Modul-Mathematik1 (Algebra-Analysis) WS2021/2022 Prof. Dr. Ludwig Paditz

Vorlesungsskript

Modulhandbuch für den Studiengang

Informationstechnologie

mit den Studienrichtungen

Informationstechnik und Medieninformatik

an der Berufsakademie Sachsen Staatliche Studienakademie Dresden

Gültig ab 01.10.2019 Stand: 23.09.2019

Algebra/Analysis

Zusammenfassung:
Ziel ist die Vermittlung von Grundkenntnissen mathematischen Arbeitens sowohl mit Methoden der Diskreten Mathematik als auch der Analysis, um ingenieurtechnische Aufgabenstellungen mathematisch formulieren und lösen zu können. Das Modul ist Voraussetzung für die Module „Naturwissenschaftliche Grundlagen", „Bildverarbeitung und Druckvorstufe" und „Angewandte Mathematik" und unterstützt die Wissensvermittlung in weiteren Modulen.

Modulcode	**Modultyp**
3MI-MATHE-10	Pflichtmodul
Belegung gemäß Studienablaufplan	**Dauer**
1. Semester	1 Semester
Credits	**Verwendbarkeit**
6	Studiengang Informationstechnologie

Zulassungsvoraussetzungen für die Modulprüfung

Laut aktueller Prüfungsordnung

Voraussetzungen für die Teilnahme am Modul

Keine

Lerninhalte

- Grundlagen von Logik und Mengenlehre
- Zahlenbereiche (insbes. komplexe Zahlen und Zahlenkongruenzen)
- Algebraische Strukturen
- Vektorräume
- Matrizen und Determinanten
- Allgemeine lineare Gleichungssysteme
- Unendliche Folgen und Reihen
- Stetige Funktionen
- Infinitesimalrechnung ein- und mehrstelliger Funktionen
- Differenzialgleichungen

Lernergebnisse

Wissen und Verstehen

<u>Wissensverbreiterung</u>
Die Studierenden lernen die „Sprache der Mathematik" (Logik und Mengenlehre) und können diese verstehen. Sie erlernen effiziente Algorithmen zur Lösung linearer Gleichungssysteme und können weitere Aufgabenstellungen der Linearen Algebra lösen.

Wissensvertiefung
Die Studierenden erhalten einen Überblick über die Struktur der Zahlenbereiche. Ferner wird ein Grundverständnis für die Vielfalt weiterer algebraischer Strukturen vermittelt. Sie verstehen die theoretischen Grundlagen zur Lösung linearer Gleichungssysteme (mögliche Lösungsfälle und deren Charakterisierung). Nach einem Einblick in die Theorie der Differenzialgleichungen sind sie in der Lage, selbständig einfache Probleme der Modellierung dynamischer Vorgänge zu lösen

Können/Kompetenz

Instrumentale Kompetenz
Die Studierenden können mathematische Modelle zur Lösung von informationstechnischen Aufgaben anwenden. Sie erwerben rechnerische Fertigkeiten, insbesondere in informatikrelevanten Zahlenbereichen und beim Lösen von linearen Gleichungssystemen.

Systemische Kompetenz
Sie entwickeln die Fähigkeit, formal ausgedrückte Sachverhalte anschaulich zu interpretieren und umgekehrt konkrete Situationen formal zu beschreiben. Die Studierenden sind befähigt, naturwissenschaftliche oder technische Problemstellungen adäquat zu modellieren und mathematisch zu behandeln. Der der Diskreten Mathematik innewohnende hohe Abstraktionsgrad erleichtert ihnen die Analyse von praktischen Problemstellungen und die Entwicklung klar strukturierter Lösungen im Rahmen der Software-Entwicklung.

Kommunikative Kompetenz
Die Studierenden können gewonnene Ergebnisse interpretieren und diese für eine sachgerechte Argumentation und Entscheidungsfindung nutzen.

Lehr- und Lernformen/Workload

Lehr- und Lernformen	**Workload (h)**
Präsenzveranstaltungen	*entspricht 7,5 SWS*
Vorlesung/Seminar	88
Prüfungsleistung	2
Eigenverantwortliches Lernen	
Selbststudium	90
Workload Gesamt	**180**

Prüfungsleistungen (PL)

Art der PL	**Dauer (min)**	**Umfang (Seiten)**	**Prüfungszeitraum**	**Gewichtung (%)**
Klausurarbeit	120		Studienbegleitend im 1. Semester	100

Modulverantwortlicher

Herr Prof. Dr. rer. nat. Gembris E-Mail: daniel.gembris@ba-dresden.de

Unterrichtssprache

Deutsch

Angebotsfrequenz

Jährlich (Wintersemester)

Medien/Arbeitsmaterialien

Aufgaben- und Foliensammlung; Formelsammlung; Übungsbeispiele des Lehrbeauftragten

Literatur

Basisliteratur *(prüfungsrelevant)*

Ausgewählte Kapitel aus:
W. STRUCKMANN, D. WÄTJEN: Mathematik für Informatiker, Spektrum-Verlag, aktuelle Auflage

W. DÖRFLER, W. PESCHEK: Einführung in die Mathematik für Informatiker. Carl Hanser Verlag München Wien, aktuelle Auflage

Vertiefende Literatur

BRONSTEIN et al.: Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, 2008, aktuelle Auflage

BURG/HAF/WILLE (2008): Höhere Mathematik für Ingenieure, Bd. I., Teubner-Verlag, 2008, aktuelle Auflage

BURG/HAF/WILLE (2008): Höhere Mathematik für Ingenieure, Bd. II, Teubner-Verlag, 2008, aktuelle Auflage

BURG/HAF/WILLE (2007): Höhere Mathematik für Ingenieure, Bd. III., Teubner-Verlag, 2007, aktuelle Auflage

Umformungsregeln der Aussagenlogik

Hinweise:

1. $p \wedge q$ wird als $p \cdot q$ oder kurz pq geschrieben.
2. W entspricht 1, F entspricht 0.
3. $\equiv$ wird als $=$ geschrieben.
4. Für p, q, r können auch beliebige andere Variablen oder selbst wieder logische Ausdrücke stehen.
5. Negation von $p = \overline{p} = \neg p$

1. $\overline{0} = 1 \qquad \overline{1} = 0$
2. $\overline{\overline{p}} = p$
3. $p \wedge 0 = 0, \quad p \wedge 1 = p, \quad p \vee 1 = 1, \quad p \vee 0 = p$
   $\overline{p} \wedge p = 0, \quad p \wedge p = p, \quad p \vee p = p, \quad \overline{p} \vee p = 1$
4. Kommutativgesetze: $p \wedge q = q \wedge p \qquad p \vee q = q \vee p$
5. Assoziativgesetze:
   $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r) = p \wedge q \wedge r \qquad (p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r) = p \vee q \vee r$
6. Distributivgesetze:
   $(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \qquad (p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
7. DE MORGANsche Regeln:
   $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q} \qquad \overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$
8. Weitere Regeln:
   $p \vee (p \wedge q) = p \qquad p \wedge (p \vee q) = p$
   $p \vee (\overline{p} \wedge q) = p \vee q \qquad p \wedge (\overline{p} \vee q) = p \wedge q$

   $(p \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge q) = p \qquad (p \vee \overline{q}) \wedge (p \vee q) = p$

   $p \wedge (\overline{q} \vee q) = p \qquad p \vee (\overline{q} \wedge q) = p$

   $(p \wedge r) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (p \wedge q) = (p \wedge r) \vee (q \wedge \overline{r})$
   $(p \vee r) \wedge (q \vee \overline{r}) \wedge (p \vee q) = (p \vee r) \wedge (q \vee \overline{r})$

   $(p \vee \overline{r}) \wedge (q \vee r) = (p \wedge r) \vee (q \wedge \overline{r})$

   $p \Rightarrow q = \overline{p} \vee q \qquad p \Leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q}) = p \wedge \overline{q}$

   $p \wedge q = (\overline{p} \wedge q) \vee (p \wedge \overline{q}) = p \Leftrightarrow \overline{q}$

Rechenregeln der Mengenlehre

Für beliebige Mengen A, B, C, D gilt

1. $\emptyset \subseteq A$
2. $A \subseteq A$
3. $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Leftrightarrow (A = B)$
4. $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$
5. $A \cap A = A, \qquad A \cup A = A$
6. Kommutativgesetze:
   $A \cap B = B \cap A, \qquad A \cup B = B \cup A$
7. Assoziativgesetze:
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
8. Distributivgesetze:
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
9. $A \cap (A \cup B) = A, \qquad A \cup (A \cap B) = A$
10. $A \cap \emptyset = \emptyset, \qquad A \cup \emptyset = A$
11. $A \setminus A = \emptyset, \qquad A \setminus \emptyset = A, \qquad \emptyset \setminus A = A$
12. $A \setminus B \subseteq A$
13. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$
14. $A \subseteq A \cup B, \qquad A \cap B \subseteq A, \qquad A \setminus B \subseteq A$
15. $A \subseteq B \Rightarrow C \setminus B \subseteq C \setminus A$
16. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C), \qquad A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
17. $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A), \quad A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
18. $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

Sind **A**, **B** Teilmengen einer Menge **M**, so gilt ferner:

19. $A \cap \bar{A} = \emptyset, \quad A \cup \bar{A} = M$
20. DE MORGANsche Regeln: $\overline{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}}, \qquad \overline{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$

Wichtige mathematische Zusammenhänge

1 Rechenregeln

- Kommutativgesetz $x \circ y = y \circ x$
- Assoziativgesetz $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$
- Distributivgesetz $x \circ (y \star z) = (x \circ y) \star (x \circ z)$
- Bruch $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
- Binom $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$
- Binom $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$
- Potenz $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- Potenz $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- Potenz $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
- Potenz $(x^y)^z = x^{y \cdot z}$
- Wurzel $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$
- Wurzel $\sqrt[b]{x^a} = x^{a/b}$
- Wurzel $\sqrt{x^2} = |x|$
- Logarithmus $\log_c(a \cdot b) = \log_c(a) + \log_c(b)$
- Logarithmus $\log_c(a^b) = b \cdot \log_c(a)$
- Logarithmus $\log_b(a) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$
- Trigonometrie $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- Trigonometrie $1 = \sin^2(x) + \cos^2(x)$

2 Funktionsgraphen

- Definition: $f : \mathbb{D} \to \mathbb{B}$, $f : x \mapsto x^2$
- Verschiebung: $f(x-c)$, $f(x)+c$
- Skalierung: $f(a \cdot x)$, $a \cdot f(x)$
- Achsensymmetrisch: $f(-x) = f(x)$
- Punktsymmetrisch: $f(-x) = -f(x)$
- Monotonie $y > x \implies f(y) > f(x)$
- Periodizität: $f(x+p) = f(x)$
- Verkettung: $h = f \circ g$, $h(x) = f(g(x))$
- Nullstelle: $f(x) = 0$
- Lokale Extrema: $f'(x) = 0$, $f''(x) \neq 0$

3 Gleichungen

- Polynom (Grad n): $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$
- Linearfaktoren: $p_n(x) = \sum_{i=0}^{k} (x - x_i)^{a_i}$, $\sum_k a_i = n$
- $x^2 + px + q = 0 \implies x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$
- Gebrochenrat. Fkt: $f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$
- für $n \geq m$ unecht gebrochen, sonst echt gebrochen
- Polynomdivision: $\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x-1} = x^2 - x - 5 + \frac{3}{x-1}$
- Partialbruchzerlegung: $\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$

4 Ableiten und Integrieren

- $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} F(x) = f(x)$
- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$
- Summenregel: $(f+g)' = f' + g'$
- Produktregel: $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
- Kettenregel: $(f_1 \circ f_2)' = f_1' \cdot f_2'$
- Umkehrfunktion: $(f^{-1})' \cdot f' = 1$
- Partielle Integration: $\int (f \cdot g)\mathrm{d}\underset{\cdot}{x} = Fg - \int Fg'\,\mathrm{d}\underset{\cdot}{x}$
- Integration mit Substitution: Substitution ableiten und einsetzen

5 Mehrstellige Funktionen

- Definitionsbereich ist kartesisches Produkt
- Mengenschreibweise: $\{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$
- Mengenschreibweise: $\mathbb{R} \setminus [0, \infty)$
- Mengenschreibweise: $[0, \infty) \times (-2, 3]$
- partielle Ableitung: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x(x, y)$
- Tangente: $t(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$
- Tangentialebene: $t(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0)$
- Satz von Schwarz: $f_{xy} = f_{yx}$
- Extremwerte (1-stellig) $f' = 0, f'' \neq 0$
- Extremwerte (2-stellig) $f_x = f_y = 0$
- Extremwerte (2-stellig) $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx} > 0$

6 Grenzwerte

- Grenzwert: $\lim_{n\to\infty} 1/x = 0$
- Grenzwert: $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ ($|q| < 1$)
- Grenzwert: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$ ($q > 0$)
- Grenzwert: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- GW-Satz: $\lim(a_n + b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n)$
- GW-Satz: $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n)$
- GW-Satz: $\lim(f(a_n)) = f(\lim(a_n))$ (f stetig)
- L'Hôspital: $\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$
- Arithmetische Reihe $s_n = 1 + 4 + 7 + 10 + ...$
- Arithmetische Reihe $s_n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- Geometrische Reihe $s_n = 0{,}5 + 0{,}5^2 + 0{,}5^3 + ...$
- Geometrische Reihe $s_n = \sum_{i=1}^{n} q^i = q\frac{1-q^n}{1-q}$
- Quotientenkriterium $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| < 1$
- Wurzelkriterium $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$

7 Potenzreihen

- Potenzreihe: $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$
- Konvergenzradius: $R = 1/\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$
- Taylorentwicklung: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$
- Taylorentwicklung ist Näherung einer Funktion durch ein Polynom n-ten Grads
- Restgliedabschätzung: $R_n(x) \leq \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{\vartheta\in[x_0,x]} f(\vartheta)$
- Fourierreihe ist Entwicklung in ein Frequenzspektrum

8 Differentialgleichung

- Allgemeine Lösung y_A ist Funktionsschar
- Partikuläre Lösung y_P für Anfangsbedingungen
- Ordnung: höchste Ableitung
- Gewöhnliche und partielle DGL
- Explizit (höchste Ableitung alleine) und implizit
- Gewöhnliche DGL n-ter Ordnung: $\phi(y, y', ..., y^{(n)}, x) = 0$
- Homogenität: Liegt vor, wenn ϕ homogene Funktion in den Argumenten y, y', ..., $y^{(n)}$ ist
- $\phi(ty, ty', ..., ty^{(n)}, x) = t^\alpha \phi(y, y', ..., y^{(n)}, x)$
- Zerlegung in homogenen und inhomogenen Anteil $\phi_H(y, y', ..., y^{(n)}, x) + \psi(x) = 0$
- Lineare DGL: Hat homogenen Anteil mit Homogenitätsgrad 1

9 Lösen von DGL

- Grafische Lösung mittels Richtungsfeld (für DGL 1. Ordnung)
- Probe, ob Funktion Lösung einer DGL ist: Einsetzen
- Lösung mittels direkter Integration
- Lösung mittels Trennung der Variablen
- Lösung mittels Variation der Konstanten
- Lineare DLG n-ter Ordnung: $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(k)}(x) = q(x)$
- Homogen für $q(x) = 0$, sonst inhomogen
- Spezialfall: Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten: $a_k = const.$
- Allgemeine Lösung homogener Anteil: Charakteristische Gleichung
- Partikuläre Lösung inhomogener DGL: Koeffizientenvergleich in Ansatz
- Allgemeine Lösung inhomogener DGL: Summe obiger beider Lösungen

1 Grundlagen

1.1 Mengenlehre und mathematische Logik

1.1.1 Mengen und Mengenoperationen

Menge: Gedankliche Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten (genannt *Elemente*) zu einem Ganzen. [Cantor]

Element x gehört (nicht) zur Menge M: $x \in M$ $(x \notin M)$.

Falls eine Menge keine Elemente enthält: *leere Menge* $\emptyset$.

Die Definition einer Menge erfolgt *aufzählend* oder durch Angabe einer *mengenbildenden Eigenschaft*.

Menge A heißt **Teilmenge** von Menge B genau dann, wenn für alle $x \in A$ folgt $x \in B$: $A \subset B$.

Mengen A und B heißen *gleich*, wenn $A \subset B$ und $B \subset A$: $A = B$.

Andernfalls $A \neq B$.

Man sagt, A ist *echt enthalten* in B, wenn $A \subset B$ und $A \neq B$.

Mengenoperationen

Gegeben Mengen $A, B \subset M$ mit *Grundmenge* M:

Durchschnitt	$A \cap B = \{x \in M : x \in A \text{ und } x \in B\}$
Vereinigung	$A \cup B = \{x \in M : x \in A \text{ oder } x \in B\}$
Differenzmenge	$A \setminus B = \{x \in M : x \in A \text{ und } x \notin B\}$
Speziell:	
Komplement(ärmenge)	$\overline{A} = M \setminus A = \{x \in M : x \notin A\}$
Produktmenge	$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$,
	(x, y) – *geordnetes Paar*

Falls $A \cap B = \emptyset$, so nennt man A und B *disjunkte* Mengen.

Rechenregeln: A, B, C beliebige Mengen

a) $A \cap A = A$

b) $A \cap B = B \cap A$ (Kommutativgesetz)

c) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ (Assoziativgesetz)

d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Distributivgesetz)

e) $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cup \emptyset = A$

f) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (de Morgansche Regel).

Anmerkung: a) – f) gelten *auch*, wenn man die Symbole $\cap$ und $\cup$ sowie $\emptyset$ und M (Grundmenge) jeweils vertauscht. Außerdem gilt:
g) Wenn $A \subset B$, dann $A \cap B = A$ und $A \cup B = B$.

Abbildung F: Zuordnung zwischen gewissen Elementen einer Menge A und einer Menge B, d.h. $F \subset (A \times B)$.
Sei $(x, y) \in F \subset (A \times B)$. Dann heißen:

$x \in D$:	*Urbild* (Originalelement)
$y \in W$:	*Bild* (Bildelement)
$D \subset A$:	Definitionsbereich
$W \subset B$:	Wertebereich

Man spricht von Abbildungen
von A, falls $D = A$ bzw.
aus A, falls $D \subset A$, $D \neq A$ und
auf B, falls $W = B$ bzw.
in B, falls $W \subset B$, $W \neq B$.
Insbesondere heißen Abbildungen von A auf B *surjektiv*.

Eine Abbildung F heißt **eindeutig** oder **Funktion**, wenn jedem $x \in D$ *genau* ein $y \in W$ zugeordnet wird.

Andernfalls wird F *mehrdeutig* genannt.

Inverse Abbildung: $F^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in F\}$.
Sind F und F^{-1} eindeutige Abbildungen, so nennt man F *eineindeutig*.

1.1.2 Grundbegriffe der Logik

Aussage: Behauptung, die entweder *wahr* (**w**) oder *falsch* (**f**) – *zweiwertige* Logik [Aristoteles]).
Enthält Aussage eine (oder mehrere) Variable (sogenannte *Platzhalter*) aus einer gewissen Grundmenge, so verwandelt sie sich in eine **Aussagenform**.

Diejenigen Elemente, die Aussagenform zu *wahrer* Aussage machen, bilden *Lösungsmenge* L. Möglich: $L = \emptyset$.

In Zusammenhang mit Aussageformen kommen oft sogenannte *Quantoren* vor:
$\forall$: "Für alle … gilt "
$\exists$: "Es existiert (mindestens) ein …"

Aussagenlogik: Verknüpfung von Aussagen bzw. Aussagenformen.
Seien p, q zwei Aussagen

Verknüpfung	Bedeutung	Zeichen
Negation	nicht p	$\neg p$; $\overline{p}$
Konjunktion	p und q	$p \wedge q$
Disjunktion	p oder q	$p \vee q$
Implikation	aus p folgt q; wenn p, dann q	$p \rightarrow q$
Äquivalenz	p genau dann, wenn q	$p \leftrightarrow q$

Die Festlegungen der Wahrheitswerte der Verknüpfungen nennt man *Wahrheitstafeln*:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Eine Aussagenform, die immer *wahr* ist, heißt **Tautologie**.

Ausgewählte Tautologien:

Gesetz	Form
A) Ausgeschlossenes Drittes	$p \vee \neg p$
B) Doppelte Verneinung	$\neg(\neg p) \leftrightarrow p$
C) Kontraposition	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
D) Kettenschluß	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
E) Abtrennungsregel	$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$
F) Indirekter Schluß	$p \wedge (\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow q$
G) De Morgansche Regeln	$(\overline{p \wedge q}) \leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$
	$(\overline{p \vee q}) \leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$

Anmerkungen:
1) Bei der Implikation $p \rightarrow q$ nennt man die Aussage p Voraussetzung (Prämisse) und q Behauptung (Konklusion). Man sagt auch p ist *hinreichend* für q und q ist *notwendig* für p.
2) Für die Äquivalenz gilt $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$.
D.h. die Aussage p ist *notwendig und hinreichend* für q.

In der Mathematik werden ausgehend von als wahr angenommenen Voraussetzungen mit Hilfe von Tautologien Behauptungen *bewiesen*. Man unterscheidet folgende **Beweisverfahren** :
I) *Direkter* Beweis – auf Grundlage von E)
II) *Indirekter* Beweis – auf Grundlage von F)
III) *Vollständige Induktion* – für von natürlichen Zahlen n abhängende Aussagen $p(n)$, $\forall n \geq n_0$:
Es wird gezeigt
1) $p(n_0)$ ist wahr (Induktionsanfang)
2) $p(n) \to p(n+1)$ für beliebiges $n \geq n_0$, d.h. unter der Voraussetzung, daß $p(n)$ gilt (Induktionsannahme), wird die Richtigkeit von $p(n+1)$ nachgewiesen (Induktionsbeweis).

1.2 Reelle Zahlen

1.2.1 Rechenoperationen

Zahlenmenge	Beschreibung
Natürliche Zahlen	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q} = \{p/q : \ p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\}$ endliche / unendlich periodische Dezimalbrüche
Reelle Zahlen	$\mathbb{R}$: unendliche Dezimalbrüche

Anmerkung: $\mathbb{Q}$ liegt *dicht* in $\mathbb{R}$, d.h. jede reelle Zahl läßt sich beliebig genau durch rationale Zahlen *annähern*.
Bei Beachtung der üblichen Rundungsregeln ist eine mit r Dezimalstellen (Nachkommastellen) angegebene reelle Zahl mit einem Fehler von $\leq 0,5 \cdot 10^{-r}$ behaftet.

In $\mathbb{R}$ sind *alle* Rechenoperationen $+, -, \cdot, :$ – außer Division durch 0 – erlaubt. Dabei gelten für Addition und Multiplikation die bekannten Beziehungen:

- Kommutativ-, Assoziativ-, Distributivgesetze
- Existenz und Eindeutigkeit eines *neutralen* Elements:
  $a + 0 = a; \quad a \cdot 1 = a, \ \forall a \in \mathbb{R}$
- Existenz und Eindeutigkeit eines *inversen* Elements:
  $a + x = 0, \ \forall a \in \mathbb{R}; \quad a \cdot x^* = 1, \ \forall a \neq 0,$
  und zwar $x = -a$ bzw. $x^* = 1/a$.

Die reellen Zahlen lassen sich als Punkte einer (gerichteten) Geraden, der *Zahlengeraden*, auffassen und der Größe nach ordnen. Dabei gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$ genau eine der drei *Relationen*

$$a < b \quad \text{oder} \quad b < a \quad \text{oder} \quad a = b.$$

Wichtige Eigenschaften der Relation $<$:
1) $(a < b) \wedge (b < c) \quad \Longrightarrow \quad a < c$
2) $a < b \quad \Longrightarrow \quad a + c < b + c \quad \forall c$
3) $(a < b) \wedge (c > 0) \quad \Longrightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c$
4) $(a < b) \wedge (c < 0) \quad \Longrightarrow \quad a \cdot c > b \cdot c$

Intervalle (= Teilmengen von $\mathbb{R}$):

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \; a \le x \le b\}$	*abgeschlossenes* Intervall von a bis b
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \; a < x < b\}$	*offenes* Intervall von a bis b
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \; a < x \le b\}$	linksoffenes Intervall von a bis b
$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : \; a \le x\}$	rechtsoffenes Intervall von a bis ∞

Speziell $(0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =: \mathbb{R}^+$

Sei $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$. Dann heißt x_0 *innerer* Punkt von I, falls $\exists \varepsilon > 0$: $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I$. Andernfalls stellt x_0 einen *Randpunkt* dar.

Betrag einer reellen Zahl a = Abstand von 0:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls} \quad a \ge 0 \\ -a, & \text{falls} \quad a < 0. \end{cases}$$

Dabei gilt:
1) $|a| \ge 0$
2) $a \le |a|$
3) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
4) $|a| \le b \quad \Leftrightarrow \quad -b \le a \le b$
5) $|a + b| \le |a| + |b| \qquad$ (*Dreiecksungleichung*)

Lösen von Gleichungen/Ungleichungen: Lösungsmenge bleibt unverändert bei *äquivalenten Umformungen* und zwar
1) Addition (Subtraktion) eines beliebigen Terms auf beiden Seiten
2) Multiplikation (Division) beider Seiten mit Zahl $K > 0$

3) Multiplikation (Division) beider Seiten mit Zahl $K < 0 \Longrightarrow$
Änderung des Relationszeichens:
aus $<$ wird $>$
aus $\leq$ wird $\geq$
und umgekehrt.

1.2.2 Algebraische Gleichungen

Algebraische Gleichung n-ter Ordnung (normierte Form):

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (1)$$

mit $a_k \in \mathbb{R},\ k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Speziell für $n = 2$: *quadratische Gleichung* (Normalform):

$$x^2 + px + q = 0.$$

Lösung: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$	Anzahl der Lösungen in $\mathbb{R}$
> 0	2 verschiedene
$= 0$	1 (doppelte)
< 0	keine

Allgemein gilt:
- (1) hat höchstens n reelle Lösungen.
- Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Lösungen von (1), dann gilt:
  $P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$
  (*Linearfaktor-Zerlegung*)
- Nach Vietaschem Wurzelsatz gilt insbesondere:
  $x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n a_0$

Bruch- und *Wurzelgleichungen* lassen sich auf algebraische Gleichungen zurückführen. Zur Lösung von Wurzelgleichungen müssen auch *nichtäquivalente* Umformungen vorgenommen werden. Dabei kann sich die Lösungsmenge vergrößern, sogenannte Scheinlösungen tauchen auf. Diese sind mit Hilfe der Probe (in der Ausgangsgleichung) zu eliminieren.

1.2.3 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Potenzieren:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{n\text{-mal}} =: a^n = b, \quad a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

a – Basis, n – Exponent, b – Potenzwert.
Für $a \neq 0: \quad a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^{-n} := \frac{1}{a^n}$.

1. Umkehrung: **Radizieren** (Basis unbekannt):

$$a = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a^n = b, \quad a \geq 0,\ b \geq 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Speziell $\sqrt[2]{b} =: \sqrt{b}$
Beachte: Wurzeln sind stets nichtnegativ. Insbesondere $\forall a \in \mathbb{R}$, n gerade gilt: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

$$a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m},\ m, n \in \mathbb{N}; \quad \text{Verallgemeinerung}: \ a^r \text{ mit } r \in \mathbb{R}.$$

Potenzgesetze:
Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $m, n \in \mathbb{R}$ bzw. $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n,$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Anmerkung: Wegen $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ können Wurzeln stets als Potenzen aufgefaßt werden.

2. Umkehrung: **Logarithmieren** (Exponent unbekannt):

$$n = \log_a b \Leftrightarrow a^n = b, \quad b > 0;\ a > 0,\ a \neq 1.$$

Speziell:	$\log_{10} x =: \lg x$	dekadischer Logarithmus
	$\log_{\mathrm{e}} x =: \ln x$	*natürlicher* Logarithmus
	$\mathrm{e} = 2,718281\ldots$	*Eulersche Zahl*

Logarithmengesetze:

Seien $x, y, a \in \mathbb{R}^+,\ a \neq 1,\ r \in \mathbb{R}$:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y,$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a x^r = r \log_a x.$$

Weiterhin

$$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c} \qquad (\mathit{Basiswechsel}).$$

Insbesondere gilt

$$\ln 1 = 0; \quad \ln e = 1; \qquad \mathrm{e}^{\ln x} = x,\ x > 0.$$

1.2.4 Der binomische Satz

Binomialkoeffizient:

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot [n-(k-1)]}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1}, \quad k, n \in \mathbb{N},\ k \leq n.$$

Bezeichnen $k! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$ – (lies: k *Fakultät*), $0! := 1$
Dann gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Rechenregeln:

0) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Anmerkung: Im *Pascalschen Zahlendreieck* ist der Koeffizient in der $(n+1)$-ten Zeile an $(k+1)$-ter Stelle gleich $\binom{n}{k}$.

Summenzeichen $\sum$:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{n-1} + a_n \quad (m, n \in \mathbb{Z},\ m \leq n)$$

Binomischer Satz: Für $a, b \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 +$$

$$\ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n. \tag{2}$$

1.3 Funktionen

1.3.1 Definition und Darstellung

(Reelle) Funktion: Eindeutige Abbildung f von $D \subset \mathbb{R}$ auf $W \subset \mathbb{R}$, d.h. Vorschrift, die jedem Element $x \in D$ *genau ein* Element $y \in W$ zuordnet.

Schreibweise: $y = f(x)$.

x:	unabhängige Variable oder *Argument*
y:	abhängige Variable oder *Funktionswert*
$D = D(f)$:	*Definitionsbereich* der Funktion f
$W = W(f)$:	*Wertebereich* der Funktion f

Anmerkung: Eine Funktion wird definiert durch die Zuordnungsvorschrift f *und* den Definitionsbereich $D = D(f)$. Falls im weiteren kein Definitionsbereich angegeben ist, wird jeweils der *größtmögliche* Defitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ angenommen.

Darstellung von Funktionen

a) analytisch – Funktionsgleichung $\nearrow$ explizit: $y = f(x)$; $\searrow$ implizit: $F(x, y) = 0$

b) Wertetabelle

c) Graphik

d) Parameterdarstellung: $x = x(t), y = y(t),\ t_0 \leq t \leq t_1$.

1.3.2 Allgemeine Funktionseigenschaften

Gegeben Funktion $y = f(x)$ mit Definitionsbereich $D(f)$.

Schnittpunkte mit Koordinatenachsen

$S_x = (x_0, 0)$ Schnittpunkt mit x-Achse:
$x_0 \in D(f)$ – **Nullstelle** von f: $f(x_0) = 0$.

$S_y = (0, y_s)$ Schnittpunkt mit y-Achse: $y_s = f(0)$.

Monotonie

Funktion f heißt in einem Intervall $I \subset D(f)$

monoton wachsend:	$x_1 < x_2 \;\rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$
monoton fallend:	$x_1 < x_2 \;\rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2)$
streng monoton wachsend:	$x_1 < x_2 \;\rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$
streng monoton fallend:	$x_1 < x_2 \;\rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$
	jeweils für beliebige $x_1, x_2 \in I$.

Beschränktheit

Funktion f heißt in einem Intervall I *nach oben beschränkt* (bzw. *nach unten beschränkt*), wenn es eine Konstante K_o (K_u) gibt: $f(x) \leq K_o$ ($f(x) \geq K_u$) für alle $x \in I$.
K_o (K_u) – *obere* (bzw. *untere*) *Schranke*.
Funktion f **beschränkt** $\Leftrightarrow$ f nach oben *und* unten beschränkt $\Leftrightarrow$
$\exists K : \quad |f(x)| \leq K, \quad \forall x \in I$.
Die kleinste obere (bzw. größte untere) Schranke werden **Supremum** (bzw. **Infimum**) genannt und bezeichnet

$$\sup_{x \in I} f(x) \quad \text{bzw.} \quad \inf_{x \in I} f(x).$$

Wenn die Funktion ihr Supremum (bzw. Infimum) annimmt, spricht man von **Maximum** (bzw. **Minimum**) und schreibt

$$\max_{x \in I} f(x) \quad \text{bzw.} \quad \min_{x \in I} f(x).$$

Symmetrie

f **gerade** Funktion:	$f(-x) = f(x),\ \forall x \in D(f)$
f **ungerade** Funktion	$f(-x) = -f(x),\ \forall x \in D(f)$

Periodizität

Funktion f heißt **periodisch**, wenn es eine Zahl $p > 0$ gibt:
$f(x + p) = f(x)$ für beliebige $x \in D(f)$.
Die kleinste Zahl p, für die das zutrifft, nennt man *Periode* von f.

1.3.3 Umkehrfunktion

Eine Funktion $y = f(x)$ mit Definitions- bzw. Wertebereich $D(f)$ bzw. $W(f)$ nennt man *umkehrbar eindeutig* (oder *eineindeutig* oder *invertierbar*), wenn zu jedem $y \in W(f)$ *genau ein* $x \in D(f)$ existiert, so daß $y = f(x)$ gilt.
Die entsprechende Funktion, die $y \in W(f)$ dann $x \in D(f)$ zuordnet, heißt **Umkehrfunktion** (oder inverse Funktion) f^{-1}.

Offenbar gilt:
1) $f(x)$ ist umkehrbar eindeutig, wenn aus $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt.
2) *Streng* monoton wachsende oder fallende Funktionen sind invertierbar. (hinreichende Bedingung)
3) $D(f^{-1}) = W(f), \quad W(f^{-1}) = D(f)$.

Bestimmung der Funktionsgleichung der Umkehrfunktion
i) Auflösung der Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x: $x = g(y)$.
ii) Formales Vertauschen von x und y ergibt Umkehrfunktion $y = g(x) = f^{-1}(x)$.
(Die beiden Schritte können auch in umgekehrter Reihenfolge ausgeführt werden.)

Gegeben zwei Funktionen:
$z = f(x)$ mit Definitionsbereich $D(f)$, Wertebereich $W(f)$;
$y = g(z)$ mit Definitionsbereich $D(g)$, Wertebereich $W(g)$,
wobei $W(f) \subset D(g)$.
Funktion $y = h(x) := g(f(x))$ heißt **zusammengesetzt** (oder verkettet) mit *äußerer* Funktion g und *innerer* Funktion f.

Insbesondere gilt:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in D(f), \qquad f(f^{-1}(x)) = x, \quad \forall x \in W(f).$$

1.3.4 Elementare Funktionen

Grundfunktionen:
– Potenzfunktionen / Wurzelfunktionen
– Exponentialfunktionen / Logarithmusfunktionen
– trigonometrische Funktionen / Arcus-Funktionen
– hyperbolische Funktionen / Areafunktionen

Elementare Funktionen: Funktionen, die sich aus den Grundfunktionen ergeben mittels Rechenoperationen $(+, -, \cdot, :)$ bzw. Zusammensetzungen

Erläuterungen

A) Das Argument x der **trigonometrischen** Funktionen ist *maßeinheitslos* [Taschenrechner: RAD(iant)], d.h. es wird in Bogenmaß angegeben:

$$x = \frac{b}{r} = \frac{\text{Bogenlänge des zugehörigen Winkels } \alpha}{\text{Radius des Kreises}}.$$

Umrechnung in Grad [DEG]: $\dfrac{\alpha}{360°} = \dfrac{x}{2\pi}$.

Außerdem

$$1' = \frac{1°}{60}, \quad 1'' = \frac{1'}{60}, \quad 90° \mathrel{\widehat{=}} 100\,\text{gon}\ (Neugrad[GRA]).$$

Werte trigonometrischer Funktionen für spezielle Argumente:

α	x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
$0°$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = \mathbf{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = \mathbf{1}$	0
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \mathbf{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \mathbf{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = \mathbf{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = \mathbf{0}$	∞

Wichtige Beziehungen

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{(Satz von Pythagoras)},$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x},$$

$$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x), \quad \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x), \quad \cot x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$$

bzw. *Additionstheoreme* (Auswahl)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x},$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}.$$

B) Die **hyperbolischen** Funktionen

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

haben ähnliche Eigenschaften wie trigonometrische Funktionen, sind jedoch nicht periodisch. Zum Beispiel gelten ähnliche *Additionstheoreme*, insbesondere

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Die *Area-Funktionen* lassen sich durch Logarithmusfunktionen darstellen, z.B.

$$y = \text{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}$$

(vgl. Tafeln).

C) Wegen $f^{-1}(f(x)) = x, \; x \in D(f)$ folgt z.B.

$$\ln(e^x) = x, \quad x \in \mathbb{R}; \quad e^{\ln x} = x, \quad x \in (0, \infty),$$

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \sin(\arcsin x) = x, \quad x \in [-1, 1].$$

Anwendung: Lösung von Gleichungen!

1.3.5 Rationale Funktionen

I. Polynome

Polynom (ganze rationale Funktion) **n-ten Grades** :

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad x \in \mathbb{R},$$

$a_0, a_1, \ldots a_n$ – Polynomkoeffizienten, wobei $a_n \neq 0$.

Berechnung von Funktionswerten

$$P_n(x_0) = \underbrace{(\ldots((}_{n-1} a_n x_0 + a_{n-1})x_0 + a_{n-2})x_0 + \ldots + a_1)x_0 + a_0$$

Berechnung der Klammern von innen nach außen $\Longrightarrow$ *Horner-Schema*:

Zu	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_2	a_1	a_0
addiere		$b_{n-1}x_0$	$b_{n-2}x_0$	$\ldots$	b_2x_0	b_1x_0	b_0x_0
$\mathbf{x_0}$	$b_{n-1} = a_n$	b_{n-2}	b_{n-3}	$\ldots$	b_1	b_0	$\boxed{\mathbf{r_0}}$

wobei $r_0 = P_n(x_0)$ und Koeffizienten $b_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3}, \ldots, b_1, b_0$ – Koeffizienten eines Polynoms $Q_{n-1}(x)$:

$$P_n(x) = \underbrace{(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0)}_{Q_{n-1}(x)}(x - x_0) + r_0$$

Also: x_0 Nullstelle von $P_n(x) \iff P_n(x_0) = r_0 = 0$ – kein Rest!
$\Longrightarrow$ *Polynomdivision*: $P_n(x) : (x - x_0) = Q_{n-1}(x)$.

Faktor-Zerlegung

Jedes Polynom $P_n(x)$ läßt sich darstellen

$$P_n(x) = a_n(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_k) q_1(x) \cdot \ldots \cdot q_l(x),$$

wobei $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ Nullstellen und $q_i(x) = A_i x^2 + B_i x + C_i$ $(i = 1, \ldots, l)$ reell unzerlegbare Faktoren sind. Dabei ist $k + 2l = n$.

Interpolation

Gegeben Punkte $P_i = (x_i, y_i),\ i = 0, 1, \ldots, n$.
Gesucht $y = f(x)$ mit $f(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$.

a) **Newtonsches Interpolationspolynom**

Ansatz:

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots \\ &\quad + c_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

Die unbekannten Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_n$ werden nacheinander durch Einsetzen von $x_0, x_1, \ldots x_n$ bestimmt.

b) *Lagrangesches Interpolationspolynom*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}.$$

<u>II. Gebrochen rationale Funktionen:</u>

$$y = f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

mit Polynomen $P_m(x)$, $Q_n(x)$, wobei
$n > m$ – *echt gebrochen rationale* Funktion
$n \leq m$ – *unecht gebrochen rationale* Funktion
$D(f)$: $\mathbb{R}$, *außer* Nullstellen von $Q_n(x)$

$x_0 \in \mathbb{R}$ ist
Nullstelle von $f(x)$, wenn $P_m(x_0) = 0$ und $Q_n(x_0) \neq 0$
Polstelle von $f(x)$, wenn $P_m(x_0) \neq 0$ und $Q_n(x_0) = 0$

Falls $P_m(x_0) = Q_n(x_0) = 0$, liegt eine Lücke oder Polstelle vor (siehe Abschnitt. 2.1.3).

Jede gebrochen rationale Funktion $y = f(x)$ läßt sich (wenn unecht gebrochen rational durch Polynomdivision) *zerlegen*:
$f(x) = p(x) + r(x)$, wobei
Polynom $p(x)$ – *Asymptote*
$r(x)$ echt gebrochen rationale Funktion.

1.3.6 Polarkoordinaten

Punkt P in ebenem Koordinatensystem:

(x, y)	kartesische Koordinaten
(r, φ)	Polarkoordinaten,
wobei	r: Abstand des Punktes P vom Koordinatenursprung
	φ: Winkel zwischen Radiusvektor und positiver x-Achse.

Anmerkung: Es gilt stets $r \geq 0$ (für $r = 0$ ist φ beliebig). In der Regel wählt man den sogenannten *Hauptwert* $-\pi < \varphi \leq \pi$ (oder $0 \leq \varphi' < 2\pi$), wobei

$$\varphi' = \begin{cases} \varphi & \text{für} \quad \varphi \in [0, \pi] \\ \varphi + 2\pi & \text{für} \quad \varphi \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

Umrechnung:

- Polarkoordinaten $\rightarrow$ kartesische Koordinaten:

$$x = r \cos\varphi, \quad y = r \sin\varphi.$$

- Kartesische Koordinaten $\rightarrow$ Polarkoordinaten:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \pm \arccos \frac{x}{r}, \text{ wobei}$$

oberes (unteres) Vorzeichen für $y \geq 0$ ($y < 0$).