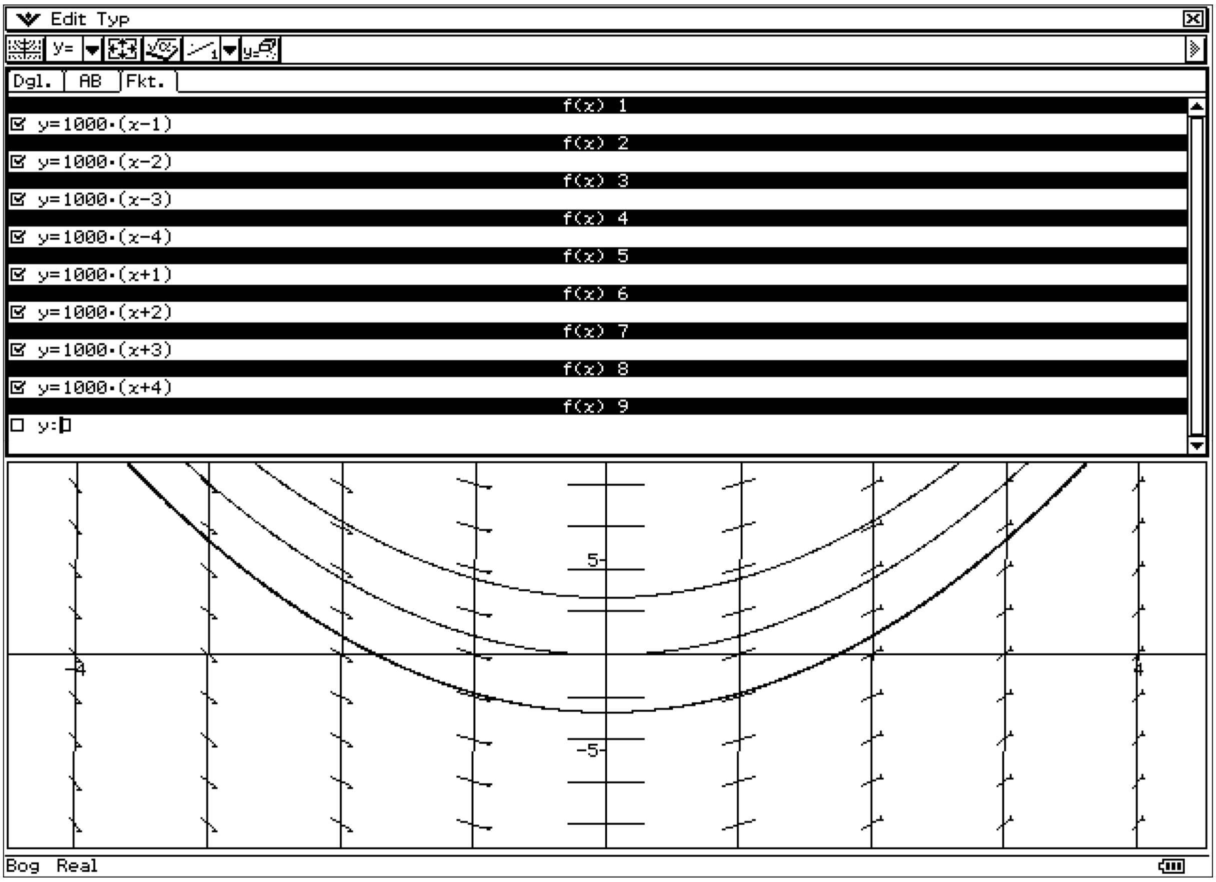
Prinzipskizze zur Abkühlung



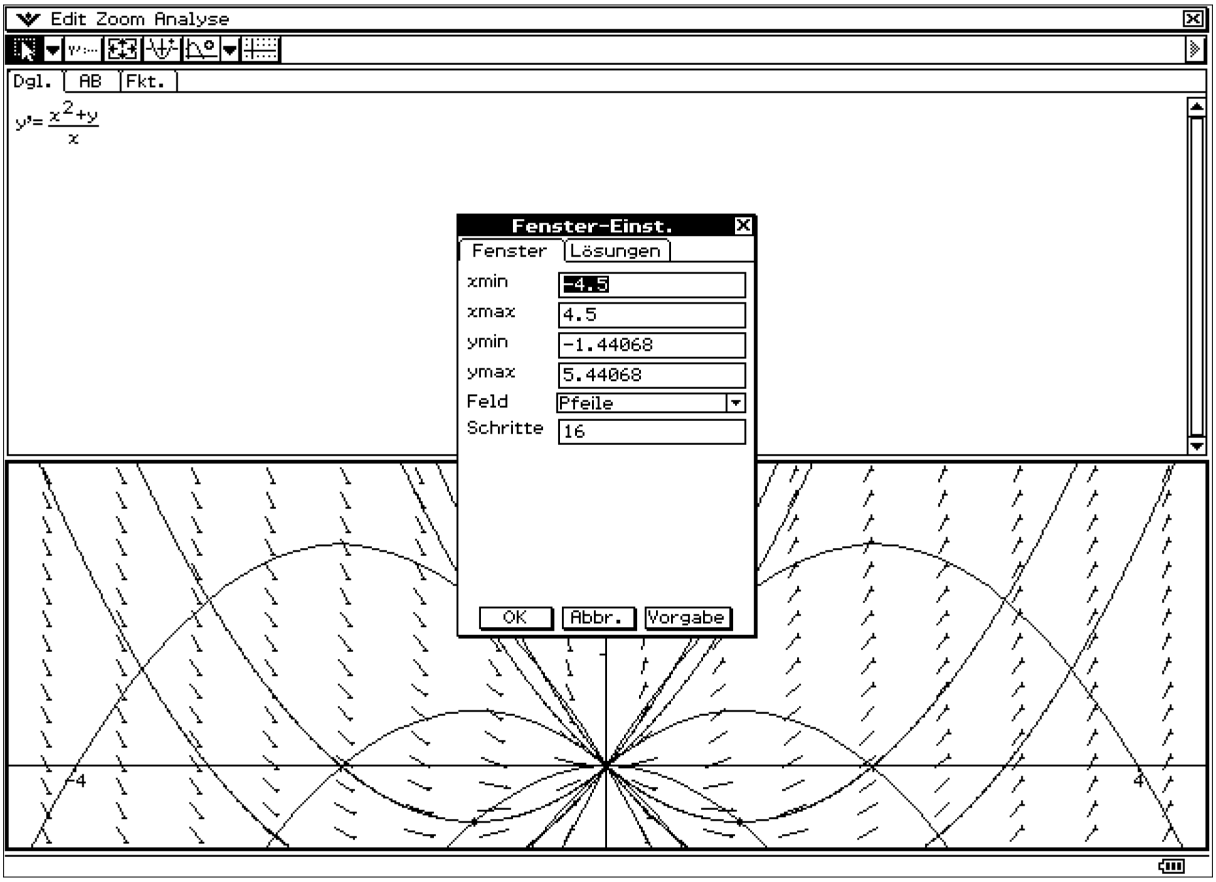
Differenzialgleichungsgrafik mit Isoklinen und Integralkurven



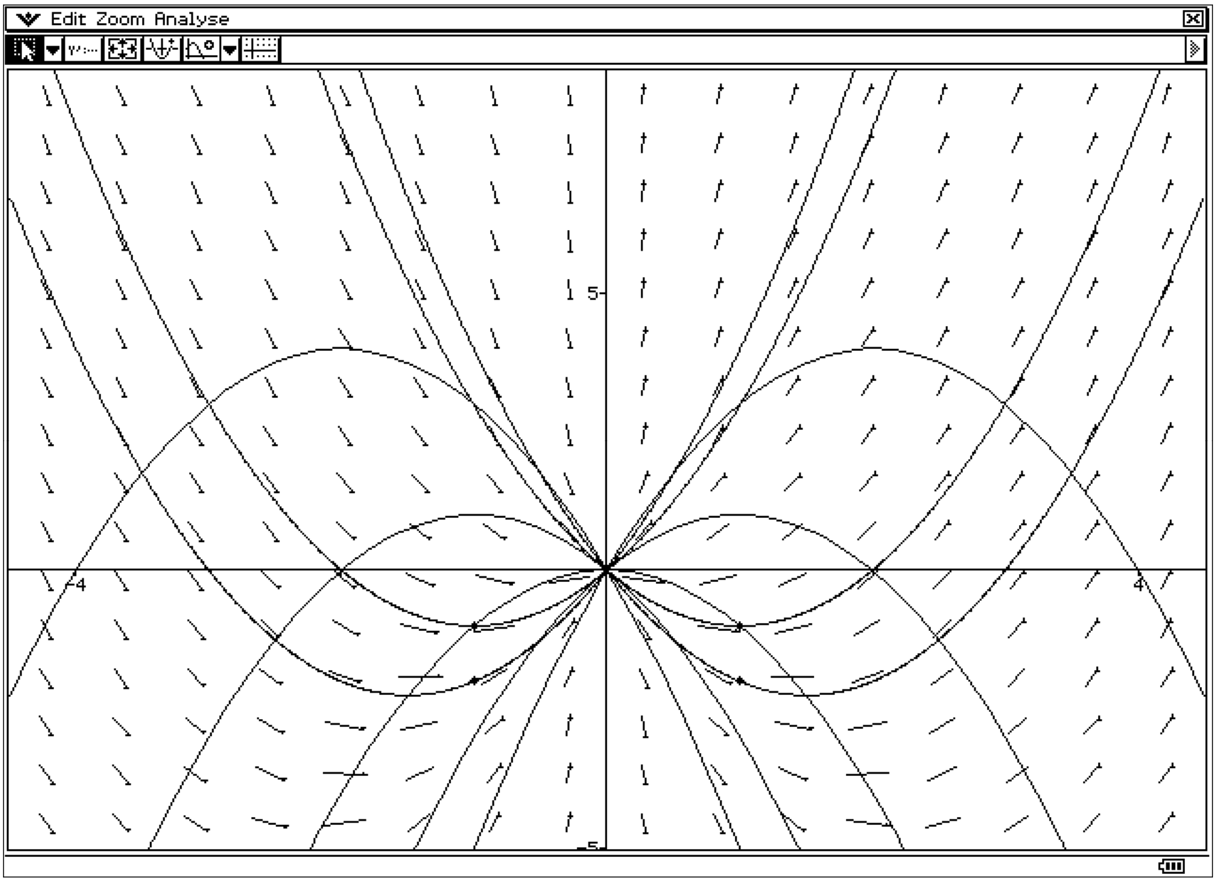
Anfangsbedingungen für die Integralkurven



Eingabe der Isoklinen(senkrechte Geraden, sehr steiler Ansieg)



Differenzialgleichungsgrafik mit Isoklinen und Integralkurven



Isoklinen (Parabeln, nach unten geöffnet),
Integralkurven (Parabeln, nach oben geöffnet)