Stochastik-Ü 4.KW (WS 2014/15) Prof.Dr.L.Paditz
(Dokument als eActivity im ClassPad400 erstellt)

Liebe Studenten,
hier finden Sie noch einmal den vollständigen Lösungsweg für die die Aufgabe D1.

Gundgesamtheit X (zufäll. Blechlängen) ist $N(\mu,\sigma^2)$-verteilt mit $\sigma=0,8$.
μ unbekannt, Sollmaß $\mu_0=800$ (alle Maße in mm).
Stichprobe mit $n=15$ ergab $\bar{x}=799,7$.

a) Parametertest

1. H_0: $\mu=\mu_0$ H_1: $\mu\neq\mu_0$ (d.h. zweiseitige Alternative)
2. $\alpha=0,05$
3. $T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ ist unter H_0 $N(0,1)$-verteilt (Prüfvert.)
4. K={t|t<-z_1-α/2 oder z>z_1-α/2}
5. Entsch. wie üblich

Testduchführung mit vorhandener TR-Software:

OneSampleZTest "≠",800,0.8,799.7,15

done

DispStat

done

=================================

1-Stichprob. Z-Test

Daten=Variable

$\mu \neq 800$

$z = -1.452369$

$prob = 0.1463991$

$\bar{x} = 799.7$

$n = 15$

==================================

Wegen p-Wert=prob=0,1463991>α=0,05 gilt $z=t\notin K$, d.h. das Stichprobenmittel deutet nicht auf eine signifikante Abweichung vom Sollwert hin, wobei die Sicherheit der Aussage 95% beträgt.

Bem.: Quantilberechnung:

invNormCDf("L",0.975,1,0)

1.959963985

b) p-Wert-Berechnung

normCDf(-∞,-1.452369,1,0)*2

0.1463990311

c) Gütefunktion und Operationscharakteristik

Wir ersetzen in der Testgröße das Stichprobenmittel durch den wahren (unbekannten) Parameter μ und variieren μ:

$T=\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, d.h. $T=T(\mu)\in N\left(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n},1\right)$

Per Def. ist die **Operationscharakteristik OC(μ)** die μ-abhängige Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $T\notin K$ bei fest vorgegebenem α,

d.h. die μ-abhängige Wahrscheinlichkeit dafür, dass T im vorgegebenen Intervall zwischen den Quantilen liegt (Fehler 2.Art für $\mu\neq\mu_0=800$).

α:=0.05

0.05

z:=invNormCDf("L",1−α/2,1,0)

1.959963985

μ_0:=800

800

σ:=0.8

0.8

n:=15

15

Define OC(μ)=normCDF(−z,z,1,$\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$)

done

Die **Gütefunktion g(μ)** ist die Restwahrscheinlichkeit
1−OC(μ), d.h. die μ−abhängige Wahrscheinlichkeit für das
Ereignis T∈K bei fest vorgegebenem α,
Define g(μ)=1−OC(μ)

done

d) Tabellierung:

seq(μ,μ,800−1,800+1,0.2)

{799,799.2,799.4,799.6,799.8,800,800.2,800.4,800.6,▶

listToMat(ans)⇒μwert

$$\begin{bmatrix} 799 \\ 799.2 \\ 799.4 \\ 799.6 \\ 799.8 \\ 800 \\ 800.2 \\ 800.4 \\ 800.6 \\ 800.8 \\ 801 \end{bmatrix}$$

seq(OC(µ), µ, 800−1, 800+1, 0.2)

{0.00198041111, 0.02787278419, 0.1723866823, 0.5093144▶

fRound(ans, 4)

{0.002, 0.0279, 0.1724, 0.5093, 0.8376, 0.95, 0.8376, 0.50▶

listToMat(ans)⇒OpCh

$$\begin{bmatrix} 0.002 \\ 0.0279 \\ 0.1724 \\ 0.5093 \\ 0.8376 \\ 0.95 \\ 0.8376 \\ 0.5093 \\ 0.1724 \\ 0.0279 \\ 0.002 \end{bmatrix}$$

seq(g(µ), µ, 800−1, 800+1, 0.2)

{0.9980195889, 0.9721272158, 0.8276133177, 0.490685567▶

fRound(ans, 4)

{0.998, 0.9721, 0.8276, 0.4907, 0.1624, 0.05, 0.1624, 0.49▶

listToMat(ans)⇒Gfkt

$$\begin{bmatrix} 0.998 \\ 0.9721 \\ 0.8276 \\ 0.4907 \\ 0.1624 \\ 0.05 \\ 0.1624 \\ 0.4907 \\ 0.8276 \\ 0.9721 \\ 0.998 \end{bmatrix}$$

augment(augment(μwert, OpCh), Gfkt)

$$\begin{bmatrix} 799 & 0.002 & 0.998 \\ 799.2 & 0.0279 & 0.9721 \\ 799.4 & 0.1724 & 0.8276 \\ 799.6 & 0.5093 & 0.4907 \\ 799.8 & 0.8376 & 0.1624 \\ 800 & 0.95 & 0.05 \\ 800.2 & 0.8376 & 0.1624 \\ 800.4 & 0.5093 & 0.4907 \\ 800.6 & 0.1724 & 0.8276 \\ 800.8 & 0.0279 & 0.9721 \\ 801 & 0.002 & 0.998 \end{bmatrix}$$

trn(ans)

$$\begin{bmatrix} 799 & 799.2 & 799.4 & 799.6 & 799.8 & 800 & 800.2 & 800.4 \\ 0.002 & 0.0279 & 0.1724 & 0.5093 & 0.8376 & 0.95 & 0.8376 & 0.509 \\ 0.998 & 0.9721 & 0.8276 & 0.4907 & 0.1624 & 0.05 & 0.1624 & 0.490 \end{bmatrix}$$

$$\text{augment}\left(\begin{bmatrix} \text{μWert} \\ \text{OpCha} \\ \text{Gütef} \end{bmatrix}, \text{ans}\right)$$

µWert	799	799.2	799.4	799.6	799.8	800	800.2
OpCha	0.002	0.0279	0.1724	0.5093	0.8376	0.95	0.8376
Gütef	0.998	0.9721	0.8276	0.4907	0.1624	0.05	0.1624

Define y1(x)=OC(x)

done

Define y2(x)=g(x)

done

Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art (Nichtablehnung einer falschen Nullhypothese) = OC(µ) für $\mu \neq \mu_0 = 800$

Grafik

stop

e) Stichprobenumfang n neu ermitteln:

Abweichung des Mittelwertes µ vom Sollwert μ_0 mindestens 0,2,

d.h. in $T=\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ ist $\mu \geq 800.2$ oder $\mu \leq 799.8$

und Ablehnung von H_0: $\mu=\mu_0$ mit mindestens $95\%=1-\alpha$.

Ansatz:

Wegen der Symmetrie von OC(µ) bzw. g(µ) um µ=800 reicht es, n so zu bestimmen, dass g(800.2)≥0.95 (bzw. OC(800.2)≤0.05) gilt.

Define $OC(n)=normCDF(-z,z,1,\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n})|\mu=800.2$

done

solve(OC(n)=0.05,n)

{n=207.9153455}

Ergebnis: n aufrunden, um die Mindestwkt. von 5% nicht zu

überschreiten.
Der Stichprobenumfang muss mindestens n=208 betragen, damit eine Abweichung von mindestens 0,2mm vom Sollwert 800 mit mindestens 95% Sicherheit zur Ablehnung von H_0 führt.