3 Lineare Algebra und Geometrie

3.1 Matrizen und Determinanten

3.1.1 Definition und Spezialfälle von Matrizen

Matrix vom Typ (m, n): rechteckiges Zahlenschema aus m waagerecht angeordneten Zeilen und n senkrecht angeordneten Spalten, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dabei bezeichnen

$a_{ik} \in \mathbb{R}$: Matrixelemente (Komponenten) $(i = 1, 2, \dots, m,\ k = 1, 2, \dots, n)$

i: Zeilenindex

k: Spaltenindex

Schreibweisen für Matrizen: A, (a_{ik}), $(a_{ik})_{(m,n)}$

Spezialfälle

1) (n-reihige) **quadratische** Matrix:
   Falls $m = n$, d.h. Zeilenzahl = Spaltenzahl
2) a) **Spaltenvektor**: Matrix vom Typ $(m, 1)$, d.h.
   $$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$$
   b) **Zeilenvektor**: Matrix vom Typ $(1, n)$, d.h.
   $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
3) *Nullmatrix* O: Matrix, wo jedes Element $= 0$
4) *transponierte Matrix* A^T: Matrix, die man erhält, wenn man in A Zeilen und Spalten vertauscht, d.h. $a_{ik}^T = a_{ki} \quad \forall i, k$

Spezielle *quadratische* Matrizen

A) (n-reihige) **Einheitsmatrix** $E = (\delta_{ik})$, wobei

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = k \\ 0 & \text{für} \quad i \neq k \end{cases} \qquad \text{(Kronecker-Symbol)}$$

B) *Dreiecksmatrix*: Alle Elements ober- *oder* unterhalb der Hauptdiagonale = 0:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{untere Dreiecksmatrix}} \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{obere Dreiecksmatrix}}$$

C) *Symmetrische* Matrix: $A = A^T$, d.h. $a_{ik} = a_{ki} \quad \forall i, k = 1, \dots, n$

D) *Schiefsymmetrische* Matrix: $A = -A^T$.

3.1.2 Rechenoperationen für Matrizen

Zwei Matrizen $A = (a_{ik})$ und $B = (b_{ik})$ vom *gleichen* Typ (m, n) heißen **gleich**: $A = B$, wenn $a_{ik} = b_{ik} \quad \forall i, k$.

I) Addition und Subtraktion

Zwei Matrizen $A = (a_{ik})$ und $B = (b_{ik})$ vom *gleichen* Typ (m, n) werden addiert bzw. subtrahiert, indem die entsprechenden gleichstelligen Matrixelemente addiert bzw. subtrahiert werden:

Summe: $C = A + B = (c_{ik})$ mit $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$,

Differenz: $D = A - B = (d_{ik})$ mit $d_{ik} = a_{ik} - b_{ik}$,

$i = 1, \dots, m, \; k = 1, \dots, n.$

Offenbar gilt für beliebige Matrizen

$A + B = B + A$ (Kommutativgesetz)

$(A + B) + C = A + (B + C)$ (Assoziativgesetz)

II) Multiplikation mit Skalar

Eine Matrix $A = (a_{ik})$ wird mit einem *Skalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert, indem jedes Matrixelement mit λ multipliziert wird: $\lambda A = (\lambda \cdot a_{ik}) \quad \forall i, k$.

Dabei gilt für beliebige Matrizen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ (Assoziativgesetz);

$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,

$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ (Distributivgesetze)

III) Multiplikation von Matrizen

Sei $A = (a_{ik})$ eine Matrix vom Typ (m,n) und $B = (b_{ik})$ eine Matrix vom Typ (n,p). Dann heißt die Matrix $C = AB = (c_{ik})$, $i = 1,\dots,m$, $k = 1,\dots,p$ mit

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

das **Produkt** der Matrizen A und B.

Anmerkungen: Die Produktbildung ist nur möglich, wenn die *Spaltenzahl* von A mit der *Zeilenzahl* von B übereinstimmt ("*verkettete* Matrizen"). Das Matrixprodukt AB ist vom Typ (m,p).

Nun gilt

$AB \neq BA$ (im Allgemeinen!)	*nicht* kommutativ
$A(BC) = (AB)C$	(Assoziativgesetz)
$A(B+C) = AB + AC$	(Distributivgesetz)
$AO = OA = O$	
$AE = EA = A$	
$(AB)^T = B^T A^T$	

3.1.3 Determinanten

Die **Determinante** einer n-reihigen *quadratischen* Matrix $A = (a_{ik})$ ist eine Zahl, die nach bestimmter Vorschrift berechnet wird:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\delta} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n},$$

wobei $i_1, i_2, \dots, i_n$ alle möglichen Permutationen von $1, 2, \dots, n$ und δ Anzahl der Indexvertauschungen.

Spezialfälle:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Einige Eigenschaften
Seien A, B quadratische Matrizen
- $|A| = |A^T|$
- $|AB| = |A||B|$
- $A = (a_{ik})$ n-reihige Dreiecksmatrix:
  $|A| = a_{11}a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \prod\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$

Insbesondere: $|E| = 1, \quad |O| = 0.$

3.1.4 Inverse Matrizen

Eine n-reihige, *quadratische* Matrix A heißt *regulär*, wenn $|A| \neq 0$ bzw. *singulär*, wenn $|A| = 0$.

Gibt es zu einer n-reihigen, *quadratischen* Matrix A eine Matrix X mit $AX = XA = E$, so heißt X die zu A **inverse Matrix** und wird bezeichnet: $X = A^{-1}$.

Es gilt:
- A besitzt inverse Matrix $\Longleftrightarrow$ A regulär.
- Inverse Matrix A^{-1} ist eindeutig bestimmt.
- Besitzt A inverse Matrix A^{-1}, so nennt man A *invertierbar* $\Longrightarrow$
  $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ (Probe!)

3.2 Lineare Gleichungssysteme

3.2.1 Vorbetrachtungen

Lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten
(kurz: lineares (m, n)-System):

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \qquad (*)$$

Bezeichnen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Dann ist $(*)$ in Matrixschreibweise: $\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$ $(**)$.
Lösung: Spaltenvektor(en) $\vec{x}$, die $(*)$ bzw. $(**)$ erfüllen.

Das lineare Gleichungssystem $(*)$ heißt *homogen*, wenn

$$\vec{b} = \vec{0} := \left.\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \begin{array}{c} m \\ \text{Zeilen} \end{array}$$

Andernfalls heißt $(*)$ *inhomogen*.

Speziell für $m = n$: *Cramersche Regel*:

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|}, \quad k = 1, \dots, n \qquad \text{mit}$$

$$|A_k| := \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2k-1} & b_2 & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & \underset{\substack{\uparrow \\ k\text{-te Spalte}}}{b_n} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Allgemein
Lösung von $(*)$ bleibt unverändert bei *elementaren* (Zeilen-) *Umformungen*:

1. *Vertauschen* zweier Zeilen
2. *Multiplikation* der Elemente einer Zeile mit Faktor $\lambda \neq 0$
3. Addition eines Vielfachen einer *anderen* Zeile zu einer Zeile

Ziel: Überführung der Matrix A vom Typ (m,n) mittels elementarer Umformungen in *Trapezform* $\widehat{=}$ äquivalente Matrix :

$$A^* = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1r} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2r} & \dots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3r} & \dots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{rr} & \dots & \alpha_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} \begin{array}{c} r \\ \text{Zeilen} \end{array} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} \begin{array}{c} m-r \\ \text{Zeilen} \end{array} \end{array}$$

Rang der Matrix $A = r(A) = r$: Anzahl der Zeilen in Trapezform, die nicht nur 0 enthalten.

3.2.2 Der Gaußsche Algorithmus

Zwecks Lösung des linearen Gleichungssystems $(*)$ betrachtet man *erweiterte Koeffizientenmatrix*

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Gaußscher Algorithmus (Allgemeines Schema):

1. Mittels elementarer (Zeilen-)Umformungen wird die *erweiterte* Koeffizientenmarix $(A|\vec{b})$ auf die ranggleiche Matrix in Trapezform überführt:
$A \Rightarrow A^*, \quad (A|\vec{b}) \Rightarrow (A^*|\vec{b}^*)$.

2. Das lineare Gleichungssystem liegt nun in gestaffelter Form $A^*\vec{x} = \vec{b}^*$ vor und läßt sich – falls es lösbar ist – von unten nach oben sukzessiv lösen.

Konkret zu 1.

1.0. (Eventuell Multiplikation von Zeile(n) mit Faktor)
1.1. *Leitelement* $a_{ij} \neq 0$ wählen $\Longrightarrow$ Leitzeile (x) fixiert
1.2. Leitelement $\times$ Faktor + andere Zeile so, daß in Spalte des Leitelements alles Null wird $\Longrightarrow$ neuer Block
1.3. Falls noch keine Trapezform $\Longrightarrow$ 1.0.

3.2.3 Lösungsverhalten eines linearen Gleichungssystems

Gegeben lineares (m,n)-System $A\vec{x} = \vec{b}$:

$\boxed{\text{Fall I}}$ $r(A) = r(A|\vec{b}) = r$:
a) $r = n$: genau eine Lösung
oder b) $r < n$: unendlich viele Lösungen mit $n - r$ Parametern
$\boxed{\text{Fall II}}$ $r(A) < r(A|\vec{b})$: keine Lösung

Anmerkungen:

1) Der Fall $r(A) < r(A|\vec{b})$ tritt beim Gaußschen Algorithmus auf, wenn die letzte Zeile, die nicht nur aus Nullen besteht, *nur* in der Spalte der *freien* Glieder ein Element $\neq 0$ enthält, d.h.
$0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \mid * \neq 0$
2) Bei *homogenen* linearen Gleichungssystemen gilt stets $r(A) = r(A|\vec{b})$, d.h. sie sind immer lösbar – eine *oder* unendlich viele Lösungen. Besitzt es einzige Lösung, dann nur die *triviale* Lösung: $\vec{x} = (0, 0, \ldots, 0)^T$.
3) Ein lineares (n,n)-System ist *eindeutig* lösbar $\Longleftrightarrow r(A) = n$
$\Longleftrightarrow |A| \neq 0 \Longleftrightarrow A^{-1}$ existiert: $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

3.3 Vektorrechnung und analytische Geometrie

3.3.1 Darstellung von Vektoren

(Geometrischer)**Vektor** $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$: Parallelverschiebung, die Punkt P in Punkt Q des (Anschauungs-)Raumes überführt.
Jeder Vektor $\vec{a}$ ist eindeutig bestimmt durch Länge (= **Betrag** $|\vec{a}|$) und *Richtung*.

Arten von Vektoren:
- gebundene Vektoren: fester Angriffspunkt
- linienflüchtige Vektoren: entlang einer Gerade verschiebbar
- *freie* Vektoren: beliebig im Raum verschiebbar

Spezielle Vektoren:
- Nullvektor $\vec{0} = \overrightarrow{PP}$
- entgegengesetzter (inverser) Vektor $-\vec{a} = \overrightarrow{QP}$
- Einheitsvektor $\vec{e}$: $|\vec{e}| = 1$

Rechenoperationen

• Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen **gleich**: $\vec{a} = \vec{b}$, wenn sie in Betrag und Richtung übereinstimmen.

• Addition: Seien $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$, $\vec{b} = \overrightarrow{QR}$:

Summe: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{PR}$

• Multiplikation mit Skalar:
$\alpha \geq 0$: $\alpha\,\vec{a}$ – α-*faches* von $\vec{a}$
$\alpha < 0$: $\alpha\,\vec{a} = -(|\alpha|\,\vec{a})$

Ortsvektor: $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$
mit (a_x, a_y, a_z) – kartesische Koordinaten von $A \Longrightarrow$
Jedem Vektor im Raum entspricht ein Spaltenvektor vom Typ (3,1) (oder ein Zeilenvektor vom Typ (1,3)).

Vektor durch Punkte $A = (a_x, a_y, a_z)$, $B = (b_x, b_y, b_z)$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \\ b_z - a_z \end{pmatrix}.$$

3.3.2 Vektorraum und lineare Abhängigkeit

Eine Menge $V \neq \emptyset$, in der man zu je zwei Elementen $\vec{a}, \vec{b} \in V$ eine Summe $\vec{a} + \vec{b} \in V$ und zu jedem Element $\vec{a} \in V$ das λ-fache ($\lambda \in \mathbb{R}$) $\lambda\vec{a} \in V$ bilden kann, heißt **Vektorraum** (über $\mathbb{R}$), wenn folgende 8 *Axiome* erfüllt sind:
1° $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (kommutativ)
2° $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (assoziativ)
3° $\exists\vec{0}$ (Nullvektor): $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4° $\exists(-\vec{a}) \in V$: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
5° $1\vec{a} = \vec{a}$
6° $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$
7° $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
8° $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
jeweils für beliebige $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Vektoren: Elemente des Vektorraums V.

Statt $\vec{a} + (-\vec{b})$ schreibt man $\vec{a} - \vec{b}$ (*Differenz*).

Beispiel: $\mathbb{R}^n := \{\vec{a} : \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\}.$

(*n-dimensionaler Euklidischer Raum*)

Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in V$ heißen **linear abhängig**, wenn reelle Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ $(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 > 0)$ existieren, so daß

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}. \tag{1}$$

Gilt (1) nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, so heißen die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ **linear unabhängig**.

Der Vektor $\vec{b}$ stellt **Linearkombination** von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ dar, wenn

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n, \qquad \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in V$ bilden **Basis** des Vektorraums V, wenn
1) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ linear unabhängig
2) Jeder Vektor $\vec{b} \in V$ Linearkombination von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

Dimension des Vektorraums V $(= \dim V)$: maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren.

Folglich: Falls $\dim V = n$, so bilden beliebige n linear unabhängige Vektoren eine Basis.

Speziell: **Einheitsvektoren**

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden *orthonormierte Basis* in $\mathbb{R}^3$, d.h. sie stehen jeweils senkrecht aufeinander und ihre Länge beträgt 1.

3.3.3 Operationen mit Vektoren

Seien $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^T,\ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)^T,\ \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

I) Skalarprodukt

- (geometrisch) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi$ (+)
  mit φ eingeschlossenem Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$
  $(0 \leq \varphi \leq \pi)$
- (algebraisch) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ (++)

Rechenregeln:
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 =: \vec{a}^2 > 0, \quad$ falls $\vec{a} \neq 0$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}), \quad (\lambda \in \mathbb{R})$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$

Einige Anwendungen
1) Länge eines Vektors $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \tag{3}$$

2) Winkel zwischen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \tag{4}$$

Speziell: $\vec{a} \perp \vec{b} \leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

3) *Projektion* eines Vektors $\vec{b}$ auf Vektor $\vec{a}$:

$$\vec{b}_a = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right) \vec{a}.$$

4) Richtungswinkel zwischen Vektor und den Koordinatenachsen (*Richtungskosinus*) $\alpha := \angle(\vec{e_1}, \vec{a}),\ \beta := \angle(\vec{e_2}, \vec{a}),\ \gamma := \angle(\vec{e_3}, \vec{a})$:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}. \tag{5}$$

Offenbar gilt

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

II) Vektorprodukt

- (geometrisch) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, wenn
  a) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi$
  (φ eingeschlossener Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$)
  b) $\vec{c}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$
  c) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden Rechtssystem
- (algebraisch) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

Rechenregeln:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}), \quad (\lambda \in \mathbb{R})$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Anwendungen: Flächeninhalt des von $\vec{a}, \vec{b}$ aufgespannten
Parallelogramms $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$
bzw. Dreiecks $A = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$.
Speziell: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

III) Spatprodukt

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Anwendung: Volumen des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten
Parallelepipeds (Spat) $V = [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$.
Speziell: $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar.

Mehrfache Produkte

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) \end{aligned}\right. \quad \text{(Zerlegungssatz)}$$

3.3.4 Kartesische Koordinatentransformationen

Ursprüngliches (x, y)-Koordinatensystems wird transformiert in (x', y')-Koordinatensystem. Bezeichnen die entsprechenden Koordinaten in den Systemen mit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

I. Parallelverschiebung des Koordinatensystems

Seien $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)^T$ Koordinaten des Koordinatenursprungs O' des x', y'-Systems bezüglich des x, y-Systems. Dann gilt:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}' \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{x}' = \vec{x} - \vec{x}_0.$$

II. Drehung des Koordinatensystems

Sei φ Drehwinkel:

$$\vec{x}' = A\vec{x} \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

bzw. die inverse Transformation

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{x}' \qquad \text{mit} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

III. Parallelverschiebung und Drehung

Ein x, y-Koordinatensystem wird um $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)^T$ in ein x', y'-Koordinatensystem verschoben und anschließend um den Winkel φ in ein x'', y''-Koordinatensystem gedreht. Man erhält für die Koordinaten $\vec{x}'' = (x'', y'')^T$

$$\vec{x}'' = A(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

oder in Koordinatenschreibweise

$$\begin{aligned} x'' &= (x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi \\ y'' &= -(x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi \end{aligned}$$

3.3.5 Geraden und Ebenen

I a) Geraden im Raum

Gegeben Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ (fest) und $P(x, y, z)$ (beliebig) und Richtung $\vec{a}$ der Geraden g: Bezeichnen $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP}_1$, $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{(Parametergleichung).} \tag{6}$$

Abstand d zwischen einem Punkt Q und der Geraden g:

$$d = \frac{|(\vec{r}_Q - \vec{r}_1) \times \vec{a}|}{|\vec{a}|} \qquad \text{mit } \vec{r}_Q = \overrightarrow{OQ}\,. \tag{7}$$

Lage zweier Geraden: $g_1: \ \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a}_1, \quad g_2: \ \vec{r} = \vec{r}_2 + s\vec{a}_2, \ s, t \in \mathbb{R}$

- gleich: > 1 Schnittpunkt
- einziger Schnittpunkt
  (Schnittwinkel = Winkel zwischen $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$)
- parallel
- windschief

$\left.\begin{array}{l}\text{parallel}\\ \text{windschief}\end{array}\right\}$ kein Schnittpunkt $\begin{array}{l}\nearrow \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \ \Leftrightarrow \ \vec{a}_1 = \lambda\vec{a}_2\\ \searrow \text{sonst}\end{array}$

I b) Geraden in der Ebene

Gegeben Gerade g mit Punkten $P(x, y) \in g$:

$$Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 > 0) \qquad \text{(implizite Gleichung).}$$

Falls $B \neq 0 \Longrightarrow$

$$y = mx + b \qquad \text{(explizite Gleichung),}$$

wobei m *Anstieg* und b Schnittpunkt mit y-Achse der Geraden g.
Falls $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) \in g$ (feste Punkte):

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{(Zweipunkte-Gleichung).}$$

Falls $\vec{n}^0 = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ (normierter *Normalenvektor*) :

$$\vec{n}^0 \cdot \vec{r} = p \qquad \text{(Hessesche Normalform)}$$

mit p Abstand vom Ursprung 0 bzw. in Koordinatenschreibweise

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0.$$

II) Ebenen

Gegeben Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ (fest) und $P(x, y, z)$ (beliebig) und Richtungsvektoren $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ in der Ebene E: Bezeichnen $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + s\vec{a} + t\vec{b}, \quad s, t \in \mathbb{R} \qquad \text{(Parametergleichung).} \tag{8}$$

Sei $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = (A, B, C)^T$ (*Normalenvektor* der Ebene) und $\vec{n}^0 = \dfrac{\vec{n}}{\pm|\vec{n}|}$ (*normierter* Normalenvektor) $\Longrightarrow$

$$\vec{r} \cdot \vec{n}^0 - p = 0 \qquad \textit{(Hessesche Normalform)}, \tag{9}$$

mit $p = \dfrac{\vec{r}_1 \cdot \vec{n}}{\pm|\vec{n}|} = \dfrac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ bzw. in Koordinatenschreibweise

$$\frac{Ax + By + Cz - D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0,$$

wobei *Vorzeichen* $\pm$ so gewählt wird, daß $p \geq 0$ ($p =$*Abstand* vom Koordinatenursprung).

Abstand d eines Punktes $P_0(x_0, y_0, z_0)$ von Ebene E:
Bezeichnen $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$

$$d = \left|\vec{r}_0 \cdot \vec{n}^0 - p\right|. \tag{10}$$

Lage zweier Ebenen:
$E_1 : \; A_1x + B_1y + C_1z = D_1$
$E_2 : \; A_2x + B_2y + C_2z = D_2$
$\Longrightarrow$ Lösen des Gleichungssystems

- gleich: Lösung mit 2 Parametern
- Schnitt in einer Geraden: Lösung mit 1 Parameter
  (Schnittwinkel = Winkel zwischen Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$)
- parallel: keine Lösung

3.3.6 Kurven und Flächen 2. Ordnung

A) In der Ebene

Gleichung mit 2 Unbekannten $F(x, y) = 0$ beschreibt **Kurve**.

1. $Ax + By + C = 0$: Gerade (siehe oben)
2. $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
: Kurve 2. Ordnung (Kegelschnitte)

Dabei gilt

$$\delta := AC - B^2 = \begin{cases} > 0 & \text{für Ellipsen} \\ = 0 & \text{für Parabeln} \\ < 0 & \text{für Hyperbeln} \end{cases}$$

Falls sich der Kegelschnitt *nicht* in achsenparalleler Lage ($B = 0$) befindet, kann das gemischt-quadratische Glied durch eine Drehung des Koordinatensystems zum Verschwinden gebracht werden. Der entsprechende Drehwinkel φ ergibt sich aus

$$\tan 2\varphi = \frac{2B}{A - C}$$

Die linearen Glieder können danach durch eine Parallelverschiebung (mittels quadratischer Ergänzung) eliminiert werden und man erhält die *kanonische* Gleichung des Kegelschnitts, d.h. die Normalform in Mittelpunktslage.

B) Im Raum

Gleichung mit 3 Unbekannten $F(x, y, z) = 0$ beschreibt **Fläche**.

1.	$Ax + By + Cz + D = 0$	Ebene (siehe oben)
2.	x, y, z quadratisch	Fläche 2. Ordnung

3.3.7. Vektorielle analytische Geometrie der Ebene und des Raumes

3.3.7.1. Wiederholung Zahlen und Körper:

„Was ist eine Zahl?“ – In der Schule lernt man gewisse Mengen von Zahlen kennen.

N={0,1,2,3,…} Menge der natürlichen Zahlen

Z={…,-2,-1,0,1,2,…} Menge der ganzen Zahlen

Q={p/q | p,q∈Z,q≠0} Menge der rationalen Zahlen (Brüche)

I=Menge der irrationalen Zahlen, z.B. $\sqrt{2}$

R=**Q**∪**I** Menge der reellen Zahlen

C={a+i∗b | a,b∈R mit $i^2=-1$} Menge der komplexen Zahlen

Ferner haben wir in der Schule gelernt, innerhalb gewisser dieser Zahlenbereiche zu rechnen. Eine Auswahl der „Rechengesetze“ ist folgende:

Es sei **F** eine der Mengen **Q**, **R**, **C**. Dann gilt

F_1: Rechengesetz: zu bel. a,b∈**F** gibt es genau ein Element „a+b“ in **F**,
genannt Summe von a und b, d.h. a+b∈**F**.

F_2: (a+b)+c=a+(b+c) Assoziativgesetz der Addition

F_3: Es gibt genau eine Zahl „0“ (Null), so dass gilt: a+0=a ∀a∈**F**.

F_4: Zu jedem a∈F gibt es genau ein Element „-a“, so dass a+(-a)=0 gilt.
Es ist üblich a+(-b)=a-b zu schreiben.

F_5: a+b=b+a Kommutativgesetz der Addition

F_6: zu bel. a,b∈**F** gibt es genau ein Element „a∗b“ genannt: das „Produkt“ aus a und b

F_7: (a∗b)∗c=a∗(b∗c) Assoziativgesetz der Multiplikation

F_8: Es gibt genau eine Zahl „1“ (Eins), so dass gilt: a∗1=1∗a ∀a∈**F** und es ist 0≠1.

F_9: Für jedes a∈**F**, a≠0, gibt es genau ein Element „a^{-1}“, so dass $a*a^{-1}= a^{-1}*a=1$ gilt.

F_{10}: a∗b=b∗a Kommutativgesetz der Multiplikation

F_{11}: a∗ (b+c)=a∗b+a∗c Distributivgesetz

Damit sind alle in der Schule jemals benutzten Rechengesetze erfaßt, außer Logarithmieren, Potenzieren und Radizieren.

Def.1: Ist F eine nichtleere Menge mathematischer Objekte (mit wenigstens 2 Elementen), für die zwei Zusammensetzungsvorschriften F_1 (Addition) und F_6 (Multiplikation) solcherart erklärt sind, dass die Gesetze F2, …, F5, F7, …, F11 erfüllt sind, dann heißt die Menge F zusammen mit den Operationen + und ∗ und diesen erfüllten Gesetzen „ein Körper“.

Zeichen: (**F**,+,∗), z.B. **Q**, **R** und **C**.

Bemerkungen:

1) Der Begriff „Körper“ ist sinnvoll, denn in **Q**, **R** und **C** sind uns Körper aus unserer mathematischen Erfahrung her bekannt.

2) Unterscheide Menge **F** und Körper **F**.

3) Wegen F_3 und F_8 besteht jeder Körper aus mindestens zwei verschiedenen Elementen 0 und 1.

4) Gelten alle Gesetze außer F_9, dann liegt ein „Ring mit Einselement“ vor: z.B. **Z**, **Q**, **R**, **C**.

5) Gelten alle Gesetze außer F_{10}, dann liegt ein „Schiefkörper“ vor.

6) Gelten alle Gesetze außer F_8 und F_9, dann liegt ein „Ring“ vor (ohne Einselement).

Beisp. Menge der geraden Zahlen {…, -2, 0, 2, 4, …}

7) Weiteres über Körper und Ring später

8) Antwort auf die Frage **„Was ist eine Zahl?“** lautet:

Die Elemente eines Körpers werden Zahlen genannt!

Wichtig: primärer Begriff: Körper, sekundärer Begriff: Zahl

Auch die Elemente von Ringen und Schiefkörpern werden Zahlen genannt (Zahl=Skalar)

Obwohl **N**={0, 1, 2, …} kein Körper im Sinne der Def. 1 ist, werden auch hier die Elemente als Zahlen (natürliche Zahlen) bezeichnet.

Vorkommen des Begriffes Körper im Alltag:

Mathematik: Körper: Menge von Zahlen mir einer definierten algebraischen Struktur

Geometrie: Körper: 3D-Objekt mit einer bestimmten geometrischen Struktur

Biologie: Körper: „Menge von Zellen“ mit einer bestimmten biologischen Struktur

Rechtsbegriff: „Körperschaft des öffentlichen Rechts“, z.B. „Menge von Studenten an einer BA“ mit einer bestimmten Rechtstruktur (Immatrikulationsordnung, Prüfungsordnung, …)

Beisp.: Der kleinstmögliche Körper besteht nur aus diesen beiden notwendig existierenden Elementen: N-Nullelement, E-Einselement, d.h. **F**={N, E}. Man konstruiere seine Addition und Multiplikation (Angabe als Tabelle):

+	N	E
N	N	E
E	E	N

∗	N	E
N	N	N
E	N	E

indir. Beweis: Angenommen E+E=E, dann (E+E)+(-E)=E+(-E), mit F2 dann E+(E+(-E))=E+(-E), mit F_4 dann E+N=N und mit F_3 dann E=N, Widerspruch, also E+E=N.

Weiter direkter Beweis für N∗N: sei N∗N=M, mit F_4 dann N∗(E+(-E))=M, mit F_{11} dann N∗E+N∗(-E)=M, mit F_8 dann N+N=M, mit F_3 dann N=M, also N∗N=N.

3.3.7.2. Wiederholung Vektoren und Vektorräume:

Es wird zunächst eine dem Körper entsprechende neue Struktur „**Vektorraum**" bereitgestellt, um den Begriff „**Vektor**" definieren zu können.

A^n sei ein n-dimensionaler Raum (n=1,2,3,…)

n=1: (eine) Gerade, n=2: (eine) Ebene, n=3: (der) Raum,

Der „Punkt" ist das einfachste geometrische Gebilde des A^n. Die nächstkomplizierte Figur ist das „Punktepaar" (zunächst ungeordnete Menge aus zwei Punkten {A,B}).

Def. 2: Ein **geordnetes Punktepaar** oder kurz ein **Pfeil** ist ein Punktepaar, in dem einer der beiden Punkte als erster oder **Anfangspunkt A**, der andere als zweiter oder **Endpunkt B** bezeichnet wird. Zeichen: $\overrightarrow{AB} \equiv \overleftarrow{BA} \equiv (A,B)$, A=B zugelassen.

Aus jedem Punktepaar {A,B} mit A≠B lassen sich zwei Pfeile herstellen. Ein Pfeil $\overrightarrow{AA}$ heißt ein **Nullpfeil**.

Def. 3: Zwei Pfeile $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{PQ}$ heißen **äquivalent**, wenn es eine Parallelverschiebung gibt, bei der der Anfangspunkt von $\overrightarrow{AB}$ in den Anfangspunkt von $\overrightarrow{PQ}$ und zugleich der Endpunkt von $\overrightarrow{AB}$ in den Endpunkt von $\overrightarrow{PQ}$ übergeht. Insbesondere soll jeder Pfeil zu sich selbst äquivalent sein. Zeichen: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{PQ}$ für äquivalente Pfeile.

Def. 4: **Äquivalenzrelation** in der Menge der Pfeile des A^n, d.h. es gilt:

1. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$ - Reflexivität
2. $(\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{PQ}) \Rightarrow (\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{AB})$ - Symmetrie
3. $((\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{PQ}) \wedge (\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{UV})) \Rightarrow (\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{UV})$ - Transitivität

Diese Pfeile nennen wir (gleich) Vektoren (sie sind eine „Sorte" von Vektoren).

O sei ein bel. Punkt aus dem A^n. Ist $p = \overrightarrow{OP}$, dann heiße $\overline{OP} =: ||p||$ die Länge, der Betrag oder die **Norm** von p. Insbesondere $\overline{OO} = ||o|| = 0$ (Zahl Null), aber deswegen heißt *o* <u>nicht</u> Nullvektor!

Es sei $\mathbf{V^n}$ die Menge aller Pfeile des A^n mit dem Anfangspunkt O und sei $\overrightarrow{OA}=a$, $\overrightarrow{OB}=b$, …,

insbesondere $\overrightarrow{OO}=o$.

In $\mathbf{V^n}$ mögen folgende Sachverhalte gelten:

V_1: Vektoraddition: $a,b \in \mathbf{V^n}$, d.h. $(a,b) \in \mathbf{V^n} \times \mathbf{V^n}$,

und $a+b \in \mathbf{V^n}$ sei eine Abbildung $\mathbf{V^n} \times \mathbf{V^n} \to \mathbf{V^n}$ bzgl. der Operation +

Mit den Pfeilen: $a=\overrightarrow{OA}$, $b=\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ (Skizze!)

V_6: skalare Multiplikation: eine Abbildung $\mathbf{R} \times \mathbf{V^n} \to \mathbf{V^n}$ bzgl. der Operation $*$

wie folgt: $r \in \mathbf{R}$, $r \neq 0$, $a \in \mathbf{V^n}$, dann sei $r*a \in \mathbf{V^n}$ und es gelte $||r*a|| = |r| * ||a||$

Mit den Pfeilen: r>1: Streckung, 0<r<1: Stauchung, r<0: Richtungsänderung (Skizze!)

Jetzt allgemeiner:

Gegeben seien eine nichtleere Menge **V** mathematischer Objekte und ein (Zahlen-)Körper **F**

V_1: Vektoraddition: zu beliebigen $a,b\in\mathbf{V}$, d.h. $(a,b)\in\mathbf{V}\times\mathbf{V}$, gibt es genau ein Element in **V**, das die Summe von a und b genannt wird und mit $a+b\in\mathbf{V}$ bezeichnet wird. Das ist eine Abbildung $\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ bzgl. der Operation +

V_2: Assoziativgesetz der Vektoraddition: $a+(b+c)=(a+b)+c$

V_3: Es gibt genau ein Element, das wir mit o (Nullvektor) bezeichnen, so dass gilt: $a+o=a,\ \forall a\in\mathbf{V}$

V_4: Zu jedem Element $a\in\mathbf{V}$ gibt es genau ein Element „$-a$ „ in **V**, so dass $a+(-a)=o$ gilt. Es ist üblich, $a+(-b)=a-b$ zu schreiben.

V_5: Kommutativgesetz der Vektoraddition: $a+b=b+a$

V_6: Zu jedem $\mathrm{r}\in\mathbf{F}$ und jedem $a\in\mathbf{V}$ gibt es genau ein Element aus **V**, das das skalare Produkt oder geometrische Vielfachheit von a mit r genannt und mit $\mathrm{r}*a\in\mathbf{V}$ bezeichnet wird.

V_7: Assoziativgesetz der skalaren Multiplikation: $\mathrm{r}*(\mathrm{s}*b)=(\mathrm{r}*\mathrm{s})*b,\ \forall \mathrm{r},\mathrm{s}\in\mathbf{F},\ b\in\mathbf{V}$

Bem.: Operationszeichen $*$ für skalare Produkt $\mathrm{s}*b$, * für die Zahlenmultiplikation r*s

V_8: Distributivgesetz bzgl. der Vektoraddition: $\mathrm{r}*(a+b)=\mathrm{r}*a+\mathrm{r}*b$

V_9: Distributivgesetz bzgl. der Zahlenaddition: $(\mathrm{r}+\mathrm{s})*a=\mathrm{r}*a+\mathrm{s}*a$

V_{10}: Für $1\in\mathbf{F}$, $\forall a\in\mathbf{V}$ gilt: $1*a=a$

Bem.:

1) Wegen V_3 heißt der Nullvektor o Nullvektor

(In V^n gilt $\|o\|=0$ – nicht notwendig ein Kennzeichen für den Nullvektor.)

2) In V_9 stehen zwei unterschiedliche Pluszeichen: Zahlenaddition und Vektoraddition

Def.4: Es seien **F** ein Körper und **V** eine nichtleere Menge mathematischer Objekte, für die eine Addition $\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ gemäß V_1 und eine skalare (geometrische) Multiplikation $\mathbf{F}\times\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ gemäß V_6 erklärt sind, wobei die Gesetze (Axiome) $V_2, \ldots, V_5, V_7, \ldots, V_{10}$ erfüllt seien. Dann heißt **V** (zusammen mit V_1 und V_6) ein **Vektorraum über dem Körper F** (**F** heißt der Grundkörper dieses Vektorraumes), andere Sprechweise: **linearer Raum**

Beispiele: 1) V^1 über **R**, 2) V^2 über **R**, 3) V^3 über **R**, 4) **C** über **R**

5) Satz: Jeder Körper ist ein Vektorraum (VR) mit sich selbst als Grundkörper

6) Der Körper der reellen Zahlen **R** ist ein VR über dem Körper der rationalen Zahlen **Q**.

7) Die reellwertigen Funktionen, die (zweimal stetig differenzierbar sind und) die Differenzialgleichung y“+y=0 erfüllen, bilden einen VR über **R** (Basis: y=sin(x), y=cos(x))

Antwort auf die Frage „Was ist ein Vektor?“ lautet: „Ein VR-Element wird Vektor genannt.“

Def.4a: Gibt es eine Abbildung $\mathbf{V}\to\mathbf{R}^+$ mit $a\in\mathbf{V}\to||a||\in\mathbf{R}^+$ mit den Eigenschaften

1) $||a||=0$ für $a=o$ 2) $||a||>0$ für $a\neq o$ 3) $||a+b||\leq||a||+||b||$,

dann heißt der VR ein **normierter Raum**, die Abbildung selbst eine **Norm**.

3.3.7.3. Gruppen:

a) Körper bzgl. seiner Addition

b) Körper bzgl. seiner Multiplikation

c) VR bzgl. seiner Addition

Es sei **G** eine nichtleere Menge mathematischer Objekte, und es gelte:

G_1: zu bel. a,b∈**G** gibt es genau ein Element aus **G**, das das **Produkt** (in gewissen Fällen die **Summe**) von a und b heißt und mit $a\circ b\in\mathbf{G}$ bezeichnet wird:

Abbildung $\mathbf{G}\times\mathbf{G}\to\mathbf{G}$ bzgl. der Operation ∘ (Operation „Kringel")

G_2: Assoziativgesetz bzgl. der Gruppenmultiplikation: $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$

G_3: Es gibt genau ein Element e, das sogen. **neutrale Element** oder **Einselement** (Einheitselement oder Einheit), so dass gilt: $a\circ e=e\circ a=a\ \ \forall a\in\mathbf{G}$

G_4: Zu jedem Element a∈**G** gibt es genau ein Element „a^{-1}", das sogen. **inverse Element** oder kurz **Inverse** von a, so dass gilt: $a\circ a^{-1} = a^{-1}\circ a=e$

Def.5: Die so mit einer algebraischen Struktur G_1 bis G_4 versehene Menge **G** heißt eine **Gruppe** (**G**, ∘) oder **G**. (nur G_1, G_2: **Halbgruppe** (**H**, ∘), mit G_3: **Monoid**)

Beispiele:

1) (**Z**,+) ganze Zahlen bilden bzgl. der Addition eine Gruppe

2) (**Q**,+) , 3) (**Q**\{0},*), 4) (**R**,+), 5) (**R**\{0},*), 6) (**C**,+), 7) (**C**\{0},*),

8) **F** sei ein bel. Körper (0 sei seine Null), dann sind (**F**,+) und (**F**\{0},*) Gruppen

9) VR bzgl. seiner Addition

Def.6: Gilt in einer Gruppe stets $a\circ b=b\circ a$, dann heißt die Gruppe **kommutativ** oder **abelsch**.
(N.H.Abel 1802-1829, norwegischer Mathematiker)
(Begründer der Gruppentheorie: E.Galois, 1811-1832, französischer Mathematiker)

3.3.7.4. Euklidischer Vektorraum:

Def.7: Ein reeller VR (VR über dem Grundkörper **R**), in dem zusätzlich ein inneres Produkt (Skalarprodukt, neben der skalaren Multiplikation) definiert ist, heißt ein **euklidischer VR**.

Def.8: Ein euklidischer VR, in dem zusätzlich eine Norm definiert ist mit $||a||^2 = a\circ a$ heißt ein **Hilbertraum**. (D.Hilbert, 1862-1943, deutscher Mathematiker)

HTW Dresden
Fak. Informatik/Mathematik
Prof. Dr. L. Paditz

11.10.2010

3.3.8 Merkblatt zur eindeutigen Beschreibung der Mehrdeutigkeit bei komplexen Zahlen

1. Haupt- und Nebenargumente: (Empfohlen wird die Angabe als dimensionslose Größe im Bogenmaß.)
per DIN-Empfehlung gilt: $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ (Hauptargument) und somit $\arg_k(z) := \arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ (Nebenargumente), $\arg(z) := \arg_o(z)$. ($\mathbf{Z}=\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ ... Menge der ganzen Zahlen)

2. n-te Wurzeln ($n \in \mathbf{N}$ und $n \geq 2$) als Umkehrung von $w = z^n$:
Beim Potenzieren ($w = z^n$) wird von der Zerlegung der z-Ebene in n Winkelräume ausgegangen:

$\mathrm{D}_k := \left\{ z \,\middle|\, \dfrac{-\pi + 2k\pi}{n} < \varphi \leq \dfrac{\pi + 2k\pi}{n} \right\}$ mit $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. (D_o liegt symmetrisch um die positive Re-Achse.)

Jeder Winkelraum geht beim Potenzieren ($w = z^n$) in eine volle Gauß'sche Zahlenebene über. Man sagt deshalb, D_k wird im k-ten Blatt der n-blättrigen Riemann'schen Fläche f_n abgebildet.

Umgekehrt: $w \in k$-tes Blatt von $f_n \Longrightarrow z_k = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|} \cdot \exp\left\{ j \dfrac{\arg(w) + 2k\pi}{n} \right\} \in \mathrm{D}_k$ für $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

z_o ist die Hauptwurzel, die stets in D_o liegt. Damit ist z.B. $\sqrt[3]{-8} = -2$ eine Nebenwurzel.

3. Logarithmen als Umkehrung von $w = e^z$:
Beim Potenzieren $\left(w = e^z = e^{\mathrm{Re}(z) + j\mathrm{Im}(z)} = e^{\mathrm{Re}(z)} \cdot e^{j\mathrm{Im}(z)} \right)$ ist $\mathrm{Im}(z)$ das Argument φ der Zahl e^z, d.h., eine Veränderung von $\mathrm{Im}(z)$ mit $\pm 2k\pi$, $k \in \mathbf{N}$, wirkt sich auf e^z nicht aus ("Periodizität" der komplexen e-Funktion).
Deshalb: Veranschaulichung durch die Zerlegung der z-Ebene in (unendlich viele) Parallelstreifen

$\mathrm{D}_k := \{ z \mid -\pi + 2k\pi < \mathrm{Im}(z) \leq \pi + 2k\pi \}$, $k \in \mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$.

(Bem.: D_o liegt symmetrisch um die Re-Achse.)
Jeder Parallelstreifen geht beim Potenzieren ($w = e^z$) in eine volle Gauß'sche Zahlenebene über. Man sagt deshalb, D_k wird im k-ten Blatt der ∞-blättrigen Riemann'schen Fläche f_∞ abgebildet.
Umgekehrt: $w \in k$-tes Blatt von $f_\infty \Longrightarrow z_k = \ln_k(w) = \ln|w| + j\arg(w) + 2k\pi j$, $k \in \mathbf{Z}$,
($z_o = \ln|w| + j\arg(w) =: \ln(w)$ ... Hauptwert)

4. Allgemeine Potenz $z_1^{z_2}$:

per Definition ist $z_1^{z_2} := \left(e^{\ln_k(z_1)} \right)^{z_2} = e^{z_2 \ln_k(z_1)} = \exp\{ z_2 (\ln|z_1| + j\arg(z_1) + 2k\pi j) \}$, $k \in \mathbf{Z}$,

d.h., $z_1^{z_2}$ ist unendlich vieldeutig (k ... Blattnummer). Hauptwert erhält man wieder für $k = 0$.

5. Beispiel:
Man berechne $w = (1+j)^{2-3j}$ und gebe $\mathrm{Re}(w)$, $\mathrm{Im}(w)$, $|w|$ und $\arg(w)$ sowie $\arg_l(w)$ im $k-$ten Blatt von f_∞ an!
Lösung: $w = (1+j)^{2-3j} =$
$\exp\{(2-3j)\ln_k(1+j)\} = \exp\{(2-3j)(\ln\sqrt{2} + j\frac{\pi}{4} + 2k\pi j)\} = 2e^{3\pi/4 + 6k\pi}(\cos(0,169\pi) + j\sin(0,169\pi))$, $k \in \mathbf{Z}$.
Hieraus erhält man im k-ten Blatt den Potenzwert $w = w_k$ mit
$\mathrm{Re}(w_k) = 2e^{3\pi/4 + 6k\pi}\cos(\pi/2 + 4k\pi - 3\ln\sqrt{2}) = 2e^{3\pi/4 + 6k\pi}\cos(0,169\pi)$,
$\mathrm{Im}(w_k) = 2e^{3\pi/4 + 6k\pi}\sin(\pi/2 + 4k\pi - 3\ln\sqrt{2}) = 2e^{3\pi/4 + 6k\pi}\sin(0,169\pi)$,
$|w_k| = 2e^{3\pi/4 + 6k\pi}$ und $\arg_l(w_k) = \pi/2 - 3\ln\sqrt{2} + 2l\pi$, $l \in \mathbf{Z}$.
Wegen des variablen l in $2l\pi$ muß hier der vorhandene Summand $4k\pi$ nicht extra ausgewiesen werden, d.h., in diesem Beispiel hat die Blattnummer k hat nur Einfluß auf den Betrag von w.
Für das Hauptargument muß $l \in \mathbf{Z}$ so gewählt werden, daß

$\arg(w) = \pi/2 - 3\ln\sqrt{2} + 2l\pi$ mit $\pi/2 - 3\ln\sqrt{2} + 2l\pi \in (-\pi, \pi]$ gilt.
Als Hauptwert der Potenz erhält man schließlich (für $k = 0$):
$w = w_o = 18,195 + 10,687j = 21,101(\cos(30,43^o) + j\sin(30,43^o)) = 21,101(\cos(0,169\pi) + j\sin(0,169\pi))$.

3.3.9 Solution of Linear Equation Systems with Parameters

cp. http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/Paditz_Beitrag_CEJ_2006.pdf

(bearbeitet 31.10.2021, Ludwig Paditz)

3x+2y+t*z=0⇒equ1

$$t\cdot z+3\cdot x+2\cdot y=0$$

0x+1y−4z=−1⇒equ2

$$y-4\cdot z=-1$$

1x+3y+0z=1⇒equ3

$$x+3\cdot y=1$$

−1x+0y+2z=1⇒equ4

$$-x+2\cdot z=1$$

$$\begin{cases}\text{equ1}\\\text{equ2}\\\text{equ3}\\\text{equ4}\end{cases}\Bigg|_{x,y,z,u}$$

$$\left\{x=\frac{4\cdot t+8}{t-28},y=\frac{-(t+12)}{t-28},z=\frac{-10}{t-28},u=u\right\}$$

What happens with t=28?

$$\begin{cases}\text{equ4}\\\text{equ2}\\\text{equ1}\\\text{equ3}\end{cases}\Bigg|_{x,y,z,u}$$

$$\left\{x=\frac{-(t+4)}{t+14}, y=\frac{-(t-6)}{t+14}, z=\frac{5}{t+14}, u=u\right\}$$

What happens with t=−14?

$$\left.\begin{cases} equ4 \\ equ2 \\ equ3 \\ equ1 \end{cases}\right|_{x,y,z,u}$$

$$\left\{x=-\frac{2}{7}, y=\frac{3}{7}, z=\frac{5}{14}, u=u\right\}$$

Here it seems for all t we get an unique solution (and parameter t disappears?)?

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & t & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow mat$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & t & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ref(mat)

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{t}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-t}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3\cdot t+14} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Here it seems we have to study the special case t=−3/14?

rref(mat)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Here it seems the parameter t is without meaning (t disappears?)?

But in case t=0:

ref(mat|t=0)

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rref(mat|t=0)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rank(mat)

4

rank(mat|t=0)

3

The rank-function can't compute the rank in dependence on the parameter t!

If we use the "ref" or "rref" or "rank" functions the CP should give a message "no solution with parameters" (cp TI-Nspire CAS, OS 1.6)

another exercise with complex numbers:

$$\begin{bmatrix} j & 2 & t & 3+2j \\ 0 & 1 & 2j & 1+j \\ s & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{mat}$$

$$\begin{bmatrix} j & 2 & t & 3+2\cdot j \\ 0 & 1 & 2\cdot j & 1+j \\ s & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

rank(mat)

3

rank(mat|s=$-j$ and t=$-4+4j$)

2

Again, the rank is depending on the parameters s and t

The exchange procedure:
========================

DelVar $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \beta_1, \beta_2, x_1, x_2, t$

done

start with following system:

$\mathbf{x_1 \times a_{11} + x_2 \times a_{12} = \beta_1}$ (1)

$\mathbf{x_1 \times a_{21} + x_2 \times a_{22} = \beta_2}$ (2)

let be $a_{11} \neq 0$ (pivot element)

equivalent system:

$\mathbf{y_1=0=x_1 \times a_{11}+x_2 \times a_{12}-\beta_1} \times 1$ (3)

$\mathbf{y_2=0=x_1 \times a_{12}+x_2 \times a_{22}-\beta_2} \times 1$ (4)

solve$(y_1=x_1 \times a_{11}+x_2 \times a_{12}-\beta_1 \times 1, x_1)$

$$\left\{x_1=\frac{-a_{12} \cdot x_2}{a_{11}}+\frac{\beta_1}{a_{11}}+\frac{y_1}{a_{11}}\right\}$$

expand$\left(y_2=x_1 \times a_{21}+x_2 \times a_{22}-\beta_2 \times 1 \mid x_1=\frac{-a_{12} \cdot x_2}{a_{11}}+\frac{\beta_1}{a_{11}}+\frac{y_1}{a_{11}}\right)$

$$y_2=\frac{-a_{12} \cdot a_{21} \cdot x_2}{a_{11}}+a_{22} \cdot x_2+\frac{\beta_1 \cdot a_{21}}{a_{11}}-\beta_2+\frac{a_{21} \cdot y_1}{a_{11}}$$

new equivalent system:

$$x_1= \frac{1}{a_{11}} \cdot y_1 \quad + \quad \frac{a_{12}}{-a_{11}} \cdot x_2 \quad + \quad \frac{-\beta_1}{-a_{11}} \cdot 1 \quad (5)$$

$$y_2= \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot y_1 + \left(a_{22}+a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{-a_{11}}\right) \cdot x_2 + \left(-\beta_2+a_{12} \cdot \frac{-\beta_1}{-a_{11}}\right) \cdot 1 \quad (6)$$

write (3), (4) in a table **ST** with matrix **matST:**

ST	x_1	x_2	1
y_1 |	$\mathbf{a_{11}}$	a_{12}	$-\beta_1$
y_2 |	a_{21}	a_{22}	$-\beta_2$
K	*	$\frac{a_{12}}{-a_{11}}$	$\frac{-\beta_1}{-a_{11}}$

K is the bottom (a help row, put * in the pivot column and divide by −pivot otherwise.)

where **matST**$=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & -\beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & -\beta_2 \end{bmatrix}$ − in matST are all informations on the system.

write (5), (6) in a table **T1** with matrix **matT1**
(an equivalent system, exchange $y_1 \Leftrightarrow x_1$)

T1	y_1	x_2	1	
x_1	$\frac{1}{a_{11}}$	$\frac{a_{12}}{-a_{11}}$	$\frac{-\beta_1}{-a_{11}}$	using inverse value and K row respectively
y_2	$\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$\mathbf{a_{22}+a_{12}}\cdot\frac{a_{21}}{-a_{11}}$	$-\beta_2+a_{12}\cdot\frac{-\beta_1}{-a_{11}}$	division by pivot (old pivot column) and "triangular rule" respectively

delete y_1 column (because $y_1=0$)

T1	y_1	x_2	1
x_1	■	$\frac{a_{12}}{-a_{11}}$	$\frac{-\beta_1}{-a_{11}}$
y_2	■	$\mathbf{a_{22}+a_{12}}\cdot\frac{a_{21}}{-a_{11}}$	$-\beta_2+a_{12}\cdot\frac{-\beta_1}{-a_{11}}$

with **matT1**$=\begin{bmatrix} \frac{a_{12}}{-a_{11}} & \frac{-\beta_1}{-a_{11}} \\ a_{22}+a_{12}\cdot\frac{a_{21}}{-a_{11}} & -\beta_2+a_{12}\cdot\frac{-\beta_1}{-a_{11}} \end{bmatrix}$

in matT1 are all informations on the system.

The next pivot element could be $a_{22}+a_{12}\cdot\frac{a_{21}}{-a_{11}}$ ($\neq 0$) to exchange $y_2 \Leftrightarrow x_2$

Thus we get (if exchange $y_2 \Leftrightarrow x_2$ possible)

T2=ET		y_1	y_2	1	
x_1	|	■	■	□	
x_2	|	■	■	□	unique solution

If $a_{22}+a_{12}\cdot\frac{a_{21}}{-a_{11}}=0$ than T1=ET (end table with followig decisions):

T1=ET		y_1	$x_2=t$	1	
x_1	|	■	□	□	
y_2	|	■	0	[0]	non-unique solution (with parameter t)

T1=ET		y_1	$x_2=t$	1	
x_1	|	■	□	□	
y_2	|	■	0	[$\neq$0]	(no solution, contradiction in the y-row $y\neq 0$)

stop

Now using the new created functions LinEqSys and AVRank in Main-menu

(To use the LinEqSys and AVRank program in an eActivity the program must be stored in the Library-folder!)

ST	x_1	x_2	x_3	1	
y_1	$\mathbf{a_{11}}$	a_{12}	a_{13}	$-\beta_1$	pivot $\mathbf{a_{11} \neq 0}$ to
y_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$-\beta_2$	exchange $y_1 \Leftrightarrow x_1$
y_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	$-\beta_3$	
y_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	$-\beta_4$	

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & t & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{matST}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & t & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(matST, 1, 1)

done

syntax: LinEqSys(matrix, row index i of a_{ik}, column index k of a_{ik}), if a_{ik} pivot

matnew⇒matT1

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{-t}{3} & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ \frac{7}{3} & \frac{-t}{3} & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{t}{3}+2 & -1 \end{bmatrix}$$

T1	y_1	x_2	x_3	1	
x_1 |	■	□	□	□	
y_2 |	■	□	□	□	pivot $\mathbf{a_{22}\neq 0}$ to
y_3 |	■	□	□	□	exchange $y_2 \leftrightarrow x_2$
y_4 |	■	□	□	□	

LinEqSys(matT1,2,1)

done

matnew⇒matT2

$$\begin{bmatrix} \frac{-(t+8)}{3} & \frac{2}{3} \\ 4 & -1 \\ \frac{-(t-28)}{3} & -\frac{10}{3} \\ \frac{t+14}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

T2	y_1	y_2	x_3	1	
x_1 |	■	■	□	□	
x_2 |	■	■	□	□	
y_3 |	■	■	□	□	pivot $\mathbf{a_{33}\neq 0}$ to
y_4 |	■	■	□	□	exchange $y_3 \leftrightarrow x_3$ or
					pivot $\mathbf{a_{43}\neq 0}$ to

exchange $y_4 \leftrightarrow x_3$

If $t \neq 28$ than we have a third exchange-step $x_3 \leftrightarrow y_3$

LinEqSys(matT2, 3, 1)

done

matnew⇒matET

$$\begin{bmatrix} \frac{4\cdot(t+2)}{t-28} \\ \frac{-40}{t-28}-1 \\ \frac{-10}{t-28} \\ \frac{-5\cdot t}{t-28} \end{bmatrix}$$

T3=ET	y_1	y_2	y_3	1	
x_1 |	■	■	■	$\frac{4\cdot(t+2)}{t-28}$	
x_2 |	■	■	■	$\frac{-40}{t-28}-1$	
x_3 |	■	■	■	$\frac{-10}{t-28}$	
y_4 |	■	■	■	$\frac{-5\cdot t}{t-28}$	$y_4=0$, if $t=0$

matET is the solution, if the last element $\frac{-5\cdot t}{t-28}$ equals 0, i.e. $t=0$

matET|t=0

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} \\ \frac{5}{14} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Thus x=−2/7, y=3/7, z=5/14

If $t \neq 14$ than we have a third exchange-step $x_3 \Leftrightarrow y_4$

We start again with matST:

LinEqSys(matST, 1, 1)

done

LinEqSys(matnew, 2, 1)

done

LinEqSys(matnew, 4, 1)

done

matnew→matET

$$\begin{bmatrix} \frac{-(t+4)}{t+14} \\ \frac{20}{t+14}-1 \\ \frac{-5\cdot t}{t+14} \\ \frac{5}{t+14} \end{bmatrix}$$

T3=ET y_1 y_2 y_4 1

---

x_1	|	■	■	■	$\frac{-(t+4)}{t+14}$	
x_2	|	■	■	■	$\frac{20}{t+14}-1$	
y_3	|	■	■	■	$\frac{-5\cdot t}{t+14}$	$y_3=0$, if $t=0$
x_3	|	■	■	■	$\frac{5}{t+14}$	

----

matET is the solution, if the 3rd element y_3 equals 0, i.e. t=0

matET|t=0

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} \\ 0 \\ \frac{5}{14} \end{bmatrix}$$

Thus x=-2/7, y=3/7, z=5/14

stop

Remark: rank of matST is 3 for t=0 and 4 otherwise

AVRank(matST, 1, 1)

done

syntax:

AVRank(matrix, row index i of a_{ik}, column index k of a_{ik}), if a_{ik} pivot

The rank of a matrix is the number of possible exchange steps

matnew→matT1

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ \frac{7}{3} & \frac{-t}{3} & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{t}{3}+2 & -1 \end{bmatrix}$$

T1	y_1	x_2	x_3	1	
x_1	■	■	■	■	delete the old pivot row and pivot column
y_2	■	□	□	□	pivot $\mathbf{a_{11} \neq 0}$ to exchange $x_2 \leftrightarrow y_2$
y_3	■	□	□	□	
y_4	■	□	□	□	

AVRank(matT1, 1, 1)

done

matnew→matT2

$$\begin{bmatrix} \frac{-(t-28)}{3} & -\frac{10}{3} \\ \frac{t+14}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

T2	y_1	y_2	x_3	1	
x_1	■	■	■	■	
x_2	■	■	■	■	delete the old pivot

row and pivot column again

y_3 | ■ ■ □ □ pivot $\mathbf{a_{11}\neq 0}$ to

exchange $x_2 \Leftrightarrow y_2$

y_4 | ■ ■ □ □

If $t\neq 28$ we compute:

AVRank(matT2,1,1)

done

matnew⇒matT3

$$\left[\frac{-5\cdot t}{t-28}\right]$$

T3 y_1 y_2 x_3 1

----

x_1 | ■ ■ ■ ■

x_2 | ■ ■ ■ ■

y_3 | ■ ■ ■ ■ delete the old

pivot row and pivot column again

y_4 | ■ ■ ■ $\frac{-5\cdot t}{t-28}$

If $t\neq -14$ we compute:

AVRank(matT2,2,1)

done

matnew⇒matT3

$$\begin{bmatrix} \frac{-5\cdot t}{t+14} \end{bmatrix}$$

T3		y_1	y_2	x_3	1
x_1	|	■	■	■	■
x_2	|	■	■	■	■
y_3	|	■	■	■	$\frac{-5\cdot t}{t+14}$
y_4	|	■	■	■	■

delete the old pivot row and pivot column again

Thus we have 3 steps, i.e. rank equals 3, and for $t \neq 0$ we get rank equals 4

$$\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & t & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

4

The rank(matrix) function can not differ between 3 or 4 in dependence of parameter t.