Prof. Paditz - SS2018

Vorl. Prof. Oestreich - Vertretung Prof. Paditz

Prüfungsvorbereitung Mathematik 2 (Teil 3)

===

5. Spezielle Kapitel

=================

A) Nachweis der Konvergenz mit dem Quotienten- oder Leibniz-Kriterium, Taylor-Reihen von Funktionen, Konvergenzbereich, Integration durch Reihenentwicklung, Fourier-Reihen:

5.1. 4d), 5a), 8d), 14c), 18a)

B) Komplexe Zahlen, komplexe Lösungen algebraischer Gleichungen, Eigenwerte und -vektoren:

5.2. 9b), 15c), **5.3.** 1c)

6. Differentialgleichungen

========================

A) Lösung von Anfangswertaufgaben für Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Trennung der Variablen (auch mit vorheriger Substitution), lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung (Anfangswertprobleme):

6.1. 21b), 23b)

B) Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten (Anfangswertprobleme):

6.1. 30g)

Aufg. 5.1. 4d)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{100^n}{n!}\right), \quad a_n=\frac{100^n}{n!}$$

Define $a(n)=\frac{100^n}{n!}$

done

$a(n+1)/a(n)$

$$\frac{100\cdot n!}{(n+1)!}$$

simplify(ans)

$$\frac{100}{n+1}$$

$q=\lim\limits_{n\to\infty}(\text{ans})$

q=0

Reihe konvergent.

Anmerkungen:

taylor(e^x, x, 10)

$$\frac{x^{10}}{3628800}+\frac{x^9}{362880}+\frac{x^8}{40320}+\frac{x^7}{5040}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}+$$

seq($\frac{x^n}{n!}$, n, 10, 0, −1)

$$\left\{\frac{x^{10}}{3628800},\frac{x^9}{362880},\frac{x^8}{40320},\frac{x^7}{5040},\frac{x^6}{720},\frac{x^5}{120},\frac{x^4}{24},\frac{x^3}{6}\right.$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right)=e^x$, d.h.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{100^n}{n!}\right)=e^{100}-1.$

Aufg. 5.1.5a), $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\right)$$

$$\frac{-\pi}{4}+1$$

Leibnitz-Kriterium erfüllt: a_n alternierend und $|a_n|$ streng monoton fallende Nullfolge

Aufg. 5.1.8d), $a_n=\frac{n^2}{n!}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n!}(x-1)^{n+1}\right)=(x-1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n!}(x-1)^n\right)$$

Define $a(n)=\frac{n^2}{n!}$

done

a(n)/a(n+1)

$$\frac{n^2\cdot(n+1)!}{(n+1)^2\cdot n!}$$

simplify(ans)

$$\frac{n^2}{n+1}$$

$r=\lim\limits_{n\to\infty}(\text{ans})$

$r=\infty$

Die Potenzreihe ist überall konvergent.

Zusatz:

$$(x-1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n!}(x-1)^n\right)=(x-1)^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{(n-1)!}(x-1)^{n-1}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{(n-1)!}(x-1)^{n-1}\right)=\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!}(x-1)^n\right)\right)=$$

$$\frac{d}{dx}\left((x-1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!}(x-1)^{n-1}\right)\right)=$$

$$\frac{d}{dx}\left((x-1)e^{x-1}\right)$$

$$x\cdot e^{x-1}$$

somit $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n!}(x-1)^{n+1}\right)=(x-1)^2x\cdot e^{x-1}$

$$\sum_{n=1}^{5}\left(\frac{n^2}{n!}(x-1)^{n+1}\right)$$

$$\frac{5\cdot(x-1)^6}{24}+\frac{2\cdot(x-1)^5}{3}+\frac{3\cdot(x-1)^4}{2}+2\cdot(x-1)^3+(x-1)^2$$

taylor$((x-1)^2x\cdot e^{x-1}, x, 6, 1)$

$$\frac{5\cdot(x-1)^6}{24}+\frac{2\cdot(x-1)^5}{3}+\frac{3\cdot(x-1)^4}{2}+2\cdot(x-1)^3+(x-1)^2$$

Aufg. 5.1. 14c)

$$\int_0^1 xe^{-x^3}dx$$

$$0.3498961639$$

taylor$(xe^{-x^3}, x, 10)$

$$\frac{-x^{10}}{6}+\frac{x^7}{2}-x^4+x$$

approx$\left(\int_0^1 \text{ans}\,dx\right)$

$$0.3473484848$$

$\text{taylor}(xe^{-x^3}, x, 25)$

$$\frac{x^{25}}{40320}-\frac{x^{22}}{5040}+\frac{x^{19}}{720}-\frac{x^{16}}{120}+\frac{x^{13}}{24}-\frac{x^{10}}{6}+\frac{x^{7}}{2}-x^4+x$$

$\text{approx}\left(\int_0^1 \text{ans}\,dx\right)$

$$0.349896251$$

Ergebnis: $\int_0^1 xe^{-x^3}\,dx \approx 0.349896$

Aufg. 5.1. 18a)

Man skizziere die periodische Fortsetzung der folgenden Funktion und bestimme deren Fourier-Reihe:

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & 0\le x<1\\ 1+x, & -1\le x<0\end{cases}$$

(stetiger Verlauf, Dreiecksimpuls, gerade Funktion)

d.h. $f(x)=1-|x|,\ -1\le x<1$

2D-Grafik Y1:··· Y2:···

Define $a(k)=2*\int_0^1 (1-x)*\cos(k\pi x)\,dx$

done

$a(k)$

$$\frac{-2\cdot(\cos(k\cdot\pi)-1)}{k^2\cdot\pi^2}$$

$\cos(k\pi)=(-1)^k$

$$\cos(k\cdot\pi)=(-1)^k$$

Define $a(k)=\frac{-2\cdot\left((-1)^{k}-1\right)}{k^{2}\cdot\pi^{2}}$

done

$a0=2*\int_{0}^{1}(1-x)*\cos(0\pi x)\,dx$

a0=1

Define $s(n)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a(k)\cos(k\pi x))$

done

s(5)

$$\frac{4\cdot\cos(x\cdot\pi)}{\pi^{2}}+\frac{4\cdot\cos(5\cdot x\cdot\pi)}{25\cdot\pi^{2}}+\frac{4\cdot\cos(3\cdot x\cdot\pi)}{9\cdot\pi^{2}}+\frac{1}{2}$$

2D–Grafik

Forierreihe:

$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\cdot\left((-1)^{k+1}+1\right)}{k^{2}\cdot\pi^{2}}\cos(k\pi x)\right)$

$=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi^{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\left((-1)^{k+1}+1\right)}{k^{2}}\cos(k\pi x)\right)$, k ungerade!

$=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos((2k-1)\pi x)}{(2k-1)^{2}}\right)$

Aufg. 5.2. 9b)

Berechne Sie $\sqrt[3]{3-\sqrt{3}\,i}$

compToPol$(3-\sqrt{3}\,i)$

$$2\cdot\sqrt{3}\cdot e^{\pi\cdot\frac{-i}{6}}$$

$\sqrt[3]{2\cdot\sqrt{3}}\cdot e^{\pi\cdot\frac{-i}{6*3}}*e^{\frac{2\pi i}{3}}*\{0,1,2\}$

$$\left\{3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot e^{\frac{-\pi\cdot i}{18}}, -3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\cdot i}{2}\right)\cdot e^{\frac{-\pi\cdot i}{18}}, -3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}} \blacktriangleright\right.$$

approx(listToMat(ans))

$$\begin{bmatrix} 1.490098577-0.262744583\cdot i \\ -0.5175058049+1.421835513\cdot i \\ -0.9725927721-1.15909093\cdot i \end{bmatrix}$$

Hauptwurzel z_0

z_0:=approx(cExpand($3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot e^{\frac{-\pi\cdot i}{18}}$))

$$1.490098577-0.262744583\cdot i$$

1. Nebenwurzel z_1

z_1:=approx(cExpand($-3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\cdot i}{2}\right)\cdot e^{\frac{-\pi\cdot i}{18}}$))

$$-0.5175058049+1.421835513\cdot i$$

2. Nebenwurzel z_2

z_2:=approx(cExpand($-3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\cdot i}{2}\right)\cdot e^{\frac{-\pi\cdot i}{18}}$))

$$-0.9725927721-1.15909093\cdot i$$

Aufg. 5.2.15c)

Man prüfe, ob $z=1+i$ eine Lösung der folgenden Gleichung ist und gebe gegebenenfalls die anderen Lösungen dieser Gleichung an:

$z^3-4z^2+(6+i)z-3-i=0$

$$z^3-4\cdot z^2+(6+i)\cdot z-3-i=0$$

solve($z^3-4z^2+(6+i)z-3-i=0$, z)

$$\left\{ z=\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{3}\cdot(12\cdot\sqrt{-24+18\cdot i}-28-36\cdot i)^{\frac{1}{3}}\cdot i}{12}+\frac{(-1+}{(12\cdot\sqrt{-24+1}} \right.$$

approx(ans)

$$\{z=1+i, z=2-i, z=1\}$$

$(z-(1+i))(z-(2-i))(z-1)$

$$(z-1)\cdot(z-1-i)\cdot(z-2+i)$$

expand(ans)

$$z^3-4\cdot z^2+(6+i)\cdot z-3-i$$

$\dfrac{z^3-4z^2+(6+i)z-3-i}{z-(1+i)}$

$$\frac{z^3-4\cdot z^2+(6+i)\cdot z-3-i}{z-1-i}$$

simplify(ans

$$(z-1)\cdot(z-2+i)$$

expand(ans)

$$z^2+(-3+i)\cdot z+2-i$$

solve($z^2+(-3+i)\cdot z+2-i=0$, z)

$$\{z=1, z=2-i\}$$

Aufg. 5.3. 1c)

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der folgenden Matrix

$A:=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

eigVl(A)

$$\{2, 2\}$$

Eigenwerte: 2 zweifach

eigVc(A)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eigenvektor: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ zm Eigenwert 2

$\det(A-\lambda * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})=0$

$$\lambda^2-4\cdot\lambda+4=0$$

solve(ans, λ)

$$\{\lambda=2\}$$

Aufg. 6.1.21b)

Lösen Sie die folgenden Diffrenzialgleichung 1. Ordnung:

$y'=(1-y)^2$ (nichtlin. Dgl.)

dSolve($y'=(1-y)^2$, x, y)

$$\left\{y=\frac{x-\text{const}(1)-1}{x-\text{const}(1)}\right\}$$

$$y(x)=\frac{x-C-1}{x-C}=1-\frac{1}{x-C}$$

TdV: $\dfrac{dy}{(1-y)^2}=dx$ ergibt

$$\int \frac{1}{(1-y)^2}dy=\int 1dx+C$$

$$\frac{-1}{y-1}=x+C$$

solve(ans, y)

$$\left\{y=\frac{x+C-1}{x+C}\right\}$$

Aufg. 6.1.23b)

Lösen Sie die folgenden Differenzialgleichungen 1. Ordnung mit den entsprechenden Anfangsbedingungen:

$y'+\frac{y}{1+x}=e^{2x}$, $y(0)=1$ (inhom. lin. Dgl. mit nichtkonst. Koeff.)

$\mathrm{dSolve}\left(y'+\frac{y}{1+x}=e^{2x}, x, y, x=0, y=1\right)$

$$\left\{y=\frac{x\cdot e^{2\cdot x}}{2\cdot(x+1)}+\frac{e^{2\cdot x}}{4\cdot(x+1)}+\frac{3}{4\cdot(x+1)}\right\}$$

hom. Dgl. mit TdV: $\frac{dy}{y}=\frac{-dx}{1+x}$

$\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{-1}{1+x}dx+C$

$$\ln(|y|)=-\ln(|x+1|)+C$$

solve(ans, y)

$$\left\{y=\frac{-e^{C}}{|x+1|}, y=\frac{e^{C}}{|x+1|}\right\}$$

$y(x)=\frac{K}{1+x}$, $K=\pm e^{C}$ oder $K=0$

VdK für partik. Lös.

$y(x)=\frac{K(x)}{1+x}$, $y'(x)=\frac{K'(x)}{1+x}-\frac{K(x)}{(1+x)^2}$ ergibt

$y'+\frac{y}{1+x}=\frac{K'(x)}{1+x}-\frac{K(x)}{(1+x)^2}+\frac{K(x)}{(1+x)^2}=e^{2x}$

$K'(x)=(1+x)e^{2x}$

$K=\int(1+x)e^{2x}dx$

$$K=\frac{2\cdot x\cdot e^{2\cdot x}+e^{2\cdot x}}{4}$$

Define $y(x)=\frac{K}{1+x}+\frac{2\cdot x\cdot e^{2\cdot x}+e^{2\cdot x}}{4(1+x)}$

done

$y(0)=1$

$K+\frac{1}{4}=1$

K=3/4

Aufg. 6.1.30g)

Lösen Sie die folgendes Anfangswertproblem:

$y''+6y'+10y=\cos(x)$, $y(0)=0$, $y'(0)=4$

dSolve(y''+6y'+10y=cos(x),x,y,x=0,y=0,x=0,y'=4)

$\left\{y=\frac{-\cos(x)\cdot e^{-3\cdot x}}{13}+\frac{145\cdot\sin(x)\cdot e^{-3\cdot x}}{39}+\frac{\cos(x)}{13}+\frac{2\cdot\sin(x}{39}\right.$

char. Gl., hom.Dgl.

solve(λ^2+6λ+10=0,λ)

$\{\lambda=-3-i,\lambda=-3+i\}$

$y=C_1e^{-3\cdot x}\cos(x)+C_2e^{-3\cdot x}\sin(x)$

Ansatz für partik. Lös.

DelVar x,y,A,B

done

Define y(x)=A*cos(x)+B*sin(x)

done

$\frac{d^2}{dx^2}(y(x))+6\frac{d}{dx}(y(x))+10y(x)=\cos(x)$

$10\cdot(A\cdot\cos(x)+B\cdot\sin(x))+6\cdot(B\cdot\cos(x)-A\cdot\sin(x))-A\cdot\cos($

simplify(ans)

$9\cdot A\cdot\cos(x)+6\cdot B\cdot\cos(x)-6\cdot A\cdot\sin(x)+9\cdot B\cdot\sin(x)=\cos(x)$

$9\cdot A\cdot\cos(x)+6\cdot B\cdot\cos(x)=\cos(x)$

und $-6\cdot A\cdot\sin(x)+9\cdot B\cdot\sin(x)=0$

$$\left\{\begin{array}{l} 9\cdot A+6\cdot B=1 \\ -6\cdot A+9\cdot B=0 \end{array}\right|_{A,B}$$

$$\left\{A=\frac{1}{13}, B=\frac{2}{39}\right\}$$

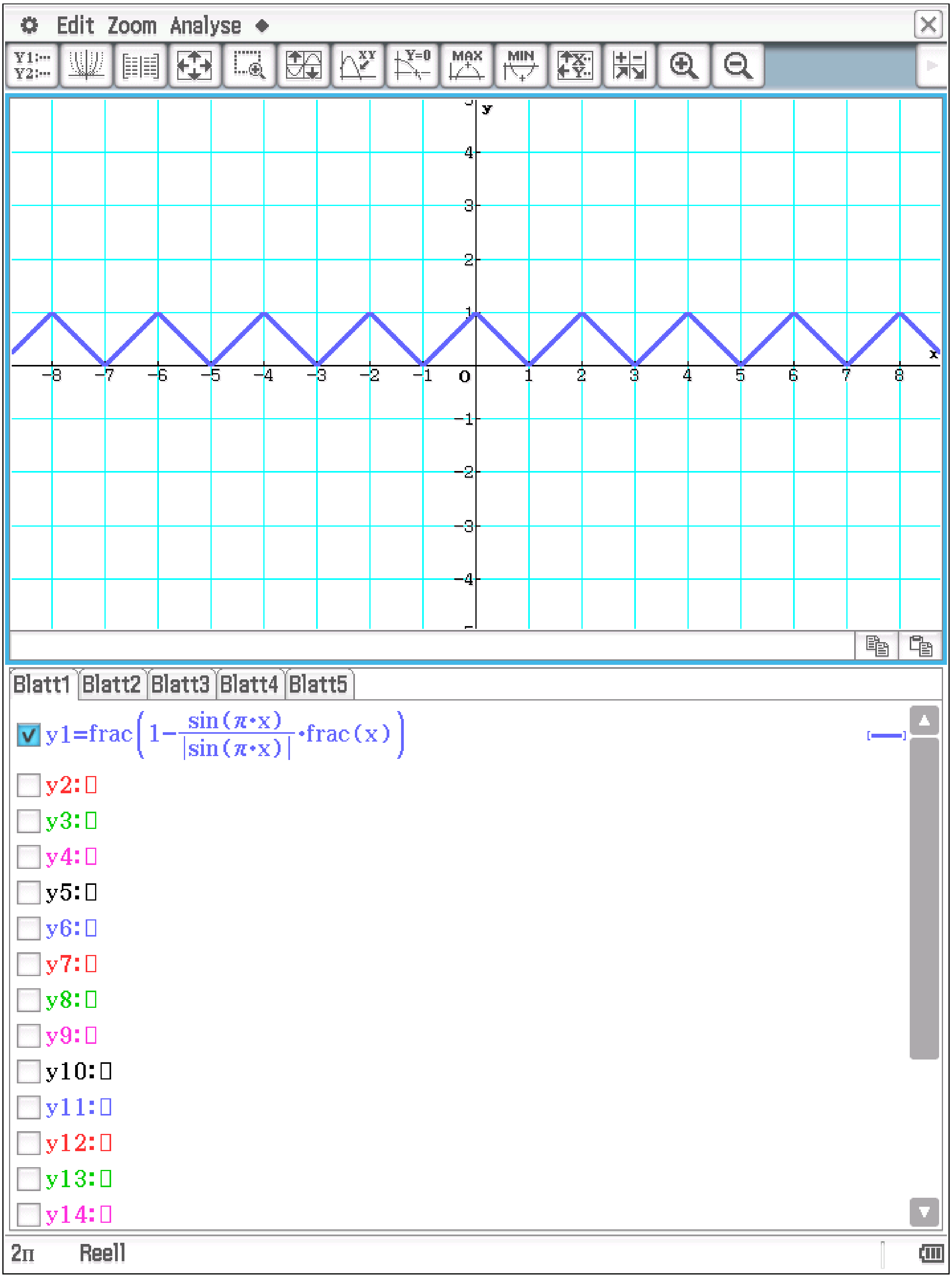
Define $y(x)=C1e^{-3\cdot x}\cos(x)+C2e^{-3\cdot x}\sin(x)+\frac{1}{13}*\cos(x)$

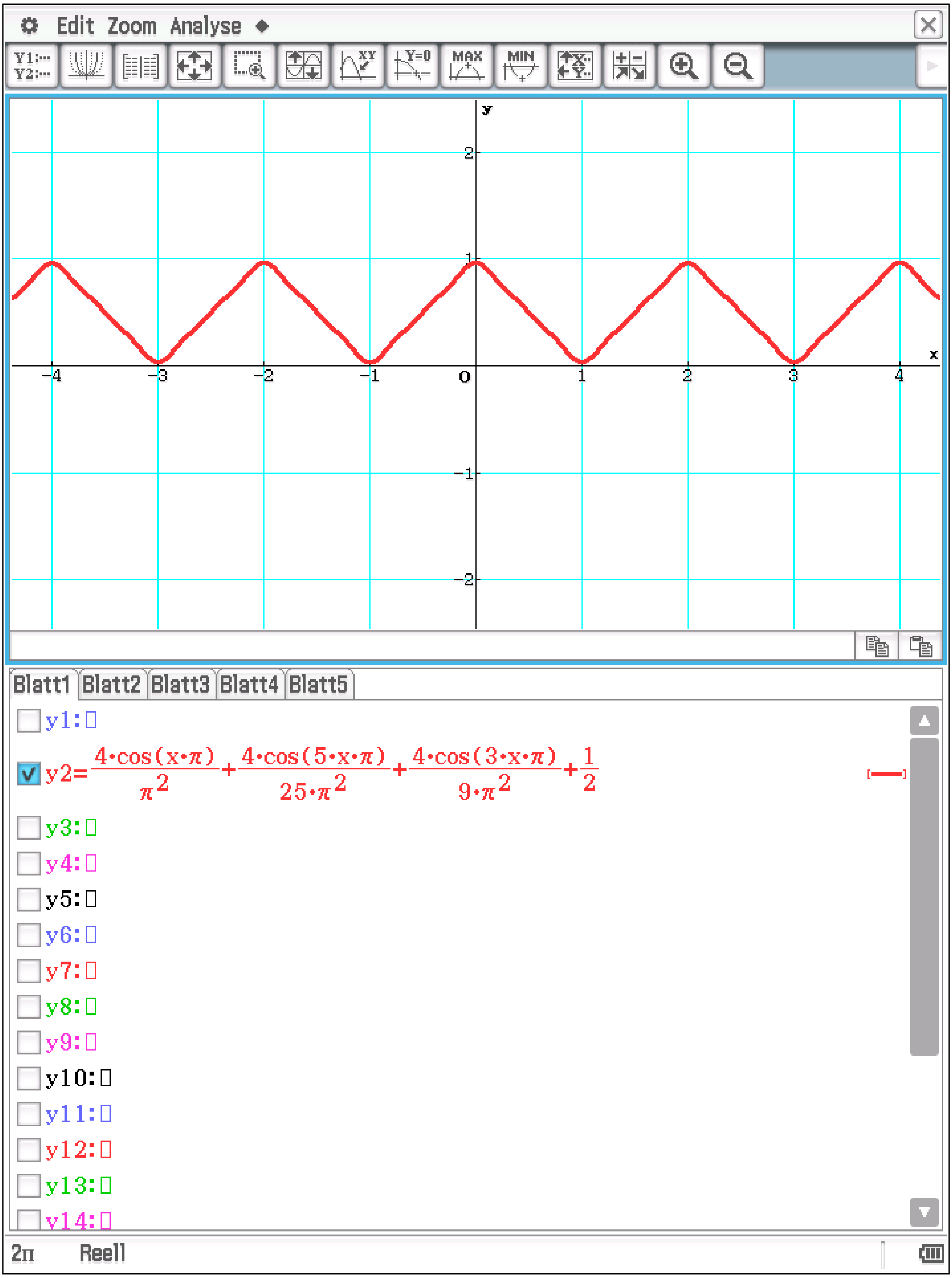
done

$$\left\{\begin{array}{l} y(0)=0 \\ \frac{d}{dx}(y(x))=4\,|\,x=0 \end{array}\right|_{C1,C2}$$

$$\left\{C1=-\frac{1}{13}, C2=\frac{145}{39}\right\}$$

Aufg. 5.1.18a) Dreiecksimpuls




Edit Zoom Analyse
y
x
2
1
-1
-2
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
y1:
y2= 4·cos(x·π)/π^2 + 4·cos(5·x·π)/(25·π^2) + 4·cos(3·x·π)/(9·π^2) + 1/2
y3:
y4:
y5:
y6:
y7:
y8:
y9:
y10:
y11:
y12:
y13:
y14:
2π Reell