# 2 Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer Variablen

## 2.1 Grenzwerte und Stetigkeit

### 2.1.1 Unendliche Zahlenfolgen

(Reelle Zahlen-)**Folge**: Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl $n$ eine reelle Zahl $a_n$ zuordnet.
Schreibweise: $(a_n) = a_1, a_2, \ldots$
Die Zuordnungsvorschrift $a_n = f(n)$ heißt *Bildungsgesetz* der Folge.

Eine reelle Zahl $g$ heißt **Grenzwert** oder Limes der Zahlenfolge $(a_n)$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0$ gibt, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - g| < \varepsilon$.
*Anmerkungen:*
1) Die Zahl $n_0$ ist abhängig von $\varepsilon$, d.h. $n_0 = n_0(\varepsilon)$.
2) Es läßt sich zeigen, daß eine Folge $(a_n)$ *höchstens* einen Grenzwert besitzt.

Eine Folge $(a_n)$ heißt

| | |
|---|---|
| **konvergent**: | Grenzwert $g \in \mathbb{R}$ von $(a_n)$ existiert. Schreibweise: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g}$ |
| **divergent**: | kein Grenzwert existiert |
| *beschränkt*: | $\exists K \in \mathbb{R} : \ \lvert a_n \rvert \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ |
| *monoton wachsend*: | $a_n \leq a_{n+1}, \quad \forall n \geq n_0$ |
| *monoton fallend*: | $a_n \geq a_{n+1}, \quad \forall n \geq n_0 \qquad (n_0 \in \mathbb{N}$ fest) |

Falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ist, spricht man auch von einem *uneigentlichen Grenzwert* und $(a_n)$ heißt *bestimmt* divergent.

Rechenregeln für *konvergente* Folgen

Aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ folgt:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b,$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab,$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$, wenn $b \neq 0;\ b_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ für $a_n \geq 0,\ \forall n \in N,\ a \geq 0$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\quad a \geq 0.$

Weiterhin gilt:
1) Falls $a_n \leq c_n \leq b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$
$\implies \lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$ (*Vergleichskriterium*)
2) Falls $(a_n)$ beschränkt und monoton (entweder fallend oder wachsend)
$\implies (a_n)$ konvergent.

### 2.1.2 Grenzwert einer Funktion

Eine Funktion $y = f(x)$ sei in einer Umgebung von $x_0$ definiert. Gilt für *jede* Folge $(x_n),\ x_n \in D(f),\ x_n \neq x_0$, die gegen $x_0$ konvergiert, stets $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$, so heißt $g$ **Grenzwert** von $y = f(x)$ für $x_n \to x_0$.
Schreibweise: $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g}$

Anmerkungen:
1) $y = f(x)$ braucht an der Stelle $x = x_0$ nicht definiert zu sein.
2) Gilt für jede von links (rechts) strebende Folge

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) =: \lim_{x\nearrow x_0} f(x) = g_l \quad \Big(\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) =: \lim_{x\searrow x_0} f(x) = g_r\Big),$$

heißt $g_l$ *linksseitiger* ($g_r$ *rechtsseitiger*) *Grenzwert* von $f(x)$ für $x \to x_0$.
3) $f(x)$ besitzt Grenzwert $g$ für $x \to x_0 \iff f(x)$ besitzt links- und rechtsseitigen Grenzwert für $x \to x_0$ *und* $g_r = g_l =: g$.

Strebt die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))$ für *jede* über alle Grenzen hinaus wachsende Zahlenfolge $(x_n),\ x_n \in D(f)$, gegen die Zahl $g$, so heißt $g$ *Grenzwert* der Funktion $f(x)$ für $x \to +\infty$.
Schreibweise: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = g$
*Analog*:
$x$-Werte kleiner als jede noch so kleine Zahl $(x \to -\infty)$:
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = g.$

Eine Funktion $g(x)$ heißt **Asymptote** einer gegebenen Funktion $f(x)$, wenn

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen

Voraussetzung: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ existieren $\Longrightarrow$

- $\lim\limits_{x\to x_0} [cf(x)] = c \lim\limits_{x\to x_0} f(x), \quad c \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \quad \left(g(x),\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0\right).$

Diese Regeln gelten analog für $x \to \pm\infty$ sowie einseitige Grenzwerte, falls die entsprechenden Grenzwerte existieren.

### 2.1.3 Stetigkeit einer Funktion

Eine Funktion $f(x)$ heißt **stetig** an der *Stelle* $x_0$, wenn der Grenzwert für $x \to x_0$ existiert und mit dem Funktionswert übereinstimmt, d.h.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

*Anmerkung:* Ersetzt man $x_n \to x_0$ durch $x_n \nearrow x_0$ (bzw. $x_n \searrow x_0$), nennt man $f(x)$ *linksseitig* (bzw. *rechtsseitig*) *stetig* in $x_0$.

Eine Funktion $f(x)$, die an der Stelle $x_0$ wenigstens eine der obigen Bedingungen nicht erfüllt, heißt dort *unstetig*.

Unstetigkeitsstellen

- 1. *Art*: $\exists \lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x),\ \lim\limits_{x\searrow x_0} f(x)$

*Insbesondere*

– Falls $\lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x) \neq \lim\limits_{x\searrow x_0} f(x)$ : **Sprungstelle**

– Falls $\lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x\searrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ : **Lücke**

- 2. *Art*: $\lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x)$ und/oder $\lim\limits_{x\searrow x_0} f(x)$ unendlich : **Pol**

Eine Funktion $y = f(x)$, die an *jeder* Stelle ihres Definitionsbereichs stetig ist (in Randpunkten entsprechend links- bzw. rechtsseitig stetig), heißt **stetige Funktion**.

**Satz:** Jede elementare Funktion ist stetig in ihrem Definitionsbereich.

### 2.1.4 Eigenschaften stetiger Funktionen

Falls $f(x),\ g(x)$ stetige Funktionen $\Longrightarrow$

$$f(x) \pm g(x);\ f(x)g(x);\ \frac{f(x)}{g(x)},\ (g(x) \neq 0);\ f(g(x));\ f^{-1}(x)$$

stetige Funktionen (im jeweiligen Definitionsbereich).

**Satz von Weierstraß:** Jede auf einem *abgeschlossenen* und *beschränkten* Intervall $[a, b]$ stetige Funktion $f(x)$ hat dort eine Stelle, wo der Funktionswert *maximal* ist, und eine Stelle, wo der Funktionswert *minimal* ist. Insbesondere ist $f(x)$ dann beschränkt auf $[a, b]$.

**Satz von Bolzano:** Sei $f(x)$ eine auf $[a, b]$ stetige Funktion und $v$ eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann existiert mindestens eine Stelle $u \in (a, b)$ mit $f(u) = v$.

*Speziell*: $f(a) \cdot f(b) < 0 \Longrightarrow f(x)$ besitzt mindestens eine *Nullstelle* $x_0 \in (a, b)$: $f(x_0) = 0$.

Bestimmung einer Nullstelle $x_0$ (Annahme: $f(a) < 0,\ f(b) > 0$)

A) Intervallschachtelung (*Bisektionsverfahren*):

**0)** Setzen $x_1 = a,\ x_2 = b$

**1)** Berechnen $x^* = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ **(I)**
$\Rightarrow f(x^*)$ berechnen
FALLS $f(x^*) = 0 \Rightarrow x_0 = x^*$ :ENDE
bzw. $|f(x^*)| < \varepsilon$ ($\varepsilon$ – vorgegebene Genauigkeit)
$\Rightarrow x_0 \approx x^*$ :ENDE
SONST $\Rightarrow$

**2)** FALLS $f(x^*) < 0$, setze $x_1 = x^* \Rightarrow$ **1)**
FALLS $f(x^*) > 0$, setze $x_2 = x^* \Rightarrow$ **1)**

B) Sekanten -Verfahren (*Regula falsi*):
Analog zu Algorithmus von A), wobei man statt **(I)** verwendet:

$$x^* = x_1 - f(x_1)\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \qquad \textbf{(II)}$$

## 2.2 Die Ableitung einer Funktion

### 2.2.1 Definition

Die Funktion $y = f(x)$ sei auf dem Intervall $I \in \mathbb{R}$ definiert und $x_0 \in I$. Man sagt, $f$ ist in $x_0$ **differenzierbar**, wenn der folgende Grenzwert existiert:

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Die Funktion $f$ ist *im Intervall $I$* differenzierbar, wenn $f'(x)$ in jedem Punkt $x \in I$ existiert. Die so erhaltene Funktion $f'(x)$ heißt **Ableitung** von $f(x)$. Schreibweise auch: $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{dy}{dx}$.

Den Übergang von $f(x)$ zu $f'(x)$ nennt man *differenzieren* oder *ableiten*.

<u>Ableitungen der Grundfunktionen $f(x)$</u>

| $f(x)$ | $f'(x)$ | Bemerkungen |
|---|---|---|
| $x^n$ | $n\, x^{n-1}$ | $n \in \mathbb{R}$ |
| $a^x$ | $a^x \ln a$ | $a > 0,\ a \neq 1$ |
| $\mathrm{e}^x$ | $\mathrm{e}^x$ | |
| $\ln x$ | $\dfrac{1}{x}$ | $x > 0$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | |
| $\tan x$ | $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ |
| $\arcsin x$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| $\arccos x$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| $\arctan x$ | $\dfrac{1}{1+x^2}$ | |
| $\sinh x$ | $\cosh x$ | |
| $\cosh x$ | $\sinh x$ | |

Gleichung der **Tangente** an der Stelle $x_0$ von $f(x)$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \tag{1}$$

Gleichung der *Normale* an der Stelle $x_0$ von $f(x)$:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

Falls $x = x(t)$ mit $t$ – Parameter (z.B. Zeit) (oder $x(\varphi)$, $\varphi$ – Winkel) wird die Ableitung in der Regel wie folgt bezeichnet:

$$\dot{x} := \frac{dx}{dt}$$

**Satz:** Jede *differenzierbare* Funktion $f$ in $x_0 \in I$ ist dort stetig.

### 2.2.2 Ableitungsregeln

Voraussetzung: Funktionen differenzierbar!

- Faktorregel: $y = C\,f(x) \implies y' = C\,f'(x)$
- Summenregel: $y = f_1(x) + f_2(x) \implies y' = f_1'(x) + f_2'(x)$
- *Produktregel*: $y = u(x) \cdot v(x) \implies y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
- *Quotientenregel*: $y = \dfrac{u(x)}{v(x)} \implies y' = \dfrac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$
- *Kettenregel*: $y = h(x) = f(g(x)) \implies y' = \dfrac{dh}{dx} = \dfrac{df(g)}{dg}\dfrac{dg(x)}{dx}$

*Anmerkung:* Summen-, Produkt- und Kettenregel lassen sich durch *wiederholte* Anwendung auf beliebige endliche Anzahl von Summanden, Faktoren bzw. zusammengesetzten Funktionen erweitern.

Spezielle Ableitungsverfahren

**I)** *Logarithmische Ableitung*

Sei $f(x) = [u(x)]^{v(x)}$, $\quad u(x) > 0$.

1. Logarithmieren der Funktionsgleichung
2. Differenzieren der logarithmierten Gleichung (Kettenregel!)

**II)** *Implizite Differentiation*

Gegeben implizite Funktionsgleichung: $F(x,y) = 0$.

1. Gliedweise Differentiation von $F(x,y) = 0$ nach $x$, wobei $y = y(x)$, d.h. $y$ ist als Funktion von $x$ anzusehen (Kettenregel!)
2. Auflösung der differenzierten Gleichung nach $y' = \dfrac{dy}{dx}$

Spezialfall: Die Ableitung $\left(f^{-1}\right)'$ der Umkehrfunktion $g(x) = f^{-1}(x)$ ergibt sich aus

$$g'(x) = \left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

**III)** *Ableitung einer Funktion in Parameterform (Polarkoordinaten)*

Falls $x = x(t), \quad y = y(t)$ gilt

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

Insbesondere für Polarkoordinaten

$$x = r(\varphi)\,\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\,\sin\varphi; \quad r = r(\varphi) \text{ gegeben :}$$

$$y' = \frac{\dot{r}(\varphi)\,\sin\varphi + r(\varphi)\,\cos\varphi}{\dot{r}(\varphi)\,\cos\varphi - r(\varphi)\,\sin\varphi} \tag{2}$$

### 2.2.3 Das Differential und höhere Ableitungen

**Differential** einer Funktion $y = f(x)$: $\boxed{dy = f'(x)\,dx}$ – beschreibt Zuwachs der Ordinate $y$ auf der an der Stelle $x$ errichteten Kurventangente bei einer Änderung der Abszisse $x$ um $dx$.

*Anmerkungen:*

1) Die Ableitung einer Funktion kann als Quotient zweier Differentiale aufgefaßt werden, nämlich

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Dabei heißen $\dfrac{dy}{dx}$: *Differentialquotient*, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$: *Differenzenquotient.*

2) Für kleine $\Delta x$ ist $dy \approx \Delta y$ bzw. $\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$ und der Differentialquotient (= Ableitung) kann durch Differenzenquotient ersetzt werden ($\Longrightarrow$ Näherungsverfahren, z.B. zur Lösung von Differentialgleichungen).

Berechnung von Meßfehlern

Sei $x_0$ wahrer (unbekannter) Wert einer Meßgröße und $x$ (fehlerbehafteter) Meßwert. Bezeichnen

| | |
|---|---|
| $\Delta x_{\max}(\geq \lvert x - x_0\rvert)$ | (geschätzter) *absoluter Maximalfehler* |
| $\dfrac{\Delta x_{\max}}{\lvert x\rvert}$ | *relativer Maximalfehler* |
| $\dfrac{\Delta x_{\max}}{\lvert x\rvert} \cdot 100\%$ | *prozentualer Maximalfehler* |

*Gesucht:* Maximalfehler der Zielgröße $y = f(x)$.
Es gilt:

$$\Delta y_{\max} \approx dy \approx f'(x)\Delta x_{\max}.$$

Höhere Ableitungen

Wenn die Ableitung $y' = f'(x)$ selbst eine differenzierbare Funktion darstellt, so kann man durch nochmaliges Differenzieren die **2. Ableitung** von $f(x)$ erhalten und zwar:

$$y'' = f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) =: \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Wiederholtes Differenzieren liefert **n-te Ableitung** mit

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}f^{(n-1)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) =: \frac{d^ny}{dx^n},$$

wobei $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ Differentialquotient $n$-ter Ordnung.

## 2.3 Anwendungen der Differentiation

### 2.3.1 Untersuchung von Funktionen

I) Monotonie und relative Extremwerte

**Satz 1.** Sei $y = f(x)$ differenzierbare Funktion auf dem Intervall $I$:
a) $f'(x) \geq 0$ auf $I \Rightarrow f$ ist auf $I$ *monoton wachsend*

b) $f'(x) \leq 0$ auf $I \Rightarrow f$ ist auf $I$ *monoton fallend*.
Gelten die Ungleichungen a) bzw. b) *streng*, so ist $f$ *streng* monoton wachsend bzw. fallend auf $I$.

Eine Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle $x_0$ ein **relatives Maximum** (**relatives Minimum**) $f(x_0)$, wenn für alle alle $x$ aus einer Umgebung von $x_0$ gilt

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad (\text{bzw. } f(x_0) \leq f(x)). \qquad (*)$$

*Anmerkungen:* Gelten die Ungleichungen $(*)$ für alle $x \in D(f)$, so spricht man von *absolutem* Maximum bzw. Minimum in $x_0$. Maxima und Minima werden oft als **Extrema** zusammengefaßt, die zugehörigen $y$-Werte sind die *Extremwerte* von $f$.

*Notwendige* Bedingung: Sei $f$ eine auf dem *offenen* Intervall $I$ differenzierbare Funktion:
In $x_0 \in I$ relatives Extremum $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

*Kandidaten* für Extrema sind:

- *Stationäre* Punkte aus dem Innern von $I$, d.h. innere Punkte $x_0$, wo $f'(x_0) = 0$
- Randpunkte von $I$
- Punkte aus $I$, in denen $f$ nicht differenzierbar ist.

*Hinreichende* Bedingung: Die Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle $x_0$ ein relatives Extremum, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$.
Für $f''(x_0) > 0$ liegt ein relatives *Minimum*, für $f''(x_0) < 0$ ein relatives *Maximum* vor.

II) Krümmungsverhalten und Wendepunkte

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt **konvex** (bzw. **konkav**) im Intervall $I$, wenn $\forall x_1, x_2 \in I$, $\forall \lambda \in (0,1)$ gilt:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$(\text{bzw. } f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)).$$

**Satz 2.** Sei $y = f(x)$ zweifach differenzierbare Funktion auf dem Intervall $I$:

a) $f''(x) \geq 0$ auf $I \Rightarrow f$ ist auf $I$ konvex
b) $f''(x) \leq 0$ auf $I \Rightarrow f$ ist auf $I$ konkav.

Kurvenpunkte, in denen $y = f(x)$ das Krümmungsverhalten ändert, heißen **Wendepunkte**. (Speziell werden Wendepunkte mit horizontaler Tangente als *Sattelpunkte* bezeichnet.)

*Notwendige* Bedingung: In $x_0 \in I$ Wendepunkt $\Rightarrow f''(x_0) = 0$.

*Kandidaten* für Wendepunkte sind:

- Punkte $x_0 \in I$, wo $f''(x_0) = 0$.
- Punkte aus $I$, wo $f''(x)$ nicht existiert.

*Hinreichende* Bedingung: Die Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle $x_0$ einen Wendepunkt, wenn $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$.

Allgemeines Kriterium für Extremwerte und Wendepunkte:
Sei $f'(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0)$ die erste *nichtverschwindende* Ableitung: $f$ hat Extremwert in $x_0$, wenn $n$ *gerade* ist und zwar Minimum für $f^{(n)}(x_0) > 0$ bzw. Maximum für $f^{(n)}(x_0) < 0$. Ist $n$ *ungerade*, so besitzt die Funktion $f$ in $x_0$ einen Sattelpunkt.

*Anmerkung:* Relative Extrema bzw. Wendepunkte können auch nachgewiesen werden anhand des *Vorzeichenwechsels* der 1. bzw. 2. Ableitung in der Umgebung der Stelle $x_0$:
$f'(x_0 - \varepsilon) > 0, \; f'(x_0 + \varepsilon) < 0 \Rightarrow$ In $x_0$ relatives Maximum
$f'(x_0 - \varepsilon) < 0, \; f'(x_0 + \varepsilon) > 0 \Rightarrow$ In $x_0$ relatives Minimum
$f''(x_0 - \varepsilon) \cdot f''(x_0 + \varepsilon) < 0 \Rightarrow$ In $x_0$ Wendepunkt,
wobei $\varepsilon > 0$ jeweils eine (beliebige) hinreichend kleine reelle Zahl bezeichnet.

**Krümmung** einer Kurve: $\kappa = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta \tau}{\Delta s}$ mit $\Delta\tau$ – Winkel zwischen Tangenten in den Endpunkten des Bogenstückes $\Delta s$.
Für zweifach differenzierbare Funktionen $y = f(x)$ gilt:

$$\kappa = \frac{y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}, \qquad \rho = \frac{1}{|\kappa|}, \tag{3}$$

wobei $\rho$ den *Krümmungsradius* bezeichnet.

### 2.3.2 Unbestimmte Ausdrücke

**Regel von L'Hospital:** Sind $f(x)$ und $g(x) \neq 0$ auf dem Intervall $(a, b)$ differenzierbare Funktionen, wobei $g'(x) \neq 0$, mit den Eigenschaften
a) $f(x) \to 0,\ g(x) \to 0$ oder $f(x) \to \infty,\ g(x) \to \infty$ für $x \to x_0 \in (a, b)$,
b) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$,
dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{4}$$

Entsprechendes gilt für einseitige Grenzwerte $x \nearrow x_0$, $x \searrow x_0$ und $x \to \infty$, $x \to -\infty$.

### 2.3.3 Kurvendiskussion

Die Diskussion einer Funktion (Kurve) $y = f(x)$ beinhaltet:

- Definitionsbereich von $f$; eventuell Wertebereich,
  Symmetrie (gerade oder ungerade?)
- Nullstellen; Schnittpunkt mit $y$-Achse
- Unstetigkeitsstellen, insbesondere Pole, vertikale Asymptoten
- relative Extremwerte (Maxima oder Minima?)
- Wendepunkte
- Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$,
  Asymptoten im Unendlichen
- Skizze (im geeigneten Maßstab)

### 2.3.4 Die Taylorsche Formel

Ziel: Möglichst gute Annäherung einer Funktion $y = f(x)$ durch ein Polynom $P_n(x)$, indem Funktionswerte *und* erste $n$ Ableitungen von $f(x)$ und $P_n(x)$ im Punkt $x_0$ zusammenfallen.

Bezeichnen $f(x) =: f^{(0)}(x)$.

**Satz von Taylor:** Sei $f(x)$ auf $[x_0, x]$ $n$-mal stetig differenzierbar und auf $(x_0, x)$ $n+1$-mal differenzierbar. Dann gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x) \tag{5}$$

– **Taylorsche Formel** mit dem *Restglied* [Lagrange]:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}, \quad \vartheta \in (0,1).$$

*Anmerkungen:* Das Restglied gibt den Fehler an, den man begeht, wenn $f(x)$ ersetzt wird durch das *Taylor-Polynom*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k.$$

Abbruch der Formel (5) nach $n$-tem Glied (ohne Restglied) heißt auch *$n$-te Näherung* $P_n(x)$ der Funktion $y = f(x)$ in der Nähe von $x = x_0$.

**Mittelwertsatz der Differentialrechnung:** Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ stetig und auf $(a, b)$ differenzierbar, dann existiert eine Stelle $c \in (a, b)$, so daß gilt

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{6}$$

### 2.3.5 Näherungsweise Lösung einer Gleichung

Ziel: Lösung der Gleichung $y = f(x) = 0 \iff$ Bestimmung der Nullstellen $x^*$ von $f$: $f(x^*) = 0$.
Falls keine exakte Lösung möglich $\Longrightarrow$ Näherungsverfahren.

I) *Iterationsverfahren (allgemein)*
Betrachten $F(x) = x$:

0) Wahl des Startwerts $x_0$
1) 1. Näherung $x_1 = F(x_0)$
2) 2. Näherung $x_2 = F(x_1)$
   usw.

Allgemeine Iterationsvorschrift: $x_n = F(x_{n-1}),\ n \geq 1$.
*Abbruch* des Verfahrens, wenn

$$|x_n - x^*| < \varepsilon \quad \text{oder} \quad |F(x_n) - F(x^*)| < \tilde{\varepsilon}$$

mit vorgegebenen Genauigkeiten $\varepsilon > 0$ bzw. $\tilde{\varepsilon} > 0$.

II) **Newton-Verfahren**:

Iterationsvorschrift:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Die *Konvergenz* der Folge der Näherungwerte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegen die exakte Lösung $x^*$ ist garantiert, wenn im Intervall $[a, b]$, in dem alle Näherungswerte liegen sollen, gilt

$$q = \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1 \qquad (+)$$

(hinreichende Konvergenzbedingung).

Als *Startwert* $x_0$ geeignet sind Werte, wo die hinreichende Konvergenzbedingung (+) möglichst erfüllt ist. Ungeeignet sind Werte mit $f'(x_0) \approx 0$.

### 2.3.6 Splines

Gegeben $n + 1$ *Stützpunkte* $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \ldots n$, mit

$$x_0 < x_1 < \ldots x_n.$$

Eine auf $[x_0, x_n]$ definierte Funktion $s = s(x)$ heißt **Spline**-Funktion vom *Grade* $k$ durch diese Punkte, wenn gilt:

i) $s(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n$

ii) $s(x)$ ist $(k-1)$-mal stetig differenzierbar ($k = 1$: stetig)

iii) $s(x)$ ist in jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ ein Polynom vom Grade $k$

Kubische Splines ($k = 3$)

*Ansatz:* Betrachten $n$ Polynome 3.Grades
$s_i(x) = y_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \ i = 0, 1, \ldots, n-1$
mit $b_i, c_i, d_i$ noch unbekannten Koeffzienten.
Setzen

$$s(x) = s_i(x), \quad \text{falls } x_i \leq x < x_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots n-1.$$

Die $n-1$ Unbekannten $c_i,\ i=1,2,\dots,n-1$, ergeben sich bei beliebig vorgegebenen $c_0, c_n \in \mathbb{R}$ als eindeutige Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1}+h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\left[\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right],$$

$$i = 1,2,\dots,n-1, \quad \text{wobei } h_i := x_{i+1}-x_i.$$

Die restlichen Unbekannten ergeben sich dann aus

$$d_i = \frac{c_{i+1}-c_i}{3h_i}, \quad i = 0,1,\dots,n-1,$$

$$b_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{2c_i + c_{i+1}}{3}\,h_i, \quad i = 0,1,\dots,n-1.$$

*Anmerkungen:* Liegen keine weiteren Bedingungen vor, wählt man oft $c_0 = c_n = 0$ – *natürliche* Spline-Funktion. Es läßt sich zeigen, daß ihre summarische *Krümmung* von allen zweimal stetig diffenzierbaren Funktionen durch die Punkte $P_i$ *minimal* ist.

## 2.4 Integration

### 2.4.1 Bestimmte und unbestimmte Integrale

Sei $f(x)$ eine auf dem Intervall $[a,b]$ definierte, beschränkte Funktion, die an höchstens endlich vielen Stellen nicht stetig ist (*stückweise stetige* Funktion).
Zerlegen $[a,b]$ in $n$ Teilintervalle $[x_{i-1},x_i]$ mit
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, wählen *Zwischenpunkte* $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ und berechnen

$$Z_n := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \quad \text{wobei } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

(*Riemannsche Zwischensumme*).
Der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

heißt, falls er existiert und zwar bei $\max_{1\le i\le n}\Delta x_i \to 0$ und beliebiger Wahl von $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$, $(i = 1,2,\ldots,n)$, **bestimmtes Integral** der Funktion $f(x)$ in den Grenzen von $x = a$ bis $x = b$ und wird gekennzeichnet durch das Symbol

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Elementare Integrationsregeln

Seien $f(x), g(x)$ stückweise stetige Funktionen auf $[a,b]$:

(1) $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

(2) $$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx \ (\alpha,\beta \in \mathbb{R})$$

$$(3)\quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad (a \le c \le b)$$

$$(4)\quad f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

Insbesondere folgt aus $m \le f(x) \le M,\ \forall x \in [a,b]$

$$m\,(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\,(b-a).$$

Eine auf dem Intervall $I$ differenzierbare Funktion $F$ heißt **Stammfunktion** von $f$, wenn gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.

**Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:**
Sei $f$ eine auf $I$ *stetige* Funktion, $a, b \in I$. Dann gilt:
a) (*Existenz von Stammfunktionen*) Die durch

$$F_a(x) := \int_a^x f(t)\,dt \quad (x \in I)$$

definierte Integralfunktion ist eine Stammfunktion von $f$, d.h.

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x).$$

Jede andere Stammfunktion von $f$ hat die Form

$$F(x) = F_a(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

b) (*Integralberechnung*) Mit einer beliebigen Stammfunktion $F$ von $f$ gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,\Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

Die Menge aller Stammfunktionen von $f(x)$ wird **unbestimmtes Integral** genannt und symbolisiert mit

$$\int f(x)\,dx.$$

Offenbar gilt

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

mit irgendeiner Stammfunktion $F(x)$, d.h. $F'(x) = f(x)$.

Ausgewählte Grundintegrale

| $f(x)$ | $\int f(x)\,dx$ | Bemerkungen |
|---|---|---|
| $x^n$ | $\frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + C$ | $n \neq -1$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert + C$ | $x \neq 0$ |
| $e^x$ | $e^x + C$ | |
| $\sin x$ | $-\cos x + C$ | |
| $\cos x$ | $\sin x + C$ | |
| $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\tan x + C$ | $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin x + C$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $\arctan x + C$ | |
| $\sinh x$ | $\cosh x + C$ | |
| $\cosh x$ | $\sinh x + C$ | |

**Mittelwertsatz der Integralrechnung:** Wenn $f(x)$ stetig auf $[a,b]$ ist, existiert eine Stelle $u \in (a,b)$ mit

$$f(u) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{8}$$

Der Wert $m = f(u)$ heißt *Mittelwert* der Funktion $f(x)$ auf $[a,b]$.

### 2.4.2 Integrationsmethoden

Voraussetzung: Funktionen stetig, gegebenenfalls differenzierbar

0) Linearität

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

1) Partielle Integration

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx$$

bzw.

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\,\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx.$$

2) Substitutionsmethode

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

mit $F$ Stammfunktion von $f$ bzw.

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt = F(g(b)) - F(g(a)).$$

### 2.4.3 Integration rationaler Funktionen

**A. Partialbruchzerlegung**

Sei $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ echt gebrochen rationale Funktion, d.h. Grad $m$ von $P_m(x) <$ Grad $n$ von $Q_n(x)$.

1. *Schritt*: Faktorzerlegung von $Q_n(x)$

$$Q_n(x) = c(x - b_1)^{k_1}\,(x - b_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - b_r)^{k_r}\,q_1(x)^{l_1} \cdot \ldots \cdot q_s(x)^{l_s}$$

| | |
|---|---|
| $b_i$ : | paarweise verschiedene reelle Nullstellen |
| $k_i$ : | Vielfachheit dieser Nullstellen |
| $q_j(x)$ : | quadratische Polynome, die keine reellen Nullstellen haben |
| $l_j$ : | Vielfachheit dieser Terme |

$(k_1 + k_2 + \ldots + k_r + l_1 + \ldots + l_s = n)$

2. *Schritt*: **Partialbruchansatz**

| In Faktorzerlegung von $Q_n(x)$ | Ansatz |
|---|---|
| Linearfaktor $(x-b)^k$ | $\dfrac{A_1}{x-b} + \dfrac{A_2}{(x-b)^2} + \ldots + \dfrac{A_k}{(x-b)^k}$ |
| quadratischer Faktor $q(x)^l$ | $\dfrac{B_1 x + C_1}{q(x)} + \dfrac{B_2 x + C_2}{q(x)^2} + \ldots + \dfrac{B_l + C_l}{q(x)^l}$ |

mit unbekannten Koeffizienten $A_i, B_j, C_j \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$(*)\quad \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} =$ Summe aller dieser *Partialbrüche.*

3. *Schritt*: **Koeffizientenvergleich**
Multiplikation von $(*)$ mit $Q_n(x) \Rightarrow$
Bestimmungsgleichungen für $A_i, B_j, C_j$: Gleichsetzen der Koeffizienten entsprechender $x$-Potenzen links und rechts: *Koeffizientenvergleich* $\Rightarrow$
lineares Gleichungssystem für Koeffizienten $A_i, B_j, C_j \Rightarrow$ Lösen!

**B.** Integration

Sei $R(x)$ gebrochen rationale Funktion.
**I)** FALLS $f(x)$ unecht gebrochen: Polynomdivision $\Rightarrow$

$$R(x) = g(x) + \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

wobei $g(x)$ Polynom und $m < n$.
SONST: $g(x) = 0$.

**II)** Partialbruchzerlegung von $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ [siehe A.]

**III)** Integration von $g(x)$ und der Partialbrüche.
Dabei gilt:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{1}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C \quad (k > 1)$$

Weiter bei $p^2 - 4q < 0$

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C$$

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + px + q}\, dx = \frac{a}{2} \ln |x^2 + px + q| + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2 + px + q}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} = \frac{2x + p}{(k-1)(4q - p^2)(x^2 + px + q)^{k-1}} +$$

$$+ \frac{2(2k-3)}{(k-1)(4q - p^2)} \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^{k-1}} \quad (k > 1)$$

$$\int \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^k}\, dx = -\frac{a}{2(k-1)(x^2 + px + q)^{k-1}} +$$

$$+ \left(b - \frac{ap}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} \quad (k > 1).$$

**IV)** $\int R(x)\, dx =$ Summe der Teilintegrale.

**C.** Integration zusammengesetzter (rationaler) Funktionen

a) Integration von $\int R(e^{ax})\, dx$, wobei $R$ rationale Funktion

Substitution: $\mathrm{e}^{ax} = t \Rightarrow dx = \frac{1}{at}\, dt$, d.h.

$$\int R(\mathrm{e}^{ax})\, dx = \int R(t) \frac{1}{at}\, dt$$

$\Longrightarrow$ Partialbruchzerlegung!

b) $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$

Substitution: $x = 2 \arctan t \Rightarrow$

$$dx = \frac{2\, dt}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$\Longrightarrow$ Einsetzen $\Longrightarrow$ Partialbruchzerlegung!

### 2.4.4 Uneigentliche Integrale

Falls eine Funktion $f(x)$ unbeschränkt auf dem Intervall $I$ oder das Intervall selbst unendlich ist, existiert das bestimmte Integral nicht. Wir betrachten im folgenden diese Fälle.
Die Funktion $f(x)$ sei auf dem Intervall $[a, b)$ definiert und auf jedem Teilintervall $[a, c]$, $c < b$, stückweise stetig, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Der Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\text{bzw.} \int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,dx$$

heißt **uneigentliches Integral**.
Man sagt, ein uneigentliches Integral *konvergiert* (bzw. *divergiert*), wenn der Grenzwert existiert (bzw. nicht existiert).

Analoge Definition für untere Grenzen. Weiterhin

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{u \to -\infty} \int_u^c f(x)\,dx + \lim_{v \to \infty} \int_c^v f(x)\,dx.$$

Die beiden Grenzwerte sind *unabhängig* voneinander zu bestimmen. Nur wenn beide existieren, konvergiert das uneigentliche Integral.

*Anmerkung:* Wird im letzten Fall beim Grenzübergang $|u| = |v| \to \infty$ gesetzt, spricht man vom *Cauchy-Hauptwert* des Integrals.
Analoge Definitionen für die Integration über Stellen, wo der Integrand unbeschränkt wird.

## 2.5 Anwendungen der Integration

### 2.5.1 Einige Anwendungen

1. Flächeninhalt $A$

Flächeninhalt zwischen 2 Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$, $a \leq x \leq b$, mit $f(x) \leq g(x)$:

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx \tag{9}$$

2. Bogenlänge $s$ eines ebenen Kurvenstücks

Sei $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, stetig differenzierbar:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx \tag{10}$$

3. Volumen $V$ eines Rotationskörpers

Bei Rotation von $y = f(x),\ a \leq x \leq b$, um die $x$-Achse:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx \tag{11}$$

Bei Rotation von $x = g(y),\ c \leq y \leq d$, um die $y$-Achse:

$$V = \pi \int_c^d g^2(y)\, dy$$

4. Mantelfläche $M$ eines Rotationskörpers

Bei Rotation von $y = f(x),\ a \leq x \leq b$, um die $x$-Achse:

$$M = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \tag{12}$$

Bei Rotation von $x = g(y),\ c \leq y \leq d$, um die $y$-Achse:

$$M = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy$$

5. Schwerpunkt $(x_S, y_S)$ einer (homogenen) Fläche

Sei Fläche berandet von den Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$, $a \leq x \leq b$, mit $f(x) \leq g(x)$:

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{A}\int_a^b x\,[g(x) - f(x)]\, dx \\ y_S &= \frac{1}{2A}\int_a^b [g^2(x) - f^2(x)]\, dx, \end{aligned} \tag{13}$$

wobei $A$ – Flächeninhalt der Fläche.

6. Arbeit $W$ eines Gases

Bezeichnen $p$ Druck, $V$ Volumen und $V_1$ bzw. $V_2$ Anfangs- bzw. Endvolumen, wobei $p = p(V)$:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\, dV \tag{14}$$

**Andere Kurvendarstellungen:**

a) Polarkoordinaten: $r = r(\varphi),\ \alpha \leq \varphi \leq \beta \Longrightarrow$

zu 1. $\quad A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\, d\varphi$

zu 2. $\quad s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r'(\varphi)]^2 + [r(\varphi)]^2}\, d\varphi$

zu 3. $$V = \pi \left| \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) \sin^2 \varphi \, [r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi] \, d\varphi \right|$$

zu 4. $$M = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |r(\varphi) \sin \varphi| \sqrt{[r'(\varphi)]^2 + [r(\varphi)]^2} \, d\varphi$$

b) Parameterform: $x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \leq t \leq \beta \Longrightarrow$

zu 1. $$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)] \, dt$$

zu 2. $$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} \, dt$$

zu 3. $$V = \pi \left| \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t)\dot{x}(t) \, dt \right|$$

zu 4. $$M = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} \, dt$$

### 2.5.2 Numerische Integrationsmethoden

Gegeben stetige Funktion $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, $f(x) > 0$.
Wählen $n$ – Anzahl der Teilintervalle (Feinheit der Diskretisierung).

• Trapezregel

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \left[ \frac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} \right] h,$$

wobei $h = \dfrac{b-a}{n}$; $\quad y_k = f(a + kh),\ k = 0, 1, \ldots, n.$

• Simpsonregel

Gerade Anzahl von Intervallen, d.h. $n = 2m$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx [(y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}) +$$

$$+ 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2})]\,\frac{h}{3},$$

wobei $h = \dfrac{b-a}{2m}$; $\quad y_k = f(a + kh),\ k = 0, 1, \ldots, 2m.$

Fehlerabschätzungen

Bezeichnen mit

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

und $I_n$ die Ergebnisse der obigen Regeln. Dann gilt für die

| | |
|---|---|
| Trapezregel | $\lvert I - I_n \rvert \le \dfrac{b-a}{12} \cdot h^2 \cdot \max\limits_{x \in [a,b]} \lvert f''(x) \rvert$ |
| Simpsonregel | $\lvert I - I_n \rvert \le \dfrac{b-a}{180} \cdot h^4 \cdot \max\limits_{x \in [a,b]} \lvert f^{(4)}(x) \rvert$ |