Teach&Talk Köln 2013 Prof. Dr. L. Paditz

Erste Erfahrungen mit dem CP-Manager II

Termumformungen mit Potenzen
================================

(Potenzen, Wurzeln, Logarithmen)

a) Termvereinfachung für $\sqrt[3]{a^5 \cdot b} \cdot \sqrt{a^3 \cdot b^4} \cdot \sqrt[6]{a^5 \cdot b^4}$

Voraussetzung a, b≥0

Eingabe des zu vereinfachenden Terms:

$\sqrt[3]{a^5 b}\sqrt{a^3 b^4}\sqrt[6]{a^5 b^4} \Rightarrow \mathrm{Term1}$

$$\sqrt{a^3} \cdot b^2 \cdot (a^5 \cdot b^4)^{\frac{1}{6}} \cdot (a^5 \cdot b)^{\frac{1}{3}}$$

simplify(Term1)⇒Term2

$$a^{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt{a^3} \cdot (a^5)^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{7}{3}} \cdot (|b|)^{\frac{2}{3}}$$

simplify(Term2|a≥0 and b≥0)

$$a^{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt{a^3} \cdot (a^5)^{\frac{1}{6}} \cdot b^3$$

Die gewünschte Vereinfachung wird nicht erreicht.

Mit detaillierteren Fallunterscheidungen erhält man die gewünschte Vereinfachung:

schrittweise:

simplify(Term1|a>0)

$$a^4 \cdot b^{\frac{7}{3}} \cdot (|b|)^{\frac{2}{3}}$$

simplify(ans|b>0)

$$a^4 \cdot b^3$$

in einem Schritt:

simplify(Term1|a>0 and b>0)

$$a^4 \cdot b^3$$

Betrachtung des Falles a=0 oder b=0:

simplify(Term1|a=0 or b=0)

$$a^{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt{a^3} \cdot (a^5)^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{7}{3}} \cdot (|b|)^{\frac{2}{3}}$$

Ein nicht erwartetes Ergebnis (Fehler im Betriebssystem)!
Die gewünschte Vereinfachung wird NICHT realisiert, obwohl einer der Faktoren Null ist!

schrittweise:

simplify(Term1|a=0 and b=0)

$$0$$

simplify(Term1|a=0)

$$0$$

simplify(Term1|b=0)

$$0$$

Offenbar ist die oder-Verknüpfung im Bedingungsoperator nicht vollständig implementiert.

Teach&Talk Köln 2013 Prof. Dr. L. Paditz

Erste Erfahrungen mit dem CP-Manager II

Termumformungen mit Potenzen

================================

(Potenzen, Wurzeln, Logarithmen)

b) Termvereinfachung für $\sqrt[3]{\left(\frac{3a\cdot b^2}{c}\right)^n}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{9a^2\cdot b}{c^2}\right)^n}$

Voraussetzung $a,b\geq 0$ und $c>0$ und $n\in\mathbf{N}$

Eingabe des zu vereinfachenden Terms:

$\sqrt[3]{\left(\frac{3a\cdot b^2}{c}\right)^n}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{9a^2\cdot b}{c^2}\right)^n}\Rightarrow$Term1

$$\left(\left(\frac{9\cdot a^2\cdot b}{c^2}\right)^n\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\left(\frac{3\cdot a\cdot b^2}{c}\right)^n\right)^{\frac{1}{3}}$$

Die Wurzel wird als Potenz interpretiert.

simplify(Term1)⇒Term2

$$\left(b^n\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\left(\frac{a}{c}\right)^n\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{27\cdot a^2\cdot b^2}{c^2}\right)^{\frac{n}{3}}$$

Die quadratischen Größen a^2, b^2 und c^2 werden zusammengefaßt, ebenso die Zahlen 3 und 9, **die linearen Größen a, b und c erscheinen extra** (wegen fehlender Vorzeichenbedingung).

simplify(Term2|a≥0 and b≥0 and c>0)⇒Term3

$$\frac{(a^n)^{\frac{1}{3}}\cdot(b^n)^{\frac{1}{3}}\cdot(27\cdot a^2\cdot b^2)^{\frac{n}{3}}}{c^n}$$

Die Vorzeichenbedingung c>0 wird berücksichtigt, a≥0 und b≥0 jedoch nicht!

simplify(Term3|a>0 and b>0 and c>0)⇒Term4

$$\frac{(27\cdot a^3\cdot b^3)^{\frac{n}{3}}}{c^n}$$

judge(Term4= $\left(\frac{3a\cdot b}{c}\right)^n$ |a>0 and b>0 and c>0 and n>0)

Undefined

unerwartetes Ergebnis – die Gleichheit wird nicht erkannt!

Die letzte Vereinfachung zu $\left(\frac{3a\cdot b}{c}\right)^n$ gelingt im CAS nicht!

===

stop

Überlegung:

==========

Die Auswertung von Potenzen (und Wurzeln) sollte mit dem Übergang zur ***e***–Funktion (und Logarithmen) kompatibel sein.

(z.B. **DERIVE** arbeitet auf dieser Grundlage)

z.B. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

judge($a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ | a>0 and b>0)

TRUE

entspricht auf dieser Grundlage $a^n \cdot b^n = \left(e^{\ln(a)}\right)^n \cdot \left(e^{\ln(b)}\right)^n$

judge($a^n \cdot b^n = \left(e^{\ln(a)}\right)^n \cdot \left(e^{\ln(b)}\right)^n$ | a>0 and b>0)

TRUE

Weiter: $a^n \cdot b^n = e^{n \cdot \ln(a)} \cdot e^{n \cdot \ln(b)}$

judge($a^n \cdot b^n = e^{n \cdot \ln(a)} \cdot e^{n \cdot \ln(b)}$ | a>0 and b>0)

TRUE

Weiter: $a^n \cdot b^n = e^{n \cdot \ln(a) + n \cdot \ln(b)}$

judge($a^n \cdot b^n = e^{n \cdot \ln(a) + n \cdot \ln(b)}$ | a>0 and b>0)

TRUE

Nun: $a^n \cdot b^n = e^{n \cdot (\ln(a) + \ln(b))}$

judge($a^n \cdot b^n = e^{n \cdot (\ln(a) + \ln(b))}$ | a>0 and b>0)

TRUE

Weiterer elementare Schritte:

judge($a^n \cdot b^n = e^{n \cdot \ln(a \cdot b)}$ | a>0 and b>0)

TRUE

judge($a^n \cdot b^n = \left(e^{\ln(a \cdot b)}\right)^n$ | a>0 and b>0)

TRUE

judge($a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ | a>0 and b>0)

TRUE

Nun wird die Eingangs erreichte Umformung genauer untersucht, die das CAS nicht erkennt:

$$\frac{(27\cdot a^3\cdot b^3)^{\frac{n}{3}}}{c^n}=\left(\frac{3a\cdot b}{c}\right)^n \mid a>0 \text{ and } b>0 \text{ and } c>0, \text{ d.h.}$$

a, b, c$\in\mathbf{R}^+$

$$\text{judge}\left(\frac{(27\cdot a^3\cdot b^3)^{\frac{n}{3}}}{c^n}=\frac{\left(e^{\ln(27)}\cdot(e^{\ln(a)})^3\cdot(e^{\ln(b)})^3\right)^{\frac{n}{3}}}{(e^{\ln(c)})^n}\right)$$

TRUE

Die Gleichheit wird erkannt auch ohne die Vorgabe a, b, c>0.

rechte Seite:

$$\frac{\left(e^{\ln(27)}\cdot(e^{\ln(a)})^3\cdot(e^{\ln(b)})^3\right)^{\frac{n}{3}}}{(e^{\ln(c)})^n}\Rightarrow \text{ePotenz1}$$

$$\frac{(27\cdot a^3\cdot b^3)^{\frac{n}{3}}}{c^n}$$

$$\text{judge}\left(\text{ePotenz1}=\frac{\left(e^{3\ln(3)}\cdot e^{3\ln(a)}\cdot e^{3\ln(b)}\right)^{\frac{n}{3}}}{e^{n\cdot\ln(c)}}\right)$$

TRUE

rechte Seite:

$$\frac{\left(e^{3\ln(3)}\cdot e^{3\ln(a)}\cdot e^{3\ln(b)}\right)^{\frac{n}{3}}}{e^{n\cdot\ln(c)}}\Rightarrow \text{ePotenz2}$$

$$\frac{(27\cdot a^3\cdot b^3)^{\frac{n}{3}}}{c^n}$$

$$\text{judge}\left(\text{ePotenz2}=\frac{\left(e^{3\ln(3)+3\ln(a)+3\ln(b)}\right)^{\frac{n}{3}}}{e^{n\cdot\ln(c)}}\right)$$

TRUE

rechte Seite:

$$\frac{\left(e^{3\ln(3)+3\ln(a)+3\ln(b)}\right)^{\frac{n}{3}}}{e^{n\cdot\ln(c)}}\Rightarrow\text{ePotenz3}$$

$$\frac{(27\cdot a^3\cdot b^3)^{\frac{n}{3}}}{c^n}$$

$$\text{judge}\left(\text{ePotenz3}=\frac{e^{\frac{n}{3}(3\ln(3)+3\ln(a)+3\ln(b))}}{e^{n\cdot\ln(c)}}\right)$$

Undefined

Ohne Vorzeichenbedingung wird die letzte Umformung nicht mehr verifiziert.

rechte Seite:

$$\frac{e^{\frac{n}{3}(3\ln(3)+3\ln(a)+3\ln(b))}}{e^{n\cdot\ln(c)}}\Rightarrow\text{ePotenz4}$$

$$\frac{e^{\frac{n\cdot(3\cdot\ln(a)+3\cdot\ln(b)+3\cdot\ln(3))}{3}}}{c^n}$$

judge(ePotenz3=ePotenz4|a>0 and b>0)

TRUE

Mit Vorzeichenbedingung wurde auch die letzte Umformung verifiziert.
Weiter: Faktor 3 ausklammern:

$$\text{judge}\left(\text{ePotenz4}=\frac{e^{\frac{n}{3}\cdot(3\cdot(\ln(3)+\ln(a)+\ln(b)))}}{e^{n\cdot\ln(c)}}\,|\,a>0 \text{ and } b>0\right)$$

Undefined

Das Ausklammern der 3 im Exponenten wird nicht mehr verifiziert!

rechte Seite:

$$\frac{e^{\frac{n}{3}\cdot(3\cdot(\ln(3)+\ln(a)+\ln(b)))}}{e^{n\cdot\ln(c)}}\Rightarrow\text{ePotenz5}$$

$$\frac{e^{n\cdot(\ln(a)+\ln(b)+\ln(3))}}{c^n}$$

Der letzte Term wird beim Abspeichern sofort vereinfacht!
Das Problem mit dem Ausklammern der 3 wird nun genauer untersucht.

stop

Umformung in noch kleineren Schritten:
====================================

Ausgangssituation:
judge(ePotenz4=ePotenz5|a>0 and b>0)

Undefined

Betrachtung der Exponenten in ePotenz4 und ePotenz5:

$\frac{n}{3}\cdot(3\cdot(\ln(3)+\ln(a)+\ln(b)))\Rightarrow$Expon5

$$n\cdot(\ln(a)+\ln(b)+\ln(3))$$

judge$\left(\frac{n}{3}(3\ln(3)+3\ln(a)+3\ln(b))=\text{Expon5}\,|\,a>0 \text{ and } b>0\right)$

TRUE

Die Gleichheit der Exponenten wird erkannt, jedoch nicht die Gleichheit der *e*–Potenzen!

Überprüfung mit einer anderen Basis (2 oder π):

$2^{\frac{n}{3}\cdot(3\cdot(\ln(3)+\ln(a)+\ln(b)))}\Rightarrow$Potenz2

$$2^{n\cdot(\ln(a)+\ln(b)+\ln(3))}$$

judge$\left(2^{\frac{n}{3}(3\ln(3)+3\ln(a)+3\ln(b))}=\text{Potenz2}\,|\,a>0 \text{ and } b>0\right)$

TRUE

$\pi^{\frac{n}{3}\cdot(3\cdot(\ln(3)+\ln(a)+\ln(b)))}\Rightarrow$Potenz$\pi$

$$\pi^{n\cdot(\ln(a)+\ln(b)+\ln(3))}$$

approx(ans)

$$3.141592654^{n\cdot(\ln(a)+\ln(b)+1.098612289)}$$

judge$\left(\pi^{\frac{n}{3}(3\ln(3)+3\ln(a)+3\ln(b))}=\text{Potenz}\pi\,|\,a>0 \text{ and } b>0\right)$

TRUE

Mit Basis 2 oder π wird die Gleichheit im CAS erkannt!

$e^{\frac{n}{3}\cdot(3\cdot(\ln(3)+\ln(a)+\ln(b)))}\Rightarrow$Potenze

$$e^{n\cdot(\ln(a)+\ln(b)+\ln(3))}$$

$$\text{judge}\left(e^{\frac{n}{3}(3\ln(3)+3\ln(a)+3\ln(b))}=\text{Potenze}\,|\,a>0 \text{ and } b>0\right)$$

Undefined

Hier liegt offensichtlich ein Programmierfehler im CAS vor.

Bestimmte Basen werden nicht akzeptiert (z.B. e, approx(e), 2.7):

$$\text{approx}(e)^{\frac{n}{3}\cdot(3\cdot(\ln(3)+\ln(a)+\ln(b)))} \Rightarrow \text{aPotenze}$$

$$2.718281828^{n\cdot(\ln(a)+\ln(b)+\ln(3))}$$

$$\text{judge}\left(\text{approx}(e)^{\frac{n}{3}(3\ln(3)+3\ln(a)+3\ln(b))}=\text{aPotenze}\,|\,a>0 \text{ and }\right.$$

Undefined

$$2.7^{\frac{n}{3}\cdot(3\cdot(\ln(3)+\ln(a)+\ln(b)))} \Rightarrow \text{dPotenze}$$

$$\left(\frac{27}{10}\right)^{n\cdot(\ln(a)+\ln(b)+\ln(3))}$$

$$\text{judge}\left(2.7^{\frac{n}{3}(3\ln(3)+3\ln(a)+3\ln(b))}=\text{dPotenze}\,|\,a>0 \text{ and } b>0\right)$$

Undefined

Die gesonderte Umformung der Exponenten wird als richtig verifiziert:

$$\ln\left(\frac{\left(27\cdot a^3\cdot b^3\right)^{\frac{n}{3}}}{c^n}\right) \Rightarrow \text{Expon1}$$

$$\ln\left(\frac{(27\cdot a^3\cdot b^3)^{\frac{n}{3}}}{c^n}\right)$$

simplify(Expon1|a>0 and b>0 and c>0)

$$n\cdot\ln\left(\frac{3\cdot a\cdot b}{c}\right)$$

$\ln\left(\left(\frac{3a\cdot b}{c}\right)^n\right) \Rightarrow$ Expon2

$$\ln\left(\left(\frac{3\cdot a\cdot b}{c}\right)^n\right)$$

simplify(Expon2|a>0 and b>0 and c>0)

$$n\cdot\ln\left(\frac{3\cdot a\cdot b}{c}\right)$$

judge(Expon1=Expon2|a>0 and b>0 and c>0)

TRUE

□

Termumformungen (Gleichungskette) im $\mathbf{R}^+$	f(x)=

Download:

www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/T&T2013-Paditz.pdf

www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/T&T2013-Paditz.vcp

Erste Erfahrungen mit dem CP-Manager II

Termumformungen mit Potenzen

==============================

(Potenzen, Wurzeln, Logarithmen)

c) Betrachtung der Funktion

$$z = f(x,y) = y^x\cdot\ln(y)-\frac{y^{-1+x}}{x} \text{ für } x,y\in\mathbf{R}^+$$

Define $f(x,y)=y^x\cdot\ln(y)-\frac{y^{-1+x}}{x}$

done

Kontrolle der Eingabe:

simplify(f(x,y))

$$y^x\cdot\left(\ln(y)-\frac{1}{x\cdot y}\right)$$

Substitution $y=1+\frac{1}{x}$

$f(x,y)|y=1+\frac{1}{x}\Rightarrow$fTerm1

$$\frac{-\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x-1}}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{x}+1\right)^x$$

Vereinfachung des reinen x-Terms im CAS ist falsch:

simplify(fTerm1)$\Rightarrow$fTerm2

$$\frac{\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x-1}\cdot\left(2\cdot\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)-1\right)}{x}$$

Die Vereinfachung des x-y-Terms mit anschließender Subst. wird korrekt ausgeführt:

$\text{simplify}(f(x,y))|y=1+\frac{1}{x} \Rightarrow \text{fTerm3}$

$$\left(\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)-\frac{1}{x\cdot\left(\frac{1}{x}+1\right)}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x}$$

judge(fTerm1=fTerm3)

TRUE

judge(fTerm1=fTerm2|x>0)

Undefined

Offenbar ist fTerm2 unkorrekt!

Kontrolle mit einer Zahl:

fTerm1|x=2

$$\frac{9\cdot(\ln(3)-\ln(2))}{4}-\frac{3}{4}$$

approx(ans)

0.1622964932

fTerm2|x=2

$$\frac{-3\cdot(-2\cdot(\ln(3)-\ln(2))+1)}{4}$$

approx(ans)

-0.1418023378

fTerm3|x=2

$$\frac{9\cdot\left(\ln(3)-\ln(2)-\frac{1}{3}\right)}{4}$$

approx(ans)

0.1622964932

Teach&Talk Köln 2013 Prof. Dr. L. Paditz

Erste Erfahrungen mit dem CP-Manager II

Integrale mit Parametern
=======================

(Volumenberechnung)

a) Schnitt dreier achsenparalleler Einheits-Zylinder
Volumen des Trizylinders
(gemeinsamer Volumenanteil aller drei beteiligten Zylinder)

Zylinder um die z-Achse: $x^2+y^2 \leq 1$

Zylinder um die y-Achse: $x^2+z^2 \leq 1$

Zylinder um die x-Achse: $y^2+z^2 \leq 1$

Der Trizylinder liegt über/unter der x-y-Ebene im Basiskreis $x^2+y^2=1$.

Zwischen der positiven x-Achse ($y=0$, $x\geq 0$) und der Winkelhalbierenden $y=x$ ($x\geq 0$)
liegt zwischen $z=0$ und $z=\sqrt{1-x^2}$ ein Sechszehntel des Gesamtvolumens V.
(Es ist die am niedrigsten liegende Mantelfläche zu nutzen!)

Beschreibung der Integrationsgrenzen in kartesischen Koordinaten

====================================

$0 \le x \le \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $0 \le y \le x$

sowie

$\frac{1}{2}\sqrt{2} \le x \le 1$ und $0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$

und

$0 \le z \le \min\left(\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-y^2}\right) = \sqrt{1-x^2}$

Ansatz:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \int_0^x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1 dz dy dx + \int_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1 dz dy dx$$

$$\frac{-\sqrt{2}}{2}+1$$

Ergebnis:

$V:=16\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}+1\right)$

$$16\cdot\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}+1\right)$$

expand(V)

$$-8\cdot\sqrt{2}+16$$

approx(V)

$$4.686291501$$

Ansatz mit Zylinderkoordinaten

(Polarkoordinaten in der x-y-Ebene)

==================================

$0 \le r \le 1$ und $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$

sowie

$0 \le z \le \sqrt{1-x^2}$ mit $x = r \cdot \cos(\varphi)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-(r \cdot \cos(\varphi))^2}} r \, dz \, dr \, d\varphi$$

$$\frac{-\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}$$

falsches Ergebnis:

$V := 16\left(\frac{-\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right)$

$$16 \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

expand(V)

$$-4 \cdot \sqrt{2} + 8$$

approx(V)

$$2.343145751$$

Hinweis: Der Faktor **r** im Ansatz kommt wegen der benutzten Koord.-Transformation hinzu.

Fehlersuche durch schrittweise Integration:

$$\int_0^{\sqrt{1-(r \cdot \cos(\varphi))^2}} r \, dz$$

$$r \cdot |\sin(\varphi)|$$

bereits das innere Integral ist fehlerhaft!

Das korrekte Ergebnis lautet doch offensichtlich:

$r \cdot \sqrt{1-(r \cdot \cos(\varphi))^2}$, denn

$$\int_a^b r\,dz$$

$$-a \cdot r+b \cdot r$$

$\text{ans} \mid a=0 \text{ and } b=\sqrt{1-(r \cdot \cos(\varphi))^2}$

$$r \cdot \sqrt{-r^2 \cdot (\cos(\varphi))^2+1}$$

nächster Integrationsschritt:

$$\int_0^1 r \cdot \sqrt{1-(r \cdot \cos(\varphi))^2}\,dr$$

$$\frac{|\sin(\varphi)|}{2}$$

erneut ein fehlerhaftes zweites Integral!

Das korrekte Ergebnis lautet:

$$\int_a^b r \cdot \sqrt{1-(r \cdot \cos(\varphi))^2}\,dr$$

$$\frac{\left(-a^2 \cdot (\cos(\varphi))^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{3 \cdot (\cos(\varphi))^2}-\frac{\left(-b^2 \cdot (\cos(\varphi))^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{3 \cdot (\cos(\varphi))^2}$$

$\text{ans} \mid a=0 \text{ and } b=1$

$$\frac{-\left(-(\cos(\varphi))^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{3 \cdot (\cos(\varphi))^2}+\frac{1}{3 \cdot (\cos(\varphi))^2}$$

dritter Integrationsschritt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\left(-(\cos(\varphi))^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot(\cos(\varphi))^2}+\frac{1}{3\cdot(\cos(\varphi))^2}\,d\varphi$$

$$\frac{-\sqrt{2}}{2}+1$$

Anmerkungen:

$$\text{simplify}\left(\frac{-\left(-(\cos(\varphi))^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot(\cos(\varphi))^2}+\frac{1}{3\cdot(\cos(\varphi))^2}\right)$$

$$\frac{\left((\cos(\varphi))^2-1\right)\cdot|\sin(\varphi)|+1}{3\cdot(\cos(\varphi))^2}$$

$\text{simplify}((\cos(\varphi))^2-1)$

$$(\cos(\varphi))^2-1$$

Das CAS kennt den trigon. Pythagoras nicht?

$\text{judge}\left(-(\sin(\varphi))^2=(\cos(\varphi))^2-1\right)$

TRUE

Somit

$$\frac{\left((\cos(\varphi))^2-1\right)\cdot|\sin(\varphi)|+1}{3\cdot(\cos(\varphi))^2}=\frac{-(\sin(\varphi))^2\cdot|\sin(\varphi)|+1}{3\cdot(\cos(\varphi))^2}$$

und

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-(\sin(\varphi))^3}{3\cdot(\cos(\varphi))^2}\,d\varphi$$

$$\frac{-\sqrt{2}}{2}+1$$

Teach&Talk Köln 2013 Prof. Dr. L. Paditz

Erste Erfahrungen mit dem CP-Manager II

Integrale mit Parametern
======================

(Volumenberechnung)

b) Schnitt der Halbkugel mit einem Zylinder
Volumen des Vivianischen Körpers

Vincenzo Viviani (geb. 5. April 1622 in Florenz; gest. 22. September 1703 in Florenz) war italienischer Mathematiker und Physiker. 1639 wurde er Mitarbeiter von Galileo Galilei.

Die obere Halbkugel (Radius R): $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $z \geq 0$, wird senkrecht durchbohrt, wobei der Bohrer seitlich um $\frac{R}{2}$ versetzt ist und den Bohrerradius $\frac{R}{2}$ aufweist.

Gesucht ist das Volumen V des herausgebohrten Raumstückes.

Bohrer (Zylinder): $\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2$

Ansatz in kartesischen Koordinaten:

es wird das halbe Volumen über dem I. Quadranten betrachtet:

$0 \le x \le R$ und $0 \le y \le \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{R}{2}\right)^2} = \sqrt{R \cdot x - x^2}$

sowie

$0 \le z \le \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$

$$\int_0^R \int_0^{\sqrt{R \cdot x - x^2}} \int_0^{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} 1 \, dz \, dy \, dx$$

$$\int_0^R \frac{-(x^2 - R^2) \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{-x \cdot (x-R)}}{\sqrt{-x^2 + R^2}}\right)}{2} + \frac{\sqrt{-x \cdot (x-R)} \cdot \sqrt{-R \cdot (x-R)}}{2} dx$$

Berechnung des letzten Integrals im Fall R=1:

$$\int_0^R \frac{-(x^2 - R^2) \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{-x \cdot (x-R)}}{\sqrt{-x^2 + R^2}}\right)}{2} + \frac{\sqrt{-x \cdot (x-R)} \cdot \sqrt{-R \cdot (x-R)}}{2} \mid R=1$$

$$0.3013765534$$

Berechnung des Integrals mit der Subst. $x = R \cdot t$, d.h. $dx = R \cdot dt$

$$\frac{-(x^2 - R^2) \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{-x \cdot (x-R)}}{\sqrt{-x^2 + R^2}}\right)}{2} + \frac{\sqrt{-x \cdot (x-R)} \cdot \sqrt{-R \cdot (x-R)}}{2} \mid x=R \cdot t$$

$$\frac{-\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{-R \cdot t \cdot (R \cdot t - R)}}{\sqrt{-R^2 \cdot t^2 + R^2}}\right) \cdot (R^2 \cdot t^2 - R^2)}{2} + \frac{\sqrt{-R \cdot t \cdot (R \cdot t - R)} \cdot \sqrt{-R \cdot (R \cdot t}}{2}$$

factor(ans|R>0)

$$\frac{-R^2 \cdot \left(t^2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{-R \cdot t \cdot (R \cdot t - R)}}{R \cdot \sqrt{-t^2 + 1}}\right) - \sqrt{-t^2 + t} \cdot \sqrt{-t + 1} - \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{-R \cdot t \cdot (R \cdot}}{R \cdot \sqrt{-t^2}}\right.\right.}{2}$$

R wird nur unvollständig gekürzt!

$$\int_0^1 \frac{-R^3\cdot\left((t^2-1)\cdot\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{-t\cdot(t-1)}}{\sqrt{-t^2+1}}\right)-\sqrt{-t^2+t}\cdot\sqrt{-t+1}\right)}{2}\,dt$$

$$0.3013765534\cdot R^3$$

Damit ist das gesuchte Gesamtvolumen:

$V:=2\cdot 0.3013765534\cdot R^3$

$$\frac{5981890\cdot R^3}{9924279}$$

approx(ans)

$$0.6027531068\cdot R^3$$

exaktes Ergebnis: V = $\left(\frac{\pi}{3}-\frac{4}{9}\right)\cdot R^3$

$\text{approx}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{4}{9}\right)$

$$0.6027531068$$

Teach&Talk Köln 2013 Prof. Dr. L. Paditz

Erste Erfahrungen mit dem CP-Manager II

Integrale mit Parametern

=======================

(eine Stammfunktion)

c) Berechnung eines Parameterintegrales

Es gelte für das reelle Integral mit dem reellen Parameter a die Voraussetzung:

$-x^2-2a\cdot x+3>0$, d.h. $-a-\sqrt{a^2+3}<x<-a+\sqrt{a^2+3}$, denn

$\mathrm{solve}\left(-x^2-2a\cdot x+3>0, x\right)$

$$\left\{-x^2-2\cdot a\cdot x>-3\right\}$$

$\mathrm{solve}\left(-x^2-2a\cdot x+3=0, x\right)$

$$\left\{x=-a-\sqrt{a^2+3}, x=-a+\sqrt{a^2+3}\right\}$$

Es gilt:

$$\int_{\square}^{\square}\frac{x}{\sqrt{-x^2-2a\cdot x+3}}dx=-\sqrt{-x^2-2a\cdot x+3}-a\cdot\sin^{-1}\left(\frac{x+a}{\sqrt{a^2+3}}\right)$$

Probe:

$$\frac{d}{dx}\left(-\sqrt{-x^2-2a\cdot x+3}-a\cdot\sin^{-1}\left(\frac{x+a}{\sqrt{a^2+3}}\right)\right)$$

$$\frac{-x\cdot\sqrt{-x^2-2\cdot a\cdot x+3}}{x^2+2\cdot a\cdot x-3}$$

Wegen $-x^2-2a\cdot x+3>0$ gekürzt:

$$\frac{d}{dx}\left(-\sqrt{-x^2-2a\cdot x+3}-a\cdot\sin^{-1}\left(\frac{x+a}{\sqrt{a^2+3}}\right)\right)=\frac{x\cdot\sqrt{-x^2-2\cdot a\cdot x+3}}{-x^2-2\cdot a\cdot x+3}=\frac{}{\sqrt{-x^2-}}$$

Das CAS rechnet jedoch wie folgt:

$$\int_{\square}^{\square}\frac{x}{\sqrt{-x^2-2a\cdot x+3}}dx$$

$$a\cdot\sin^{-1}\left(\frac{\left(\frac{x}{a}+1\right)\cdot|a|}{\sqrt{a^2+3}}\right)-\sqrt{-x^2-2\cdot a\cdot x+3}$$

Das CAS-Ergebnis ist offenbar nur für $a<0$ korrekt!

Im Fall $a>0$ hat der erste Summand einen Vorzeichenfehler!

Beispiel mit a=1:

$$\int_{\square}^{\square}\frac{x}{\sqrt{-x^2-2a\cdot x+3}}\,|\,a=1\,dx$$

$$-\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)-\sqrt{-x^2-2\cdot x+3}$$

Ergebnis korrekt, jedoch bei nachträglicher Festlegung von a hat das Ergebnis einen Vorzeichenfehler:

$$\int_{\square}^{\square}\frac{x}{\sqrt{-x^2-2a\cdot x+3}}dx\,|\,a=1$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)-\sqrt{-x^2-2\cdot x+3}$$