**Prof. Paditz - SS2018**

Vorl. Prof. Oestreich - Vertretung Prof. Paditz

**Prüfungsvorbereitung Mathematik 2 (Teil 1)**

**==========================================**

**3. Lineare Algebra und Geometrie**

**================================**

**A)** Determinanten und Matrizen, Anwendungen von Matrizen:

**3.1.** 8

**B)** Lösung linearer Gleichungssysteme, Berechnung der inversen Matrix:

**3.2.** 9, 13a), 27

**C)** lineare (Un-)Abhängigkeit von Vektoren, Anwendungen der Vektorrechung, Kurven 2. Ordnung:

**3.3.** 17, 27, 30, 35, 37g)

**Aufg. 3.1.**8

Für welche t∈**R** verschwindet die Determinante det(A) ?

$$A:=\begin{bmatrix} 2-t & -3 & -4 \\ -1 & 1-t & -2 \\ 0 & 0 & 4-t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -t+2 & -3 & -4 \\ -1 & -t+1 & -2 \\ 0 & 0 & -t+4 \end{bmatrix}$$

det(A)=0

$$-t^3+7\cdot t^2-11\cdot t-4=0$$

solve(ans, t)

$$\left\{t=4,\ t=\frac{-\sqrt{13}}{2}+\frac{3}{2},\ t=\frac{\sqrt{13}}{2}+\frac{3}{2}\right\}$$

**Aufg.3.2.**9

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2 &= 0 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 + b &= 0 \end{aligned}$$

a) Für welche a,b∈**R** hat dieses Gleichungssystem

$\alpha$) genau eine Lösung,

$\beta$) keine Lösung,

$\gamma$) unendlich viele Lösungen.

b) Wie lautet die Lösung für a=1, b=4?

c) Geben Sie für den Fall $\gamma$) die Lösung an.
Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

**zu a)**

$$A:=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \end{bmatrix}$$

$$r:=\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -b \end{bmatrix}$$

det(A)=0

$5 \cdot a+5=0$

solve(ans, a)

$\{a=-1\}$

$\alpha$) Für $a \neq -1$ (b be. reell) ist die Lösung eindeutig:

$x:=A^{-1} * r$

$$\begin{bmatrix} \frac{2\cdot(3\cdot a+4)}{5\cdot a+5}+\frac{4\cdot(a-2)}{5\cdot a+5}+\frac{5\cdot b}{5\cdot a+5} \\ \frac{-5\cdot b}{5\cdot a+5}+\frac{10}{5\cdot a+5} \\ \frac{-2\cdot(a+2)}{5\cdot a+5}-\frac{4\cdot(2\cdot a-1)}{5\cdot a+5}-\frac{5\cdot b}{5\cdot a+5} \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} \frac{2\cdot a+b}{a+1} \\ \frac{-(b-2)}{a+1} \\ \frac{-(2\cdot a+b)}{a+1} \end{bmatrix}$$

**zu b)**

ans|{a=1,b=4}

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Define z1(x,y)=(-x+2y-4)/3

done

Define z2(x,y)=-2x-y+2

done

Define z3(x,y)=(-x-y-4)/2

done

**3D-Grafik** Z1:… Z2:…

stop

**weiter in a)**

rank(A|a=-1)

2

Ar:=augment(A,r)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 & -b \end{bmatrix}$$

Ar|a=−1

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -b \end{bmatrix}$$

**Der rank-Befehl trifft bzgl. b keine Fallunterscheidung!**

rank(ans)

$$3$$

rank(Ar|{a=−1,b=2})

$$2$$

Offensichtlich ist Spalte 4 das Doppelte von Spalte 2

$\beta$) keine Lösung für a=−1 und b≠2 wegen Rangerhöhung rank(A)=2<rank(Ar)=3

$\gamma$) unendl. viele Lösungen für a=−1 und b=2

**zu c)**

Ar

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 & -b \end{bmatrix}$$

rref(Ar|{a=−1,b=2})

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_3=t$, $x_2=2+t$, $x_1=-t$, d.h. Geradengleichung im Raum.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t * \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Probe:

$$A * \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t * \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} -2\cdot(t+2)+2\cdot t \\ 2 \\ a\cdot(t+2)+t \end{bmatrix}$$

simplify(ans|a=-1)

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

r|b=2

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

stop

**Austauschverfahren:**

**=================**

**Starttabelle:**

ST:=augment(A,-r)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & a & 2 & b \end{bmatrix}$$

**1. Austauschschritt Pivot=$a_{11}$**

LinEqSys(ST,1,1)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 5 & -5 & -10 \\ a+2 & -1 & b-4 \end{bmatrix}$$

**2. Austauschschritt Pivot=$a_{21}$**

LinEqSys(T1,2,1)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ a+1 & 2\cdot a+b \end{bmatrix}$$

**3. Austauschschritt Pivot=$a_{31}$, falls $a\neq-1$**

LinEqSys(T2,3,1)

done

matnew⇒T3

$$\begin{bmatrix} \frac{2\cdot a+b}{a+1} \\ \frac{-(b-2)}{a+1} \\ \frac{-(2\cdot a+b)}{a+1} \end{bmatrix}$$

$\alpha$) eindeutige Lösung, falls **$a\neq-1$** (b bel. reell),
rank(A)=rank(Ar)=3

$\beta$) keine Lösung, falls **$a=-1$** und $b\neq2$,
rank(A)=2<rank(Ar)=3

$\gamma$) unendl. viele Lösungen, falls **$a=-1$** und **$b=2$**,
rank(A)=rank(Ar)=2

stop

**Aufg. 3.2.**13a)

Bei chemischen Reaktionen mögen die Elemente A, B, ... nachfolgenden Reaktionsgleichungen genügen. Man bestimme daraus die stöchiometrischen Koeffzienten u, v, ...:

u $A_5B_3C_2$ + v $CD_2$ $\Leftrightarrow$ w $A_3BC$ + x BD + y C

**Lösung:**

DelVar u, v, w, x, y

done

A: 5u=3w

B: 3u=w+x

C: 2u+v=w+y

D: 2v=x

$$\left.\begin{cases} 5u=3w \\ 3u=w+x \\ 2u+v=w+y \\ 2v=x \\ 0=0 \end{cases}\right|_{u,v,w,x,y}$$

$$\left\{u=y, v=\frac{2\cdot y}{3}, w=\frac{5\cdot y}{3}, x=\frac{4\cdot y}{3}, y=y\right\}$$

ans | y=3

{u=3, v=2, w=5, x=4, 3=3}

**Austauschverfahren:** (Nullspalte könnte entfallen)

**=================**

$$ST:=\begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**1. Austauschschritt: v nach Zeile3**

LinEqSys(ST, 3, 2)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

**2. Austauschschritt: w nach Zeile2**

LinEqSys(T1, 2, 2)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

**3. Austauschschritt: u nach Zeile4**

LinEqSys(T2, 4, 1)

done

matnew⇒T3

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ \frac{7}{2} & -3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

**4. Austauschschritt: x nach Zeile1**

LinEqSys(T3, 1, 1)

done

matnew⇒T4

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ \frac{5}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Lösung:** $\begin{bmatrix} x \\ w \\ v \\ u \end{bmatrix} = y * \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

y=3: x=4, w=5, v=2, u=3

stop

**Aufg. 3.2.27**

Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Ist die Matrix A regulär?

b) Man berechne die inverse Matrix.

c) Welche Matrix X löst die Gleichung

$$A*X=\begin{bmatrix}4 & 0 & -3 & 1\\ 1 & 5 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{bmatrix} \quad ?$$

**Lösung:**

**zu a)**

det(A)

1

Ja, Matrix regulär, da det(A)≠0 (voller Rang)

rank(A)

3

**zu b)**

$A^{-1}$

$$\begin{bmatrix}10 & 9 & -7\\ 4 & 4 & -3\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

**zu c)**

$$X:=A^{-1}*\begin{bmatrix}4 & 0 & -3 & 1\\ 1 & 5 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}49 & 38 & -5 & -13\\ 20 & 17 & -1 & -6\\ -5 & -4 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

stop

**Aufg. 3.3.17**

Wie muß $\lambda$ gewählt werden, damit die Vektoren **a, b, c** komplanar sind, d.h. in einer Ebene liegen?

$a := \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ 4 \end{bmatrix}$$

$b := \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$c := \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A:=augment(augment(a, b), c)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ \lambda & 4 & 5 \\ 4 & 11 & 1 \end{bmatrix}$$

det(A)=0

$$-31\cdot\lambda-43=0$$

solve(ans, λ)

$$\left\{\lambda=-\frac{43}{31}\right\}$$

stop

**Aufg. 3.3.27**

Durch den Punkt $\mathbf{P_1}(-1;5;5)$ ist die Ebene $\mathbf{E_1}$ und durch den Punkt $\mathbf{P_2}(-3;0;6)$ die Ebene $\mathbf{E_2}$ so zu legen, dass beide Ebenen senkrecht zu dem Vektor

$\mathbf{n}=(8;-1;4)^T$

sind. Bestimmen Sie den Abstand beider Ebenen.

Lösung:

$$n:=\begin{bmatrix}8\\-1\\4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}8\\-1\\4\end{bmatrix}$$

$\mathbf{E_1}$: $8\cdot x-y+4\cdot z-7=0$, denn

DelVar x,y,z

done

$$P_1:=\begin{bmatrix}-1\\5\\5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1\\5\\5\end{bmatrix}$$

$$trn(n)*\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}-trn(n)*P_1$$

$$[8\cdot x-y+4\cdot z-7]$$

ans/norm(n)

$$\left[\frac{8\cdot x-y+4\cdot z-7}{9}\right]$$

$$P_2:=\begin{bmatrix}-3\\0\\6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$P_2$ in $\mathbf{E_1}$ einsetzen: Hessesche Normalform

$$\frac{trn(n)*P_2-trn(n)*P_1}{norm(n)}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{7}{9} \end{bmatrix}$$

abs(ans)

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{9} \end{bmatrix}$$

Abstand d=7/9

stop

**Aufg. 3.3.**30

Gegeben sind die Ebenen

$E_1$: x+y+z=1, $E_2$: ax+y−2z=3, $E_3$: −x+3z=b.

a) Man bestimme, die Zahlen a und b so, dass sich die drei Ebenen in keinem gemeinsamen Punkt schneiden.

b) Man bestimme, die Zahlen a und b so, dass sich die drei Ebenen in einer gemeinsamen Geraden schneiden und gebe eine Parameterdarstellung dieser Geraden an.

c) Wie lauten die Koordinaten des Schnittpunktes der 3 Ebenen für a=b=1?

**Lösung:**

zu a)

DelVar a,b,x,y,z

done

$$A:=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ a & 1 & -2\\ -1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ a & 1 & -2\\ -1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$r:=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ b\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\ 3\\ b\end{bmatrix}$$

ST:=augment(A,-r)

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ a & 1 & -2 & -3\\ -1 & 0 & 3 & -b\end{bmatrix}$$

**1. Austauschschritt: x geht in Zeile1**

LinEqSys(ST,1,1)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ -a+1 & -a-2 & a-3\\ 1 & 4 & -b-1\end{bmatrix}$$

**2. Austauschschritt: y geht in Zeile3**

LinEqSys(T1,3,1)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix}3 & -b\\ 3\cdot a-6 & -a\cdot b+b-2\\ -4 & b+1\end{bmatrix}$$

**3. Austauschschritt: geht nicht für a=2 und**

$-a \cdot b+b-2 \neq 0$ führt aus Widerspruch im LGS, d.h.

solve($-2 \cdot b+b-2 \neq 0$, b)

$$\{b \neq -2\}$$

Für a=2 und b≠−2 gibt es keine gemeinsame Lösung.

**zu b)**

Für a=2 und b=−2 gibt es eine mehrdeutige Lösung (Gerade im Raum).

T2|{a=2,b=−2}

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

z=t, x=3t+2, y=−4t−1, t∈**R**.

Gerade: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t * \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

**Probe:**

$A*(t*\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix})|a=2$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \cdot (3 \cdot t+2)-6 \cdot t-1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

r|b=−2

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

**zu c)**

ST|{a=1,b=1}⇒ST

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

**x geht in Zeile1:**

LinEqSys(ST,1,1)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

**y geht in Zeile3:**

LinEqSys(T1,3,1)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

**z geht in Zeile2:**

LinEqSys(T2,2,1)

done

matnew⇒T3

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{14}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ \frac{14}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

**alternativ:**

$X:=A^{-1}*r\,|\,\{a=1, b=1\}$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ \frac{14}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

stop

**Aufg. 3.3.**35

Gegeben sind die 3 Punkte $\mathbf{P_1}(1,0,1)$, $\mathbf{P_2}(2,1,3)$, $\mathbf{P_3}(-1,0,0)$ sowie $\mathbf{P_4}(1,1,1)$.

a) Bilden die Vektoren $\mathbf{r_i} = \mathbf{OP_i}$, i=1,2,3, eine Basis in $\mathbf{R}^3$? Wenn ja, stelle man den Ortvektor des Punktes $\mathbf{P_4}$ als Linearkombination von $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$ dar.

b) Berechnen Sie die Seitenlängen und die Winkel im Dreieck $\mathbf{P_1P_2P_3}$. Welchen Flächeninhalt hat dieses Dreieck?

c) Geben Sie die Gleichung der Geraden $\mathbf{g_1}$ durch die Punkte $\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}$ und der Geraden $\mathbf{g_2}$ durch die Punkte $\mathbf{P_3}, \mathbf{P_4}$ an. Welche Lage haben die beiden Geraden zueinander? Welchen Abstand hat der Punkt $\mathbf{P_3}$ von der Geraden $\mathbf{g_1}$?

d) Wie lautet die Gleichung der Ebene $\mathbf{E}$ durch die

Punkte $\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}, \mathbf{P_3}$ (Parameterdarstellung)? Welchen Abstand hat der Punkt $\mathbf{P_4}$ von der Ebene $\mathbf{E}$?

**Lösung:**

**zu a)**

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

det(A)

$$1$$

Ja, die Ortsvektoren sind lin. unabhängig.

$$A^{-1} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$-2 * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 * \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 1 * \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Linearkombination:** $-2 * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 * \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 1 * \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

**zu b)**

$$P_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$P_3 := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{norm}(P_1-P_2) \\ \mathrm{norm}(P_1-P_3) \\ \mathrm{norm}(P_2-P_3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ \sqrt{5} \\ \sqrt{19} \end{bmatrix}$$

**Seitenlängen** sind $||P_1P_2||=\sqrt{6}$, $||P_1P_3||=\sqrt{5}$, $||P_2P_3||=\sqrt{19}$

**Winkel:**

$$\frac{\mathrm{dotP}(P_1-P_2, P_1-P_3)}{\mathrm{norm}(P_1-P_2)*\mathrm{norm}(P_1-P_3)}$$

$$\frac{-2\cdot\sqrt{30}}{15}$$

$\alpha$:=approx(cos⁻¹(ans)*$\frac{180}{\pi}$)

$$136.9112769$$

$$\frac{\text{dotP}(P_1-P_2,P_3-P_2)}{\text{norm}(P_1-P_2)*\text{norm}(P_2-P_3)}$$

$$\frac{5\cdot\sqrt{114}}{57}$$

$\beta$:=approx(cos⁻¹(ans)*$\frac{180}{\pi}$)

$$20.51412718$$

$$\frac{\text{dotP}(P_3-P_2,P_3-P_1)}{\text{norm}(P_3-P_2)*\text{norm}(P_1-P_3)}$$

$$\frac{9\cdot\sqrt{95}}{95}$$

$\gamma$:=approx(cos⁻¹(ans)*$\frac{180}{\pi}$)

$$22.57459595$$

**Flächeninhalt:**

$\frac{1}{2}$*crossP($P_1-P_2$, $P_1-P_3$)

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

approx(norm(ans))

$$1.870828693$$

**zu c)**

$P_4:=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g_1}\text{:}\quad \begin{bmatrix}x(s)\\y(s)\\z(s)\end{bmatrix}=P_1+s*(P_2-P_1),\quad s\in\mathbf{R}$$

$P_1+s*(P_2-P_1)$

$$\begin{bmatrix}s+1\\s\\2\cdot s+1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g_2}\text{:}\quad \begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{bmatrix}=P_3+t*(P_4-P_3),\quad t\in\mathbf{R}$$

$P_3+t*(P_4-P_3)$

$$\begin{bmatrix}2\cdot t-1\\t\\t\end{bmatrix}$$

Richtungsvektoren: $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ bzw. $\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$, d. h. nicht parallel

$d:=\text{norm}(P_1+s*(P_2-P_1)-(P_3+t*(P_4-P_3)))$

$$\sqrt{6\cdot s^2+6\cdot t^2-t\cdot(10\cdot s+10)+8\cdot s+5}$$

**algebraische Lösung (Vektorrechnung):**

**Orthogonalitätsbedingungen:**

$\text{dotP}(P_1+s*(P_2-P_1)-(P_3+t*(P_4-P_3)),(P_2-P_1))=0 \Rightarrow G1$

$$2\cdot(2\cdot s-t+1)+2\cdot s-3\cdot t+2=0$$

$\text{dotP}(P_1+s*(P_2-P_1)-(P_3+t*(P_4-P_3)),(P_4-P_3))=0 \Rightarrow G2$

$$2\cdot(s-2\cdot t+2)+3\cdot s-2\cdot t+1=0$$

$$\begin{cases}G1\\G2\end{cases}\Bigg|_{s,t}$$

$$\left\{s=\frac{1}{11},\ t=\frac{10}{11}\right\}$$

**analytische Lösung (Differenzialrechnung):**

**Abstandsfunktion:**

Define $F(s,t)=6\cdot s^2+6\cdot t^2-t\cdot(10\cdot s+10)+8\cdot s+5$

done

$$\left.\begin{cases}\frac{d}{ds}(F(s,t))=0\\ \frac{d}{dt}(F(s,t))=0\end{cases}\right|_{s,t}$$

$$\left\{s=\frac{1}{11},\ t=\frac{10}{11}\right\}$$

$$d\,|\left\{s=\frac{1}{11},\ t=\frac{10}{11}\right\}$$

$$\frac{5\cdot\sqrt{21}}{11}$$

**windschief, da d>0**

$d:=\mathrm{norm}(P_1+s*(P_2-P_1)-P_3)$

$$\sqrt{6\cdot s^2+8\cdot s+5}$$

Define $F(s)=6\cdot s^2+8\cdot s+5$

done

$\mathrm{solve}\left(\frac{d}{ds}(F(s))=0,\ s\right)$

$$\left\{s=-\frac{2}{3}\right\}$$

$d\,|\,s=-\frac{2}{3}$

$$\frac{\sqrt{21}}{3}$$

approx(ans)

1.527525232

**alternativ: Orthogonalität ausnutzen**

dotP($P_1$+s*($P_2$−$P_1$)−$P_3$, ($P_2$−$P_1$))=0

$$2\cdot(2\cdot s+1)+2\cdot s+2=0$$

solve(ans, s)

$$\left\{s=-\frac{2}{3}\right\}$$

**zu d)**

$P_1$+s*($P_2$−$P_1$)+t*($P_3$−$P_1$)

$$\begin{bmatrix} s-2\cdot t+1 \\ s \\ 2\cdot s-t+1 \end{bmatrix}$$

**E:** $\begin{bmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \\ z(s,t) \end{bmatrix}=s*\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}+t*\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, **s, t∈R**

**algebraische Lösung (Vektorrechnung):**

**Orthogonalitätsbedingungen:**

dotP($P_1$+s*($P_2$−$P_1$)+t*($P_3$−$P_1$)−$P_4$, ($P_2$−$P_1$))=0⇒G1

$$2\cdot(2\cdot s-t)+2\cdot s-2\cdot t-1=0$$

dotP($P_1$+s*($P_2$−$P_1$)+t*($P_3$−$P_1$)−$P_4$, ($P_3$−$P_1$))=0⇒G2

$$-2\cdot(s-2\cdot t)-2\cdot s+t=0$$

$$\left.\begin{cases} G1 \\ G2 \end{cases}\right|_{s,\,t}$$

$$\left\{s=\frac{5}{14}, t=\frac{2}{7}\right\}$$

**analytische Lösung (Differenzialrechnung):**

**Abstandsfunktion:**

d:=norm($P_1$+s*($P_2$−$P_1$)+t*($P_3$−$P_1$)−$P_4$)

$$\sqrt{6\cdot s^2+5\cdot t^2-8\cdot s\cdot t-2\cdot s+1}$$

Define $F(s,t)=6\cdot s^2+5\cdot t^2-8\cdot s\cdot t-2\cdot s+1$

done

$$\left.\begin{cases}\frac{d}{ds}(F(s,t))=0\\ \frac{d}{dt}(F(s,t))=0\end{cases}\right|_{s,t}$$

$$\left\{s=\frac{5}{14}, t=\frac{2}{7}\right\}$$

$d\,|\left\{s=\frac{5}{14}, t=\frac{2}{7}\right\}$

$$\frac{3\cdot\sqrt{14}}{14}$$

approx(ans)

0.8017837257

stop

**Aufg. 3.3.**37g)

Welche Kurve wird durch die Gleichung $4x^2+2x+y^2=5$ beschrieben? Skizzieren Sie das Bild der Kurve.

**Lösung: Ellipsengleichung (quadratische Ergänzung)**

$4x^2+2x+y^2=4x^2+2x+\frac{1}{4}+y^2-\frac{1}{4}=(2x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+y^2=5$

ergibt $(2x+\frac{1}{2})^2+y^2=5.25$

**Normalform:**

$4*(x+\frac{1}{4})^2+y^2=5.25$

$$\frac{(x+\frac{1}{4})^2}{5.25/4}+\frac{y^2}{5.25}=1$$

**Halbachsen:** $a=\sqrt{5.25/4}, b=\sqrt{5.25}$

$\sqrt{5.25/4}$

$$\frac{\sqrt{21}}{4}$$

$\sqrt{5.25}$

$$\frac{\sqrt{21}}{2}$$

**Mittelpunkt:** $M(-\frac{1}{4},0)$

Parameterdarstellung:

Define $xt1(t)=-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{21}}{4}\cos(t)$

done

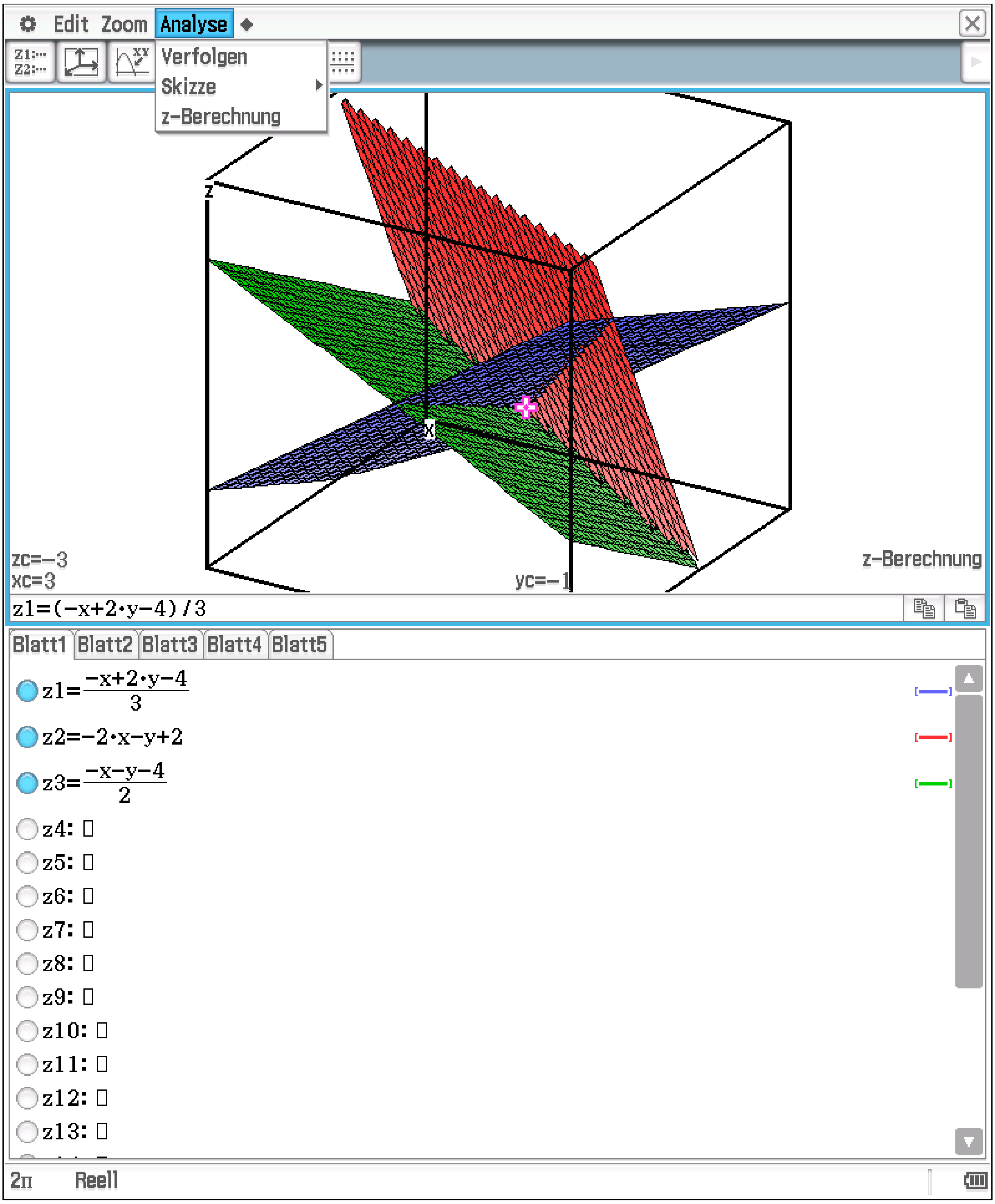
Define $yt1(t)=\frac{\sqrt{21}}{2}\sin(t)$

done

**2D–Grafik** Y1:⋯ Y2:⋯

stop

**Schnitt dreier Ebenen in einem Punkt: Aufg. 3.2.9**



## Ellipse:  Aufg. 3.3.37g)