Prof. Paditz – SS2018

Vorl. Prof. Oestreich – Vertretung Prof. Paditz

Prüfungsvorbereitung Mathematik 2 (Teil 2)

=======================================

4. Differential- und Integralrechnung (2)

=====================================

A) Höhenlinien von Funktionen zweier Variabler,

Tangentialebene:

4.1. 1h), 6b)

B) Berechnung des absoluten, relativen und prozentualen

Fehlers, Taylor-Formel, Gradient, Rotation, Divergenz:

4.2. 8, 24b), 27c), 32d), 35c)

C) Relative Extrema von Funktionen zweier Variabler, Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen, Bestimmung

der Regressionsgeraden bzw. von Potenz- bzw.

Exponentialfunktionen als Ausgleichskurve:

4.3. 7, 20

D) Berechnung von Doppel- und Dreifachintegralen,

Bestimmung der Arbeit für ein ebenes Kraftfeld:

4.4. 7, 19

Aufg. 4.1. 1h)

Skizzieren Sie die Höhenlinien der folgenden Funktion

(Fläche):

$z=f(x,y)=9x^2+16y^2$

Lösung: $9x^2+16y^2=c\geq 0$ Ellipsen $M(0,0)$, $a=\sqrt{c}/3$,

$b=\sqrt{c}/4$

Define xt1(t)=$\sqrt{c}$/3*cos(t)

done

Define $yt1(t)=\sqrt{c}/4*\sin(t)$

done

c:={1,2,3,4,5}

{1,2,3,4,5}

2D−Grafik	Y1:··· Y2:···

3D−Grafik	Z1:··· Z2:···

Aufg. 4. 1. 6b)

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene der

Funktion $z=f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$

3D−Grafik	Z1:··· Z2:···

Aufg. 4. 2. 8

Es wurden gemessen die Widerstände:

$R_1=(851,4\pm0,5)\Omega$, $R_2=(252,1\pm0,4)\Omega$.

Man berechne hieraus $R=\frac{R_1*R_2}{R_1+R_2}$ sowie den absoluten,

relativen und prozentualen Maximalfehler von R.

Lösung:

Define $R(R_1,R_2)=\frac{R_1*R_2}{R_1+R_2}$

done

$dR=\frac{d}{dR_1}(R)\,dR_1+\frac{d}{dR_2}(R)\,dR_2$ (partielle Ableitungen)

$\frac{d}{dR_1}(R(R_1,R_2))$

$$\frac{R_2{}^2}{(R_1+R_2)^2}$$

approx(ans|{R_1=851.4, R_2=252.1})

0.05219164872

$\frac{d}{dR_2}(R(R_1,R_2))$

$$\frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2}$$

approx(ans|{R_1=851.4, R_2=252.1})

0.5952818164

absoluter Maximalfehler:

dR:=approx(0.05219164872*0.5+0.5952818164*0.1)

0.085624006

approx($\frac{R_1*R_2}{R_1+R_2}$|{R_1=851.4, R_2=252.1})

194.5065156

relativer Maximalfehler:

approx($\frac{0.085624006}{194.5065156}$)

4.402115052E-4

pozentualer Maximalfehler:

approx(ans*100)

0.04402115052

Aufg. 4.2. 24b)

Entwickeln Sie die Funktion $f(x,y)=\exp(x^2+y^2)$ in ein Taylor-Polynom zweiter Ordnung um den Punkt $(x_0,y_0)=(0,0)$.

Lösung:

$f(x,y)=f(x_0,y_0)$

$+\left(\frac{d}{dx}(f(x,y))\ |\ (x,y)=(x_0,y_0)\right)(x-x_0)$

$$+\left(\frac{d}{dy}(f(x,y)) \mid (x,y)=(x_0,y_0)\right)(y-y_0)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y)) \mid (x,y)=(x_0,y_0)\right)(x-x_0)^2$$

$$+\frac{1}{2}2\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}(f(x,y))\right) \mid (x,y)=(x_0,y_0)\right)(x-x_0)(y-y_0)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dy^2}(f(x,y)) \mid (x,y)=(x_0,y_0)\right)(y-y_0)^2$$

Rechnung:

Define $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$

done

$x_0:=0$

0

$y_0:=0$

0

$f(x_0,y_0)+\left(\frac{d}{dx}(f(x,y)) \mid \{x=0,y=0\}\right)(x-x_0)+\left(\frac{d}{dy}(f(x,y\right.$ ▶

x^2+y^2+1

Ergebnis: $f(x,y)\approx x^2+y^2+1$

Aufg. 4. 2. 27c)

Man bestimme die Richtung, in welcher die durch

$z=f(x,y)=2x^2-x*y^2+15\ln(y^2+1)-6\sqrt{y}\cos(2x-3)$

gegebene Fläche im Punkt $P=(x_0,y_0)=(\frac{3}{2},3)$ am

stärksten ansteigt.

Welchen Winkel α[Grad] bildet diese Richtung mit der x-Achse und wie groß ist der Anstieg?

Lösung:

Define $f(x,y)=2x^2-x*y^2+15\ln(y^2+1)-6\sqrt{y}\cos(2x-3)$

done

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx}(f(x,y)) \\ \frac{d}{dy}(f(x,y)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -y^2+12\cdot\sqrt{y}\cdot\sin(2\cdot x-3)+4\cdot x \\ \frac{-\left(2\cdot x\cdot y^{\frac{7}{2}}+3\cdot y^2\cdot\cos(2\cdot x-3)+2\cdot x\cdot y^{\frac{3}{2}}-30\cdot y^{\frac{3}{2}}+3\cdot\cos(2\cdot x\right.}{\sqrt{y}\cdot(y^2+1)} \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} -y^2+12\cdot\sqrt{y}\cdot\sin(2\cdot x-3)+4\cdot x \\ \frac{-\left(2\cdot x\cdot y^{\frac{7}{2}}+\cos(2\cdot x-3)\cdot(3\cdot y^2+3)+2\cdot x\cdot y^{\frac{3}{2}}-30\cdot y^{\frac{3}{2}}\right)}{\sqrt{y}\cdot(y^2+1)} \end{bmatrix}$$

ans|{x=3/2, y=3}

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Richtung in x–y–Ebene (Def.–Bereich): $\text{grad}(f)=\begin{bmatrix} -3 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}$

$$\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} -3 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)/\text{norm}\left(\begin{bmatrix} -3 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}\right)$$

$$\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha:=\cos^{-1}(\text{ans})*\frac{180}{\pi}$$

150

Ergebnis: $\boldsymbol{\alpha=150°\quad(360°-150°=210°)}$

Maximal−Anstieg:

$\mathbf{tan(\gamma)=}\text{grad}(f)*\frac{s}{\text{norm}(s)}$ mit $s=\text{grad}(f)$, d.h.

$\mathbf{tan(\gamma)=norm(grad(f))}$

$\text{norm}\left(\begin{bmatrix}-3\\-\sqrt{3}\end{bmatrix}\right)$

$$2\cdot\sqrt{3}$$

$\gamma=\text{approx}(\tan^{-1}(\text{ans})*\frac{180}{\pi})$

$$73.89788625$$

Aufg. 4.2. 32d)

Berechnen Sie die Rotation für folgendes Vektorfeld

$\mathbf{a}=\mathbf{a}(x,y,z)=\begin{bmatrix}x^2+y^2\\x*y\\0\end{bmatrix}.$

Ist das Vektorfeld konservativ? Was bedeutet das physikalisch?

Lösung:

$\text{rot}(\mathbf{a})=\det\left(\begin{bmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\x^2+y^2 & x*y & 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\\-y\end{bmatrix}$

$\text{rot}(\mathbf{a})\neq\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$, d.h. nicht wirbelfrei (also **nicht konservativ**)

$\mathbf{a}(x,y,z)$ ist kein Gradient eines skalaren Feldes.

Aufg. 4.2. 35c)

Bei einer Diffusion ist die Konzentration c des eindringenden Stoffes als Funktion des Ortes $c=c(x,y,z)$ gegeben. Aufgrund des Fickschen Gesetzes wird der Diffusionsstrom vom Gradienten der Konzentration bestimmt. Bestimmen Sie für die Konzentrationen $c=x+y+z$ den Gradienten. Berechnen Sie die Divergenz des entsprechenden Gradientenfeldes allgemein und im Punkt $P=(1,1,1)$.

Lösung:

$$\mathrm{grad}(c)=\begin{bmatrix}\frac{d}{dx}(c)\\ \frac{d}{dy}(c)\\ \frac{d}{dz}(c)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$\mathrm{div}(\mathrm{grad}(c))=$

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{grad}(c))+\frac{d}{dy}(\mathrm{grad}(c))+\frac{d}{dz}(\mathrm{grad}(c))=0$$

Aufg. 4.3.7

Es ist die folgende Funktion von 2 Variablen gegeben:

$z=f(x,y)=4-(x^2+y^2)$.

a) Skizzieren Sie die Höhenlinien.

b) Bestimmen die (relativen) Extrema der Funktion. (Nachweis!) Sind die ermittelten Punkte absolute Extrema?

c) Wie lauten die Extrema unter der Nebenbedingung $x+y=1$?

Überprüfen Sie, ob die Funktion an den

"extremwertverdächtigen" Stellen tatsächlich einen Extremwert unter der angegebenen Nebenbedingung hat und welcher Art dieser ist.

Lösung: nach unten geöffneter Paraboloid (NB ist eine Gerade im Def.-Bereich)

zu a)

$4-(x^2+y^2)=c\leq 4.$ d.h.

$x^2+y^2=4-c$

Define $xt2(t)=\sqrt{4-c}\cos(t)$

done

Define $yt2(t)=\sqrt{4-c}\sin(t)$

done

c:={3,2,1,0,-1,-2,-3}

{3,2,1,0,-1,-2,-3}

2D-Grafik	Y1:… Y2:…

Define xst3(s,t)=t

done

Define yst3(s,t)=1-t

done

Define zst3(s,t)=s

done

3D-Grafik	Z1:… Z2:…

zu b)

absolutes Max: f(0,0)=4

zu c)

Define $f(x,y)=4-(x^2+y^2)$

done

$f(x,1-x)$

$-(x-1)^2-x^2+4$

fMax(f(x,1−x),x)

$\left\{\text{MaxValue}=\frac{7}{2},\ x=\frac{1}{2}\right\}$

$y=1-x=\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$\frac{7}{2}$

Lagrange-Methode:

Define $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda*(x+y-1)$

done

$$\left.\begin{cases}\frac{d}{dx}(F(x,y,\lambda))=0\\ \frac{d}{dy}(F(x,y,\lambda))=0\\ \frac{d}{d\lambda}(F(x,y,\lambda))=0\end{cases}\right|_{x,y,\lambda}$$

$\left\{x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2},\ \lambda=1\right\}$

Max. unter der NB: $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{2}$

stop

Aufg. 4.3.20

nichtlineare Regression (exponentelle Regession)

```
listx:=seq(x,x,0,3,1)
```
$$\{0,1,2,3\}$$

```
listy:={1.2,2.6,6.4,21.9}
```
$$\left\{\frac{6}{5},\frac{13}{5},\frac{32}{5},\frac{219}{10}\right\}$$

```
approx(ans)
```
$$\{1.2,2.6,6.4,21.9\}$$

MKQ:

Define $f(a,b,x)=a*e^{b*x}$

done

$\text{sum}((\text{listy}-f(a,b,\text{listx}))^2)$

$$\left(a\cdot e^{3\cdot b}-\frac{219}{10}\right)^2+\left(a\cdot e^{2\cdot b}-\frac{32}{5}\right)^2+\left(a\cdot e^{b}-\frac{13}{5}\right)^2+\left(a-\frac{6}{5}\right)^2$$

Define $F(a,b)=\left(a\cdot e^{3\cdot b}-\frac{219}{10}\right)^2+\left(a\cdot e^{2\cdot b}-\frac{32}{5}\right)^2+\left(a\cdot e^{b}-\right.$ ▶

done

$\frac{d}{da}(F(a,b))=0$

$$\frac{10\cdot a\cdot e^{6\cdot b}+10\cdot a\cdot e^{4\cdot b}-219\cdot e^{3\cdot b}+10\cdot a\cdot e^{2\cdot b}-64\cdot e^{2\cdot b}-26\cdot}{5}$$ ▶

solve(ans,a)

$$\left\{a=\frac{219\cdot e^{3\cdot b}+64\cdot e^{2\cdot b}+26\cdot e^{b}+12}{10\cdot\left(e^{6\cdot b}+e^{4\cdot b}+e^{2\cdot b}+1\right)}\right\}$$

$\frac{d}{db}(F(a,b))=0$

$$\frac{30\cdot a^2\cdot e^{6\cdot b}+20\cdot a^2\cdot e^{4\cdot b}-657\cdot a\cdot e^{3\cdot b}+10\cdot a^2\cdot e^{2\cdot b}-128\cdot a\cdot}{5}$$ ▶

$5*\text{ans}|a=\frac{219\cdot e^{3\cdot b}+64\cdot e^{2\cdot b}+26\cdot e^{b}+12}{10\cdot\left(e^{6\cdot b}+e^{4\cdot b}+e^{2\cdot b}+1\right)}$

$$\frac{3\cdot(219\cdot e^{3\cdot b}+64\cdot e^{2\cdot b}+26\cdot e^{b}+12)^{2}\cdot e^{6\cdot b}}{10\cdot(e^{6\cdot b}+e^{4\cdot b}+e^{2\cdot b}+1)^{2}}+\frac{(219\cdot e^{3\cdot b}+6}{5\cdot(e^{6}}$$

simplify(ans)

$$\frac{(219\cdot e^{3\cdot b}+64\cdot e^{2\cdot b}+26\cdot e^{b}+12)\cdot(64\cdot e^{7\cdot b}-167\cdot e^{6\cdot b}+36}{10\cdot(e^{4\cdot b}+1)^{2}}$$

solve$(64\cdot e^{7\cdot b}-167\cdot e^{6\cdot b}+36\cdot e^{5\cdot b}-412\cdot e^{4\cdot b}-40\cdot e^{3\cdot b}-6$

{b=1.160002499}

approx$\left(a=\frac{219\cdot e^{3\cdot b}+64\cdot e^{2\cdot b}+26\cdot e^{b}+12}{10\cdot(e^{6\cdot b}+e^{4\cdot b}+e^{2\cdot b}+1)}\right|$ans)

a=0.6722968066

f(a, b, x)|{a=0.6722968066, b=1.160002499}

$$\frac{4258371\cdot e^{\frac{11530397\cdot x}{9939976}}}{6334064}$$

approx(ans)

$$0.6722968066\cdot 2.718281828^{1.160002499\cdot x}$$

approx(f(a, b, 1.5)|{a=0.6722968066, b=1.16000249

3.830320147

approx(f(a, b, 4)|{a=0.6722968066, b=1.160002499})

69.61323007

MSe:

approx$\left(\frac{F(a, b)}{2}\right|$ {a=0.6722968066, b=1.160002499})

0.3432088566

quasilin. Regression:

ExpReg listx, listy

done

DispStat

done

===================

Exp. Regression

y=a*e^(b*x)

a = 1.081298

b = 0.9613282

r = 0.9941811

r^2 = 0.9883961

MSe = 0.0271241

===================

tatsächlicher MSe:

approx($\frac{F(a,b)}{2}$|{a=1.081298,b=0.9613282})

3.806326951

MSe quasilinear:

approx(sum((ln(listy)−ln(f(a,b,listx)))^2)/2)

$0.5\cdot((\ln(a)+3\cdot b-3.086486637)^2+(\ln(a)+2\cdot b-1.8562$

approx(ans|{a=1.081298,b=0.9613282})

0.02712411906

Fazit: die quasilin. Regression liefert nicht die optimalen Koeffizienten!

STAT−Editor

Aufg. 4.4.7

$y=x$, $y=2x$, $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=100$, $x,y\geq 0$

2D−Grafik

Polarkoordinaten: $x=r*\cos(\varphi)$, $y=r*\sin(\varphi)$

$\frac{\pi}{4}=\arctan(1)\le\varphi\le\arctan(2)$, $2\le r\le 10$

$$\int_{2}^{10}\int_{\tan^{-1}(1)}^{\tan^{-1}(2)} r*\cos(\varphi)*r\,d\varphi\,dr$$

$$\frac{1984\cdot\sqrt{5}}{15}-\frac{496\cdot\sqrt{2}}{3}$$

$$\int_{\tan^{-1}(1)}^{\tan^{-1}(2)}\int_{2}^{10} r*\cos(\varphi)*r\,dr\,d\varphi$$

$$\frac{1984\cdot\sqrt{5}}{15}-\frac{496\cdot\sqrt{2}}{3}$$

approx(ans)

61.94061551

Aufg. 4.4.19

Kurvenintegral 2.Art in der x-y-Ebene:

Kurve C: $x(t)=\sin(t)$, $y(t)=1-\cos(t)$, $0\le t\le\pi/2$.

Kraftfeld $\mathbf{F}(x,y)=\begin{bmatrix} 2x*y \\ x^2 \end{bmatrix}$

a) Skizzieren Sie den Weg.

b) Man berechne die verrichtete Arbeit entlang der gegebenen Kurve.

c) Man berechne die verrichtete Arbeit bei der Verschiebung eines Massenpunktes von $P_1=(0,0)$ nach $P_2=(1,1)$ auf einem (beliebigen) Verbindungsweg.

d) Ist das Feld konservativ?

Lösung:

zu a)

Define xt1(t)=sin(t)

done

Define yt1(t)=1−cos(t)

done

2D−Grafik	Y1:⋯ Y2:⋯

zu b)

Weg $P_0=(0,0)$ nach $P_1=(1,1)$

$$W=\int_{P_0}^{P_1} F\circ dr \quad \text{mit} \quad \mathbf{F}(x,y)=\begin{bmatrix} 2x*y \\ x^2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad dr=\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

$$r(t)=\begin{bmatrix} xt1(t) \\ yt1(t) \end{bmatrix}, \quad r'(t)=\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}(xt1(t)) \\ \frac{d}{dt}(yt1(t)) \end{bmatrix}$$

$$\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} 2xt1(t)*yt1(t) \\ xt1(t)^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}(xt1(t)) \\ \frac{d}{dt}(yt1(t)) \end{bmatrix}\right)$$

$$(\sin(t))^3-2\cdot(\cos(t)-1)\cdot\cos(t)\cdot\sin(t)$$

$$W=\int_0^{\pi/2} \text{ans}\,dt$$

W=1

zu c) $W=\int_{P_0}^{P_1} F\circ dr=1$

$$\text{rot}(\mathbf{F})=\det\left(\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x*y & x^2 & 0 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{d.h.}$$

Wegunabhängigkeit

zu d) Ja, konservativ

Zusatz: F=grad(U) Bestimmung von U(x,y)

Integrationsweg von $P_0=(0,0)$ nach $P=(x,y)$

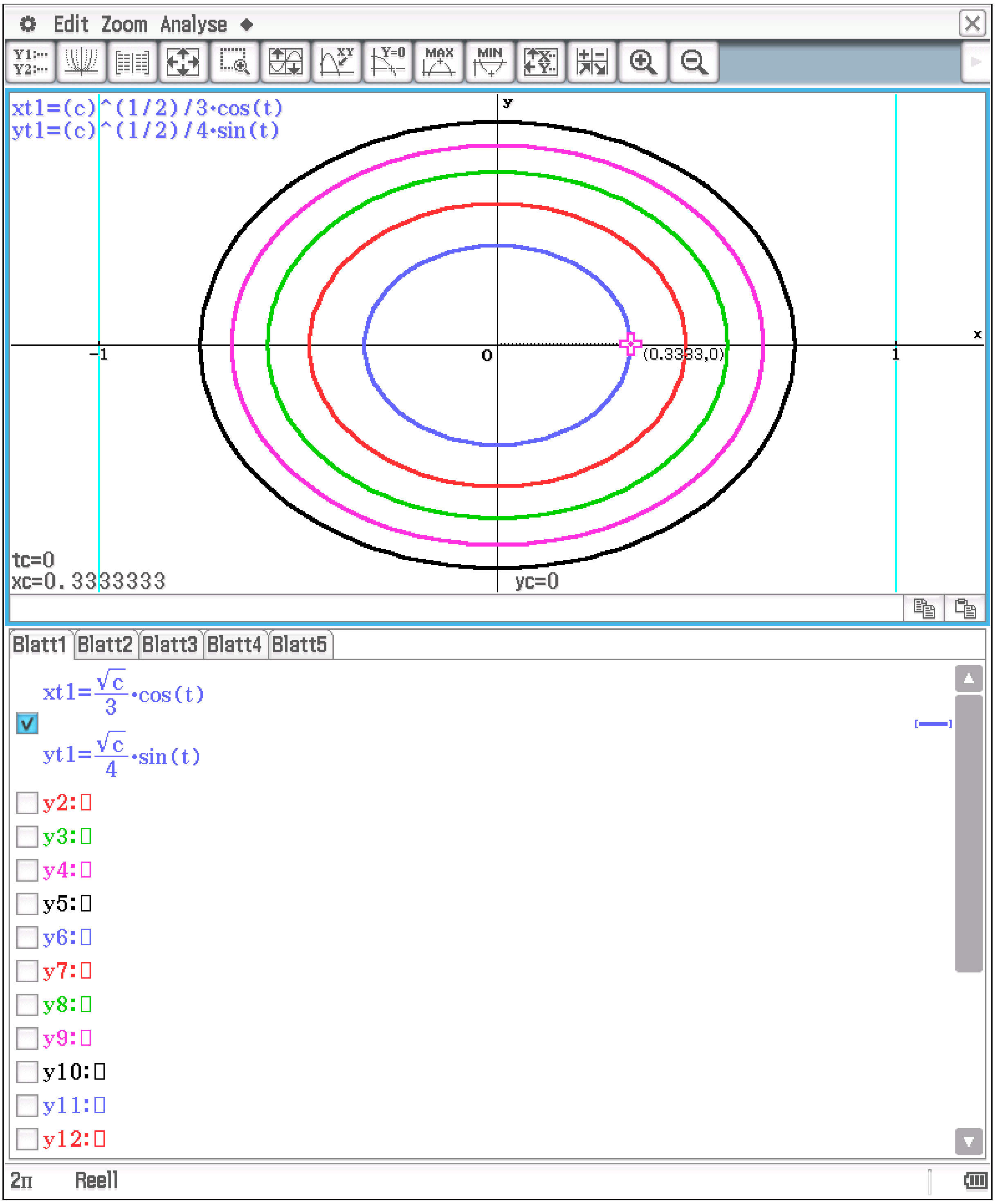
$$r(t)=t*\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad 0\le t\le 1,$$

$$U=\int_0^1 \mathrm{dotP}\left(\begin{bmatrix} 2x*y*t^2 \\ x^2*t^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)dt$$

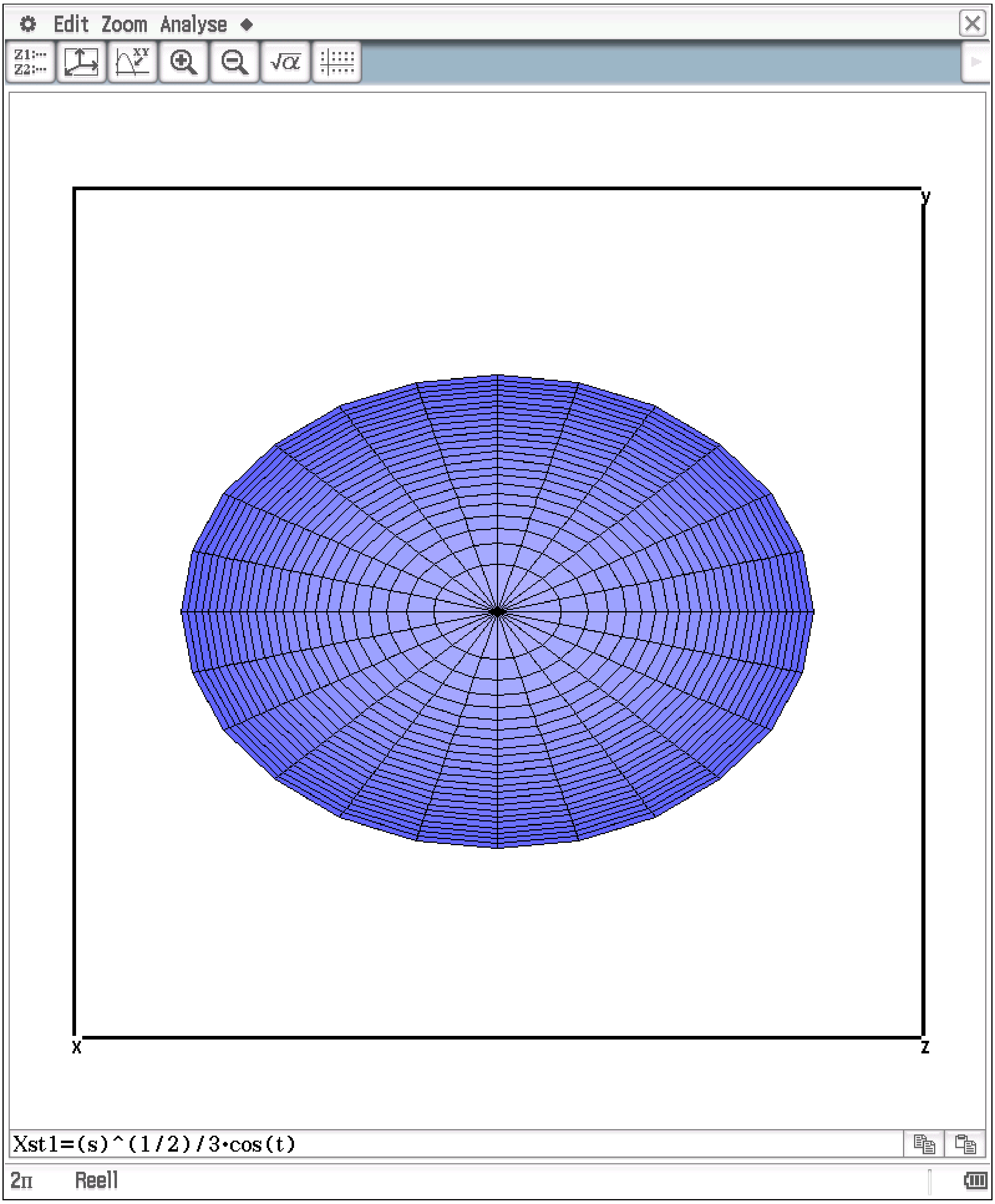
$$U=x^2\cdot y$$

Die Stammfunkton lautet: $U=U(x,y)=x^2\cdot y+\mathrm{const.}$

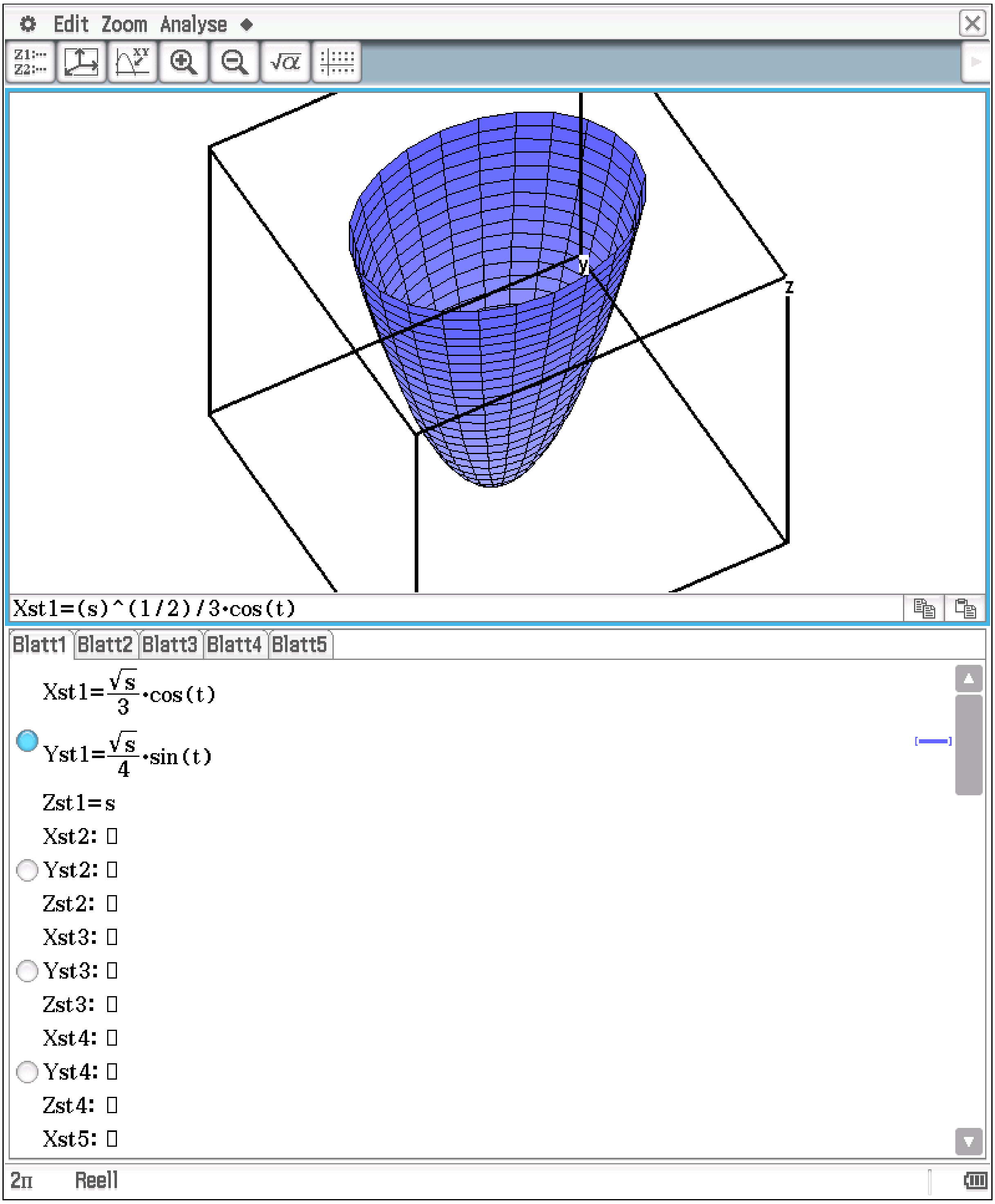
Höhenlinien: elliptischer Paraboloid Aufg. 4.1.1h)



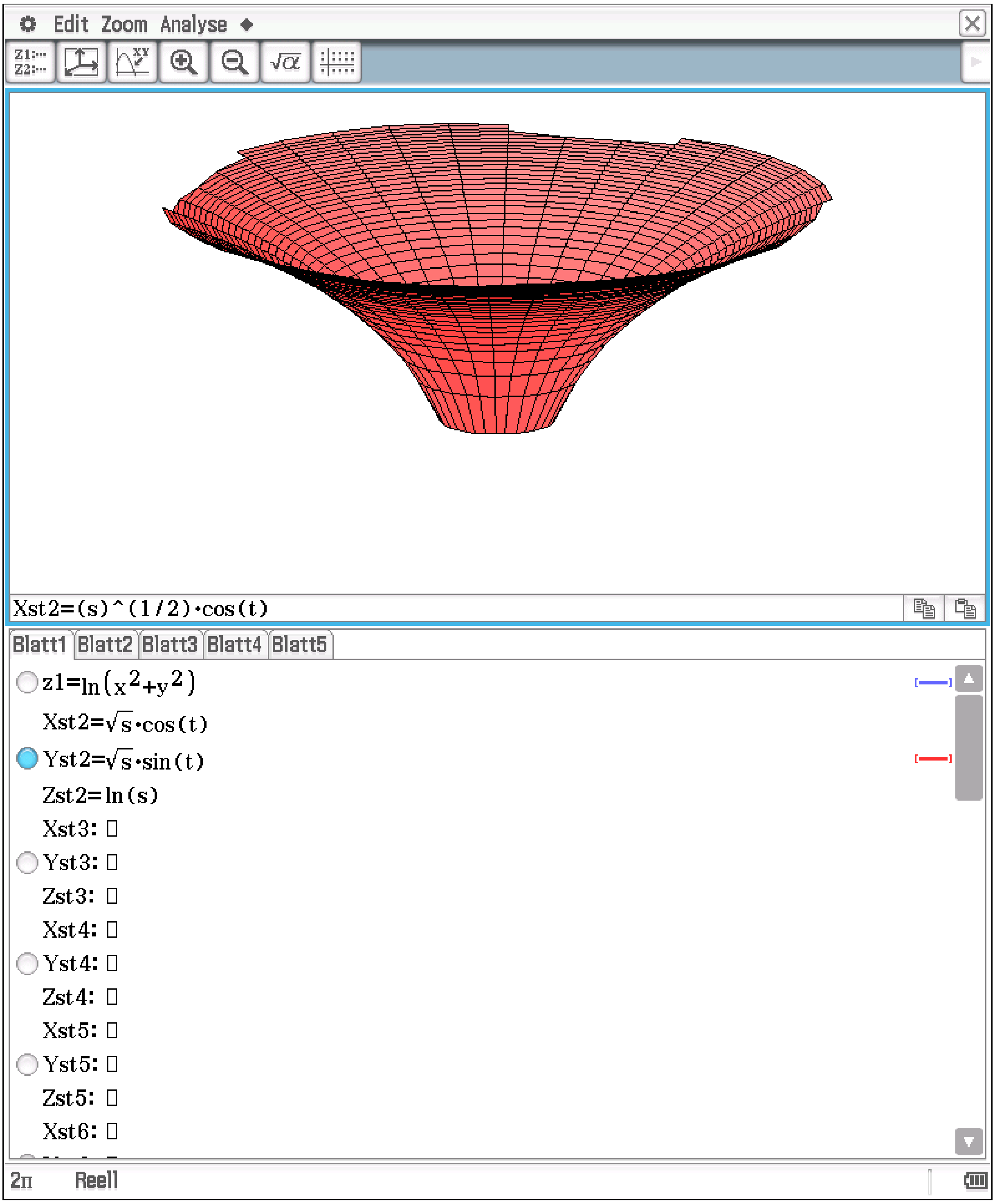
Höhenlinien: Draufsicht



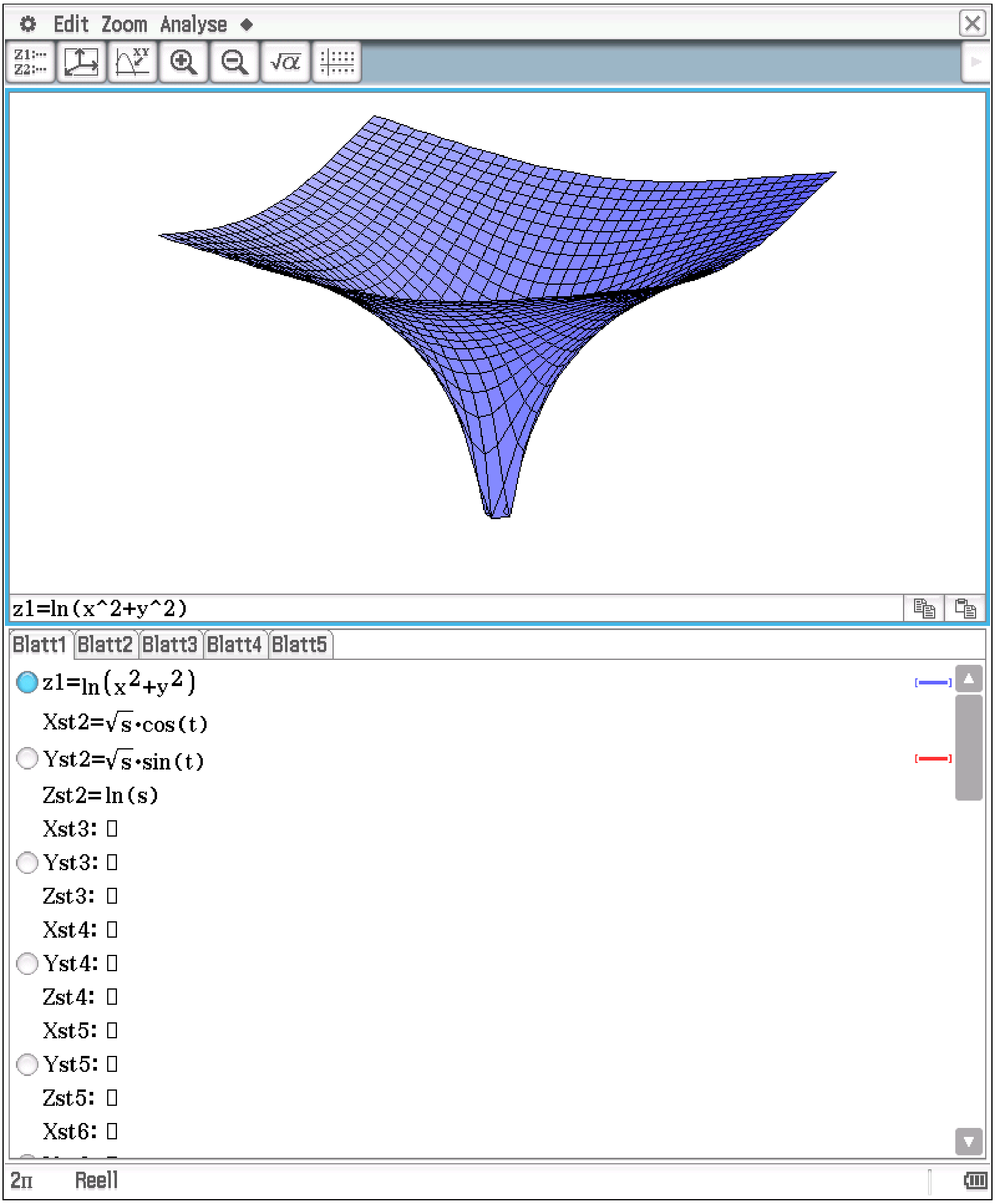
Höhenlinien: 3D-Grafik



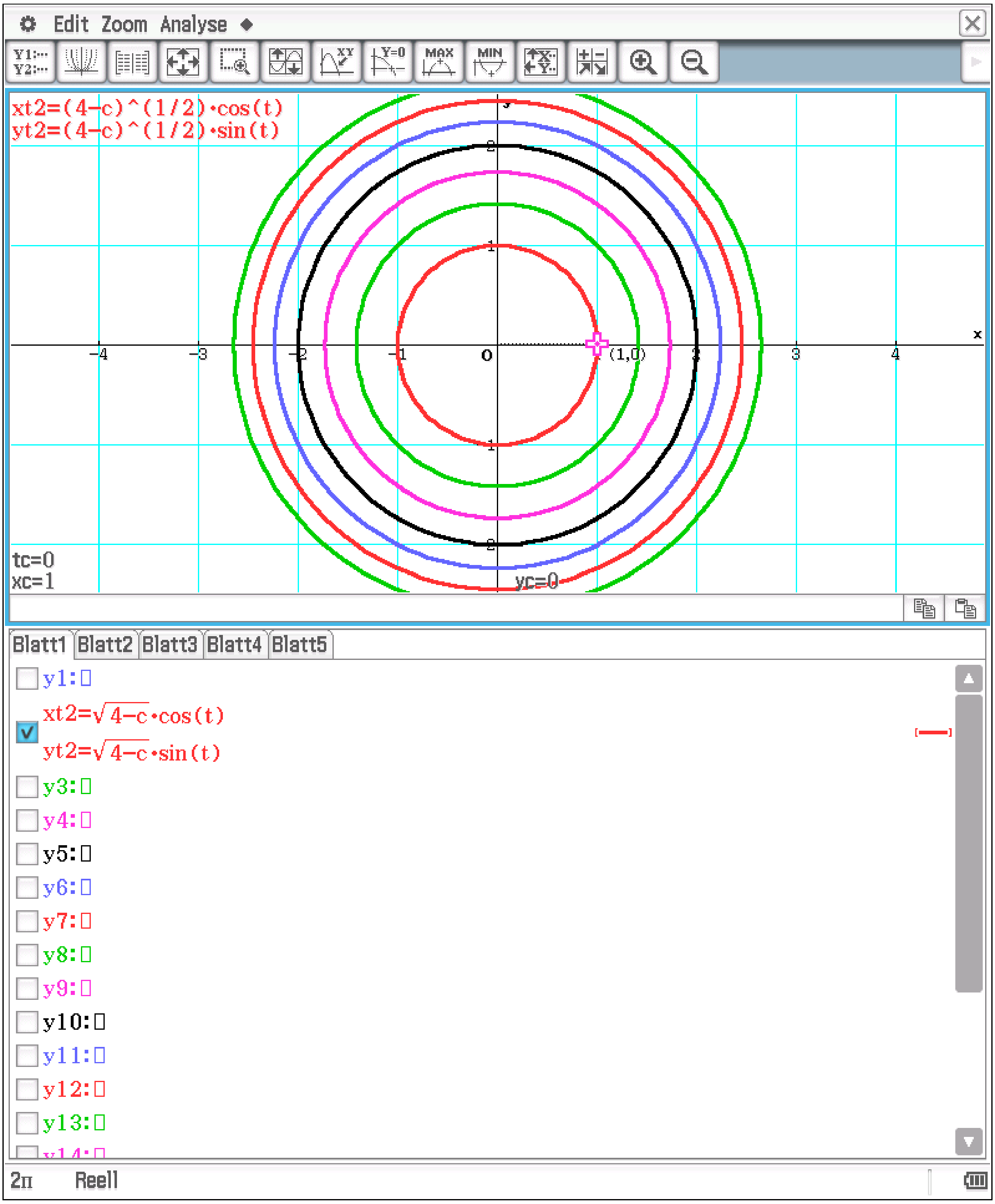
Höhenlinien: Rotationskörper Aufg. 4.1.6b)



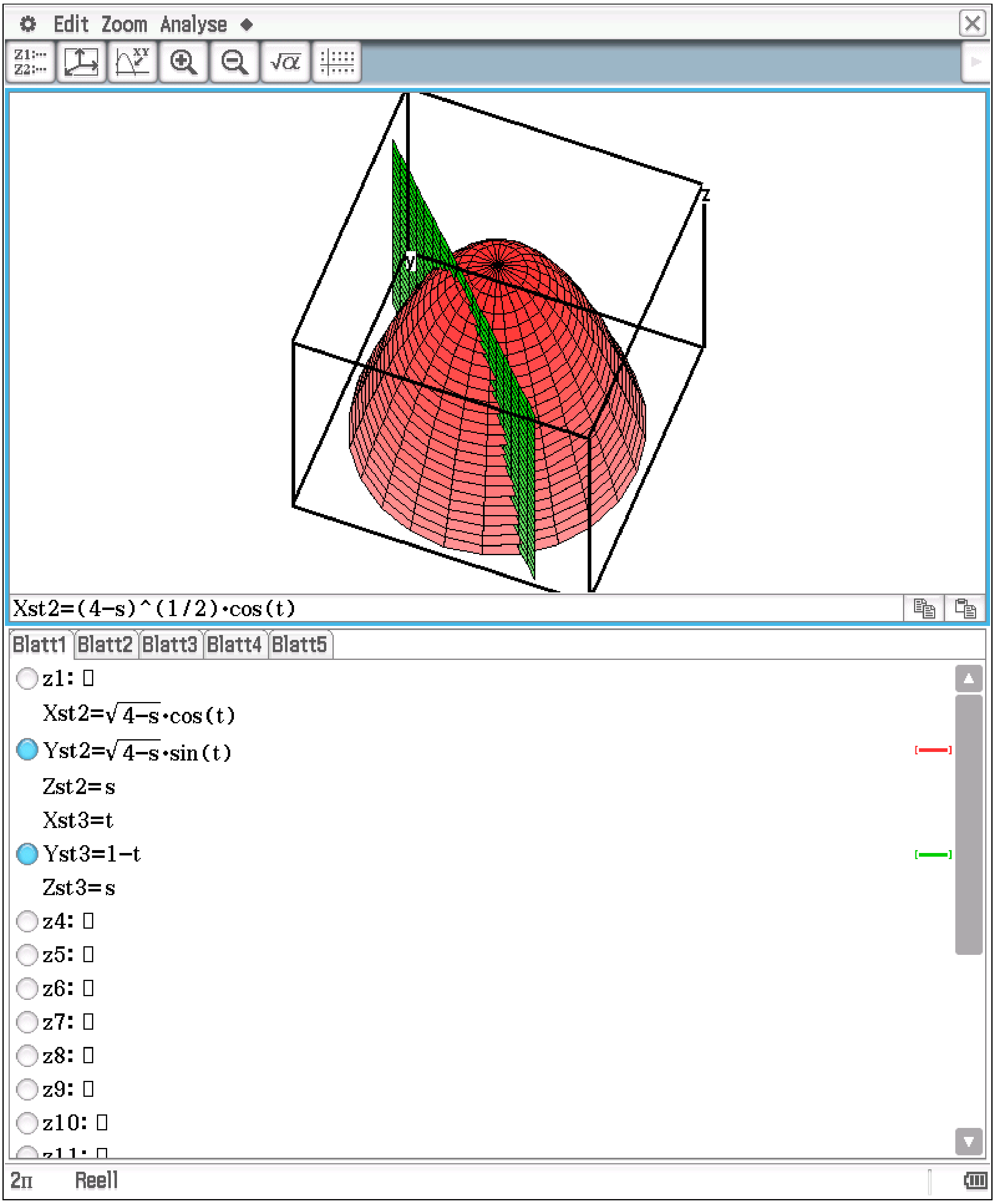
Anderes Liniennetz: Rotationskörper Aufg. 4.1.6b)



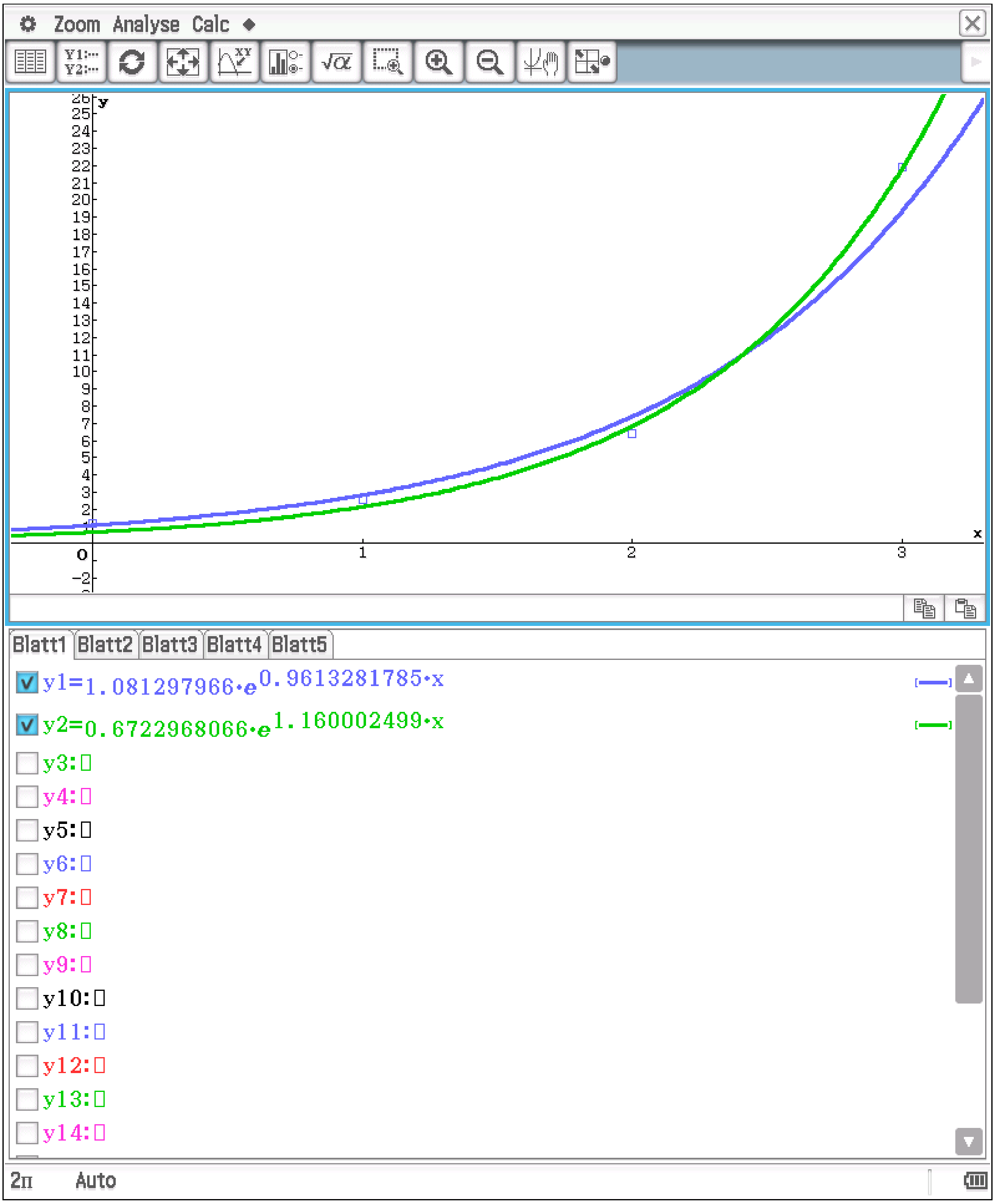
Höhenlinien: Rotationsparaboloid Aufg. 4.3.7



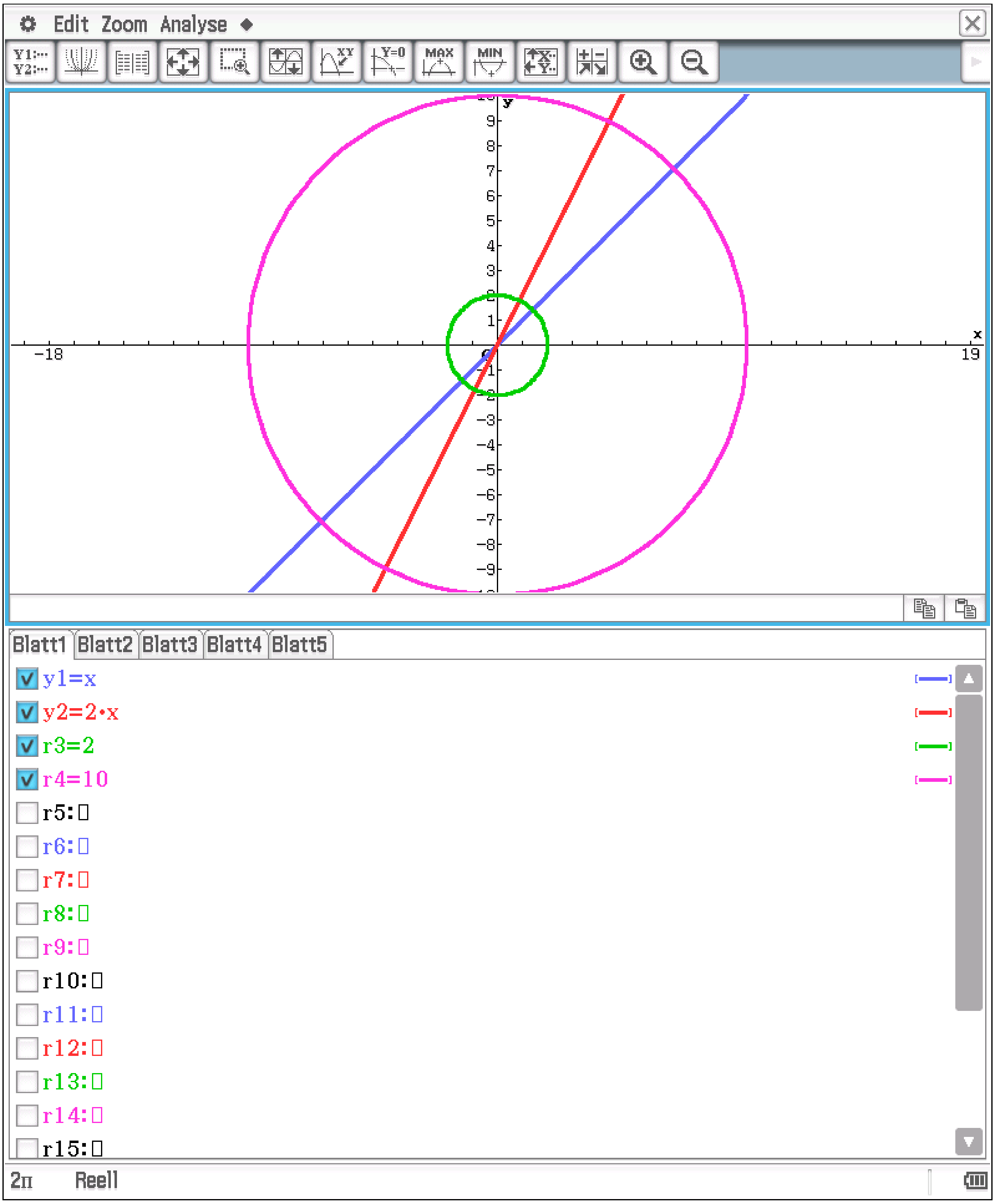
Rotationsparaboloid Aufg. 4.3.7 mit NB (Ebene über der Geraden)



Aufg. 4.3.20 Nichtlin. Regression



Aufg. 4.4.7 Integrationsbereich A (Sektor vom Kreisring)



Aufg. 4.4.19 Integrationsweg