**Statistik-Ü 47.-49.KW** (WS 2014) Prof.Dr.L.Paditz
(Dokument als eActivity im ClassPad400 erstellt)

Liebe Studenten,
hier finden Sie noch einmal den vollständigen Lösungsweg für die die Aufgabe D1.

Gundgesamtheit X (zufäll. Blechlängen) ist $N(\mu,\sigma^2)$-verteilt mit $\sigma=0,8$.
$\mu$ unbekannt, Sollmaß $\mu_0=800$ (alle Maße in mm).
Stichprobe mit n=15 ergab $\bar{x}=799,7$.

**a) Parametertest**

1. $H_0$: $\mu=\mu_0$ $H_1$: $\mu\neq\mu_0$ (d.h. zweiseitige Alternative)
2. $\alpha=0,05$
3. $T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ ist unter $H_0$ N(0,1)-verteilt (Prüfvert.)
4. K={t|t<-z_1-α/2 oder z>z_1-α/2}
5. Entsch. wie üblich

**Testduchführung mit vorhandener TR-Software:**

OneSampleZTest "≠",800,0.8,799.7,15

done

DispStat

done

================================

1-Stichprob. Z-Test

Daten=Variable

μ ≠ 800

$z = -1.452369$
prob = 0.1463991
$\bar{x} = 799.7$
$n = 15$

==================================

Wegen p-Wert=prob=0,1463991>$\alpha$=0,05 gilt $z=t\notin K$, d.h. das Stichprobenmittel deutet nicht auf eine signifikante Abweichung vom Sollwert hin, wobei die Sicherheit der Aussage 95% beträgt.

**Bem.:** Quantilberechnung:
invNormCDf("L",0.975,1,0)

1.959963985

**b) p-Wert-Berechnung**
normCDf(-∞,-1.452369,1,0)*2

0.1463990311

**c) Gütefunktion und Operationscharakteristik**
Wir ersetzen in der Testgröße das Stichprobenmittel durch den wahren (unbekannten) Parameter $\mu$ und variieren $\mu$:

$$T=\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}, \quad \text{d.h.} \quad T=T(\mu)\in N\left(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}, 1\right)$$

Per Def. ist die **Operationscharakteristik OC($\mu$)** die $\mu$-abhängige Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $T\notin K$ bei fest vorgegebenem $\alpha$,
d.h. die $\mu$-abhängige Wahrscheinlichkeit dafür, dass T im vorgegebenen Intervall zwischen den Quantilen liegt (Fehler 2.Art für $\mu\neq\mu_0=800$).

$\alpha$:=0.05

0.05

z:=invNormCDf("L", 1−$\alpha$/2, 1, 0)

1.959963985

$\mu_0$:=800

800

$\sigma$:=0.8

0.8

n:=15

15

Define OC($\mu$)=normCDF(−z, z, 1, $\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$)

done

Die **Gütefunktion g($\mu$)** ist die Restwahrscheinlichkeit 1−OC($\mu$), d.h. die $\mu$−abhängige Wahrscheinlichkeit für das Ereignis T∈K bei fest vorgegebenem $\alpha$,

Define g($\mu$)=1−OC($\mu$)

done

**d) Tabellierung:**

seq($\mu$, $\mu$, 800−1, 800+1, 0.2)

{799, 799.2, 799.4, 799.6, 799.8, 800, 800.2, 800.4, 800.6, ▶

listToMat(ans)⇒$\mu$wert

$$\begin{bmatrix} 799 \\ 799.2 \\ 799.4 \\ 799.6 \\ 799.8 \\ 800 \\ 800.2 \\ 800.4 \\ 800.6 \\ 800.8 \\ 801 \end{bmatrix}$$

seq(OC(µ),µ,800−1,800+1,0.2)

{0.00198041111,0.02787278419,0.1723866823,0.5093144▶

fRound(ans,4)

{0.002,0.0279,0.1724,0.5093,0.8376,0.95,0.8376,0.50▶

listToMat(ans)⇒OpCh

$$\begin{bmatrix} 0.002 \\ 0.0279 \\ 0.1724 \\ 0.5093 \\ 0.8376 \\ 0.95 \\ 0.8376 \\ 0.5093 \\ 0.1724 \\ 0.0279 \\ 0.002 \end{bmatrix}$$

seq(g(µ),µ,800−1,800+1,0.2)

{0.9980195889,0.9721272158,0.8276133177,0.490685567▶

fRound(ans,4)

{0.998,0.9721,0.8276,0.4907,0.1624,0.05,0.1624,0.49▶

listToMat(ans)⇒Gfkt

$$\begin{bmatrix} 0.998 \\ 0.9721 \\ 0.8276 \\ 0.4907 \\ 0.1624 \\ 0.05 \\ 0.1624 \\ 0.4907 \\ 0.8276 \\ 0.9721 \\ 0.998 \end{bmatrix}$$

augment(augment(μwert, OpCh), Gfkt)

$$\begin{bmatrix} 799 & 0.002 & 0.998 \\ 799.2 & 0.0279 & 0.9721 \\ 799.4 & 0.1724 & 0.8276 \\ 799.6 & 0.5093 & 0.4907 \\ 799.8 & 0.8376 & 0.1624 \\ 800 & 0.95 & 0.05 \\ 800.2 & 0.8376 & 0.1624 \\ 800.4 & 0.5093 & 0.4907 \\ 800.6 & 0.1724 & 0.8276 \\ 800.8 & 0.0279 & 0.9721 \\ 801 & 0.002 & 0.998 \end{bmatrix}$$

trn(ans)

$$\begin{bmatrix} 799 & 799.2 & 799.4 & 799.6 & 799.8 & 800 & 800.2 & 800.4 \\ 0.002 & 0.0279 & 0.1724 & 0.5093 & 0.8376 & 0.95 & 0.8376 & 0.509 \\ 0.998 & 0.9721 & 0.8276 & 0.4907 & 0.1624 & 0.05 & 0.1624 & 0.490 \end{bmatrix}$$

$$\text{augment}\left(\begin{bmatrix} \text{μWert} \\ \text{OpCha} \\ \text{Gütef} \end{bmatrix}, \text{ans}\right)$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| µWert | 799 | 799.2 | 799.4 | 799.6 | 799.8 | 800 | 800.2 |
| OpCha | 0.002 | 0.0279 | 0.1724 | 0.5093 | 0.8376 | 0.95 | 0.8376 |
| Gütef | 0.998 | 0.9721 | 0.8276 | 0.4907 | 0.1624 | 0.05 | 0.1624 |

Define y1(x)=OC(x)

done

Define y2(x)=g(x)

done

**Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art** (Nichtablehnung einer falschen Nullhypothese) = OC(µ) für $\mu \neq \mu_0 = 800$

Grafik

stop

**e) Stichprobenumfang n neu ermitteln:**

Abweichung des Mittelwertes µ vom Sollwert $\mu_0$ mindestens 0,2,

d.h. in $T=\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ ist $\mu \geq 800.2$ oder $\mu \leq 799.8$

und Ablehnung von $H_0$: $\mu=\mu_0$ mit mindestens $95\%=1-\alpha$.

**Ansatz:**

Wegen der Symmetrie von OC(µ) bzw. g(µ) um µ=800 reicht es, n so zu bestimmen, dass g(800.2)≥0.95 (bzw. OC(800.2)≤0.05) gilt.

Define OC(n)=normCDF$(-z,z,1,\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n})|\mu=800.2$

done

solve(OC(n)=0.05,n)

{n=207.9153455}

**Ergebnis:** n aufrunden, um die Mindestwkt. von 5% nicht zu

überschreiten.
Der Stichprobenumfang muss mindestens n=208 betragen, damit eine Abweichung von mindestens 0,2mm vom Sollwert 800 mit mindestens 95% Sicherheit zur Ablehnung von $H_0$ führt.