

**Statistik-Vorlesung 48.KW** (24.11.2014) Prof. Dr. L. Paditz  
(Dokument als eActivity im ClassPad400 erstellt)

Liebe Studenten,

zuerst gebe ich Ihnen das **Beispiel 15** zum  
Chi-Quadrat-Anpassungstest:

n:=100 100

x\_quer:=1203.1 1203.1

s:=614.9 614.9


listh:={11, 29, 27, 23, 7, 2, 0, 1} {11, 29, 27, 23, 7, 2, 0, 1}

$\alpha:=0.05$  0.05

Exponentialvert. mit

$\lambda:=1/x\_quer$  8.311861026E-4

Define  $Fo(x)=\begin{cases} 1-e^{-\lambda*x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad |\lambda=1/1203.1$  done

n\*seq(Fo(x+500)-Fo(x), x, 0, 3500, 500)  
{34.00512188, 22.44163874, 14.81033213, 9.77406064, 6.4 

rechte Randklasse:

n\*(1-Fo(3500)) 5.452197983

drittletzte und vorletzte Klasse zusammenfassen (!Faustregel):

4. 256920027+2. 809349184

7. 066269211

listnp:={34. 00512188, 22. 44163874, 14. 81033213, 9. 774060 ▶

{34. 00512188, 22. 44163874, 14. 81033213, 9. 77406064, 6. 4 ▶

sum(listnp)

99. 99999999

listh:={11, 29, 27, 23, 7, 2, 1}

{11, 29, 27, 23, 7, 2, 1}

FG:=dim(listnp)-1-1

5

ChiGOFTest listh, listnp, FG

done

Dispstat

done

=====

x2 GOF Test

$$\chi^2 = 52.724445$$

$$\text{prob} = 3.831\text{E-}10$$

$$\text{df} = 5$$

=====

Wegen  $p\text{-Wert}=\text{prob}=3.831\text{E-}10 < \alpha=0.05$  ist  $H_0$  abzulehnen,  
d.h. es liegt mit einer Sicherheit von 95% keine  
Exponentialvert. vor.

**Bem. :**

invChiCDf(0.05, 5)

11.07049769

kritischer Bereich:  $t=52.724445 \in K=(11.07; \infty)$

### Beispiel 16:

Test mit einer anderen Lebensdauerverteilung:

Rayleigh-Verteilung, vgl. Internet:

<http://de.wikipedia.org/wiki/Rayleigh-Verteilung>

DelVar  $\lambda$

done

$$\text{Define } F_0(x, \lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/\lambda}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

done

Der Parameter  $\lambda$  hat folgende ML-Schätzung

$$\text{(Maximum-Likelihood-Schätzung): } \lambda_{\text{Dach}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2)$$

vgl.

<http://de.wikipedia.org/wiki/Maximum-Likelihood-Methode>

Dichtefunktion:

$$\text{Define } f_0(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{2x}{\lambda} e^{-x^2/\lambda}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

done

Maximum-Likelihood-Schätzung:

$$\prod_{i=1}^n (f_0(x_i, \lambda)) \rightarrow \max, \text{ d. h.}$$

$$\ln \left( \prod_{i=1}^n (f_0(x_i, \lambda)) \right) = \sum_{i=1}^n \left( \ln \left( \frac{2x_i}{\lambda} e^{-x_i^2/\lambda} \right) \right) = \sum_{i=1}^n \left( \ln \left( \frac{2x_i}{\lambda} \right) - x_i^2/\lambda \right) \rightarrow$$

**1. Ableitung:** notw. Bed. für Extremum

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \ln \left( \frac{2x_i}{\lambda} \right) - x_i^2/\lambda \right)$$

$$\frac{x_i^2 - \lambda}{\lambda^2}$$

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i^2 - \lambda}{\lambda^2} \right) = 0$$

$$\frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n (x_i^2) - \frac{n}{\lambda} = 0$$

$$\frac{100 \cdot x_i^2}{\lambda^2} - \frac{100}{\lambda} = 0$$

Hieraus:  $\lambda_{\text{Dach}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2)$  (ML-Schätzung für  $\lambda$ )

Bestimmung von  $\lambda_{\text{Dach}}$  aus gegebenem  $x_{\text{quer}}$  und  $s$ :

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n ((x_i - \bar{x})^2) = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n (x_i^2) - n\bar{x}^2 \right) \text{ ergibt}$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i^2) = (n-1)s^2 + n\bar{x}^2$$


Somit

$$\lambda_{\text{Dach}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2) = \frac{n-1}{n} s^2 + \bar{x}^2$$

$$\lambda := \frac{99}{100} * 614.9^2 + 1203.1^2$$

1821770.6

100 \* seq(Fo(x+500,  $\lambda$ ) - Fo(x,  $\lambda$ ), x, 0, 3500, 500)

{12.82295482, 29.41951961, 28.67585819, 17.95322667, 7. 

rechte Randklasse:

$$n * (1 - \text{Fo}(3500, \lambda))$$

0.1201448318

Die vier rechten Klassen zusammenfassen (!Faustregel)

```

sum({7.892104598, 2.521054251, 0.595137029, 0.10480794
11.11310382
listnp:={12.82295482, 29.41951961, 28.67585819, 17.95322
{12.82295482, 29.41951961, 28.67585819, 17.95322667, 11
listh:={11, 29, 27, 23, 10}
{11, 29, 27, 23, 10}

```

ChiGOFTest listh, listnp, 3

done

DispStat

done

=====

x2 GOF Test

$\chi^2 = 1.8932514$  statt 52.724445

prob = 0.5948555 statt 3.831E-10

df = 3

=====

Wegen prob=p-Wert>0.05= $\alpha$  erfolgt kein Einwand gegen Ho.

(d.h. es läßt sich nicht mit 95% Sicherheit widerlegen, dass X Rayleigh-verteilt ist.)

### Beisp. 17:

Münzwurf mit n=100, Zahl fiel 58 mal.

Frage: Ist die Münze symmetrisch, d.h. hat jede Seite die gleiche Chance?

Versuchsergebnis: A={Zahl},  $\bar{A}$ ={Wappen}

Ho:  $P(A)=P(\bar{A})=0.5$ ,  $H_1: P(A) \neq P(\bar{A})$

$\alpha=0.05$

$$t := \frac{(42-50)^2}{50} + \frac{(58-50)^2}{50}$$

2.56

listh:={42, 58}

{42, 58}

listnp:={50, 50}

{50, 50}

ChiGOFTest listh, listnp, 1

done

DispStat

done

=====

x2 GOF Test

$$\chi^2 = 2.56$$

$$\text{prob} = 0.1095986$$

$$\text{df} = 1$$

=====

Wegen  $\text{prob} = p\text{-Wert} > \alpha = 0.05$  kein Einwand gegen  $H_0$ .

(d. h. es läßt sich nicht mit 95% Sicherheit widerlegen, dass die Münze symmetrisch ist.)