Prof. Dr. Ludwig Paditz, 5.Mathe-Intensivkurs 2014

Einführung in die CAS-Software (ClassPad)

==

Kurs Prof. Scholz:

=================

Mengenlehre:

==

Die Rechenoperationen ∪, ∩, \, ×, Δ (sowie Potenzmengen und Kardinalzahlen) und die Relationen =, ⊂, ⊆, ⊄, ⊈ sowie ∈, ∉, Ø, Ω, A, $\bar{A}$, B, $\bar{B}$ sind zwar im Zeichensatz des ClassPad vorhanden, können aber nicht im CAS genutzt werden. D.h., die Mengenlehre ist zurzeit nicht im Betriebssystem des ClassPad implementiert.

Informatik-Studenten der HTW Dresden haben in den zurückliegenden Jahren im Projektseminar die Mengenlehre für den ClassPad programmiert und zusätzlich AddIns generiert.

Die Programme zur Mengenlehre liegen im library-Ordner dieses vcp-files:
Programm "Menge" zur Mengenlehre
Programm "StrOVenn" generiert zusätzlich Venn-Diagramme

Diese Rahmenprogramme nutzen außerdem Unterprogramme, vgl. Bedienungsanleitung
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/
Bedienungsanleitung_Menge_Version_0_9_13.pdf

Das besondere dieser Programme besteht darin, dass auch **Mengen mit Elementen nichtnumerischer Art** verarbeitet werden können.
Z.B. Mengen mit Vornamen oder Mengen mit e-mail-Adressen usw.
Die Programmierung beruht auf der Zeichenkettenverarbeitung.

Die erwähnten AddIns (sogen. ***.cpa**-files) können nicht in den ClassPad-Manager eingebunden werden sondern lediglich in älteren TR implementiert werden (ClassPad330 und älter, nicht ClassPad330PLUS oder ClassPad400, da hier das AddIn ein anderes Datenformat hat: ***.c1a** bzw ***.c2a**).
Unabhängig davon liegen diese AddIns als eigenständige PC-Version vor:
AddIn "Real Sets"(2011) und **AddIn "Venn-Diagramm"(2014)**
download:
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/Mengenlehre-Add-In-Real-Sets.zip bzw.
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/Mengenlehre-Add-In-Venn-Diagramm.rar
==

Beispiel 1: Mengen nichtnumerischer Art
====================================
A="Menge aller rechtwinkligen Dreiecke"
B="Menge aller Dreiecke"
Offenbar gilt **A⊂B**

Bem.: Die oben genannten Programme können nur Mengen mit endlich vielen unterscheidbaren Elementen verarbeiten.

Beispiel 2: Mengen nichtnumerischer Art

A="Menge aller Quadrate"

B="Menge aller Vierecke mit vier gleichlangen Seiten und vier rechten Winkeln" Offenbar gilt **A=B.**

Beispiel 3: endliche Zahlenmengen

seq(x, x, 0, 10, 1)

{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

M:="{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}"

"{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}"

A:="{0, 2, 6, 8}"

"{0, 2, 6, 8}"

B:="{1, 2, 5}"

"{1, 2, 5}"

Es gilt $\bar{A}$=M\A:

Menge(M, "−", A)

done

Ergebnis

"{1, 3, 4, 5, 7, 9, 10}"

Es gilt $\bar{B}$=M\B:

Menge(M, "−", B)

done

Ergebnis

"{0, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10}"

Menge(A, "∪", B)

done

Ergebnis

"{0,1,2,5,6,8}"

Menge(A,"∩",B)

done

Ergebnis

"{2}"

Menge(A,"−",B)

done

Ergebnis

"{0,6,8}"

Menge(B,"−",A)

done

Ergebnis

"{1,5}"

Menge(A,"×",B)

done

Ergebnis

"{(0,1),(0,2),(0,5),(2,1),(2,2),(2,5),(6,1),(6,2),(

Menge(B,"×",A)

done

Ergebnis

"{(1,0),(1,2),(1,6),(1,8),(2,0),(2,2),(2,6),(2,8),(

Zusatz:

Menge(M,"C","dummy")

done

Kardinalzahl von M:

Ergebnis

11

Menge(A,"−",M)

done

leere Menge:

Ergebnis

"∅"

Menge(B,"P","dummy")

done

Potenzmenge zu B (Menge aller Teilmengen von B):

Ergebnis

"{∅,{1},{2},{5},{1,2},{1,5},{2,5},{1,2,5}}"

Beispiel 4: Abbildungen (nicht notwendig eindeutig)

A:="{x,y,z}"

"{x,y,z}"

B:="{1,2}"

"{1,2}"

Menge(A,"×",B)

done

F_1:=Ergebnis

"{(x,1),(x,2),(y,1),(y,2),(z,1),(z,2)}"

Menge(A,"×","{1}")

done

F_2:=Ergebnis

"{(x,1),(y,1),(z,1)}"

Menge("{x,z}","×",B)

done

F_3:=Ergebnis

"{(x,1),(x,2),(z,1),(z,2)}"

Menge("{y,z}","×","{1}")

done

F_4:=Ergebnis

"{(y,1),(z,1)}"

Beispiel 5: Funktion (eindeutige Abbildung)

Define f(x)=2x

done

A:={0,1,3}

{0,1,3}

B:=f(A)

{0,2,6}

elementweise Abbildung:

Menge("{0}","×","{0}")

done

E1:=Ergebnis

"{(0,0)}"

Menge("{1}","×","{2}")

done

E2:=Ergebnis

"{(1,2)}"

Menge("{3}","×","{6}")

done

E3:=Ergebnis

"{(3,6)}"

Menge(E1,"∪",E2)

done

Ergebnis

"{(0,0),(1,2)}"

Menge(Ergebnis,"∪",E3)

done

F_1:=Ergebnis

"{(0,0),(1,2),(3,6)}"

Wurzelziehen: positive Wurzel oder negative Wurzel:

Define f1(x)=$\sqrt{x}$

done

Define f2(x)=$-\sqrt{x}$

done

A:={0,1}

{0,1}

f1(A)

{0,1}

f2(A)

{0,−1}

Gesamtmenge der Funktionswerte:

Menge("{0,1}","∪","{0,−1}")

done

B:=Ergebnis

"{−1,0,1}"

keine eindeutige Abbildung!

Beispiel 6: eineindeutige Abbildung

Define f(x)=2x

done

A:={0,1,3}

{0,1,3}

B:=f(A)

{0,2,6}

solve(y=f(x),x)

$\left\{x=\frac{y}{2}\right\}$

Define $f^{-1}(y)=\frac{y}{2}$

done

B:=f(A)

{0,2,6}

f^{-1}(B)

{0,1,3}

Bem.: f^{-1} bezeichnet die Umkehrfunktion

AUFGABEN

1. Mengenoperationen

Hinweis: \ (backslash) ist im TR das Symbol für **Ordner\Unterordner** oder **Ordner\Datei** und kann nicht anders verwendet werden, z.B. als Operationszeichen für die Mengendifferenz. Deshalb wird hier statt "\" das Symbol "–" benutzt.

A:="{1,2,4,6,8,9,13}"

"{1,2,4,6,8,9,13}"

B:="{0,2,5,7}"

"{0,2,5,7}"

C:="{4,7,8,11}"

"{4,7,8,11}"

D:="{4,8,9,13}"

"{4,8,9,13}"

a)

Menge(A,"∩",B)

done

Ergebnis

"{2}"

b)

Menge(C,"−",D)

done

Ergebnis

"{7,11}"

c)

Menge(D,"∩",A)

done

Ergebnis

"{4,8,9,13}"

d)

Menge(B,"∪",C)

done

E1:=Ergebnis

"{0,2,4,5,7,8,11}"

Menge(E1,"∩",D)

done

Ergebnis

"{4,8}"

e)

Menge(A,"−",D)

done

E1:=Ergebnis

"{1,2,6}"

Menge(E1,"−",B)

done

Ergebnis

"{1,6}"

f)

Menge(A,"∩",C)

done

E1:=Ergebnis

"{4,8}"

Menge(B,"∩",D)

done

E2:=Ergebnis

"Ø"

Menge(E1,"∪",E2)

done

Ergebnis

"{4,8}"

2. Punktmengen in der x-y-Ebene

Es handelt sich hier um Mengen mit unendlich vielen Punkten, die als 2D-Grafik dargestellt werden.

a) 2D-Grafik

A ist das Äußere des Einheitskreises, einschließlich der Rand

$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geq 1\}$	Y1:… Y2:…

B enthält die beiden Winkelhalbierenden y=x und y=-x

$B=\{(x,y)\mid y=x \vee y=-x\}$	Y1:… Y2:…

C enthält die obere Halbebene zu y=x, einschließlich der Rand

$C=\{(x,y)\mid y\geq x\}$	Y1:… Y2:…

b) A∩B∩C

die gemeinsamen Punkte liegen auf Halbgeraden (mit Anfangspunkt) im I. bis III. Quadranten, beginnend ab dem Einheitskreis:

$y=x$ mit $|x|\geq\frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $y=-x$ mit $x\leq-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

A∩B∩C	Y1:… Y2:…

c) (B∪C)\A=(B∪C)∩Ā=(B∩Ā)∪(C∩Ā)

(B∩Ā) Geradenstücke innerhalb des Einheitskreises
(ohne Randpunkte)

(C∩Ā) Halbkreisfläche ohne Kreisrand, jedoch mit
Innenrand (Durchmesser)

(B∪C)\A	Y1:… Y2:…

d) B∪(A\C)=B∪(A∩nichtC)=(B∪A)∩(B∪nichtC)

(B∪A) Äußere des Einheitskreises, einschließlich der Rand,
und die Winkelhalbierenden

(B∪nichtC) untere Halbebene (ohne Rand y=x) mit
Winkelhalbierenden

B∪(A\C)	Y1:… Y2:…

e) A\(B∪C)=A∩nicht(B∪C)=A∩B̄∩nichtC

A∩B̄ Äußere des Einheitskreises, einschließlich der Rand,
ohne die Winkelhalbierenden

A∩B̄∩nichtC Äußere des Einheitskreises, einschließlich der
Rand, ohne die Winkelhalbierenden und unterhalb von y=x

A\(B∪C)	Y1:… Y2:…

3. Kreuzprodukte

A:="{1,2,3}"

"{1,2,3}"

B:="{4,5}"

"{4,5}"

a)

Menge(A,"×",B)

done

Ergebnis

"{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)}"

b)

Menge(B,"×",A)

done

Ergebnis

"{(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3)}"

c)

Menge(A,"×",A)

done

E1:=Ergebnis

"{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(

d)

Menge(B,"×",B)

done

Ergebnis

"{(4,4),(4,5),(5,4),(5,5)}"

e)

Menge(E1,"×",B)

done

Ergebnis

"{(1,1,4),(1,1,5),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,3,5),(

Ergebnis als Text mit Zeilenumbruch:

"{(1,1,4),(1,1,5),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,3,5),

(2,1,4),(2,1,5),(2,2,4),(2,2,5),(2,3,4),(2,3,5),
(3,1,4),(3,1,5),(3,2,4),(3,2,5),(3,3,4),(3,3,5)}”

4. 2D-Grafik eines Kreuzproduktes

A={x∈**R**|0≤x≤1∨x=3} abgeschlossenes Intervall und Einzelwert

B={y∈**R**|1<y≤3∨y=4∨5≤y<6} halboffene Intervalle und Einzelwert

A×B Y1:… Y2:…

5. eindeutige Abbildung

Zuordnung unterscheidbarer Gleichungen zu deren Lösung

a) mit dem Parameter p∈**R** wird die Gleichung Gl(p)

x^2+8p×x+p^2=0 definiert

solve(x^2+8p×x+p^2=0,x)

$$\{x=-\sqrt{15}\cdot|p|-4\cdot p,\ x=\sqrt{15}\cdot|p|-4\cdot p\}$$

Für p=0 ist die Lösung eindeutig: $x_n=0$

Für p≠0 ist die Lösung nicht eindeutig: $x_n=-4p\pm\sqrt{15}p$

Damit ist die Zuordnung Gl(p)→x_n nicht eindeutig!

b) mit dem Parameter p∈**R** wird die Gleichung Gl(p)

$x\hat{}2+p\times x+\frac{p\hat{}2}{4}=0$ definiert

solve($x\hat{}2+p\times x+\frac{p\hat{}2}{4}=0$,x)

$$\left\{x=\frac{-p}{2}\right\}$$

Damit ist die Zuordnung Gl(p)→$x_n=-\frac{p}{2}$ eindeutig!

6. verkettete Funktionen

Define $F_1(x)=1/x$

done

Define $F_2(x)=1-x$

done

a)

Define $F_3(x)=F_1(F_2(x))$

done

$F_3(x)$

$$\frac{-1}{x-1}$$

Define $F_4(x)=F_2(F_1(x))$

done

$F_4(x)$

$$\frac{-1}{x}+1$$

Define $F_5(x)=F_1(F_1(x))$

done

$F_5(x)$

$$x$$

Define $F_6(x)=F_2(F_2(x))$

done

$F_6(x)$

$$x$$

b) Umkehrfunktionen

solve$(y=F_1(x),x)$

$$\left\{x=\frac{1}{y}\right\}$$

solve$(y=F_2(x),x)$

$$\{x=-y+1\}$$

solve$(y=F_3(x),x)$

$$\left\{x=\frac{-1}{y}+1\right\}$$

solve($y=F_4(x)$,x)

$$\left\{x=\frac{-1}{y-1}\right\}$$

solve($y=F_5(x)$,x)

$$\{x=y\}$$

solve($y=F_6(x)$,x)

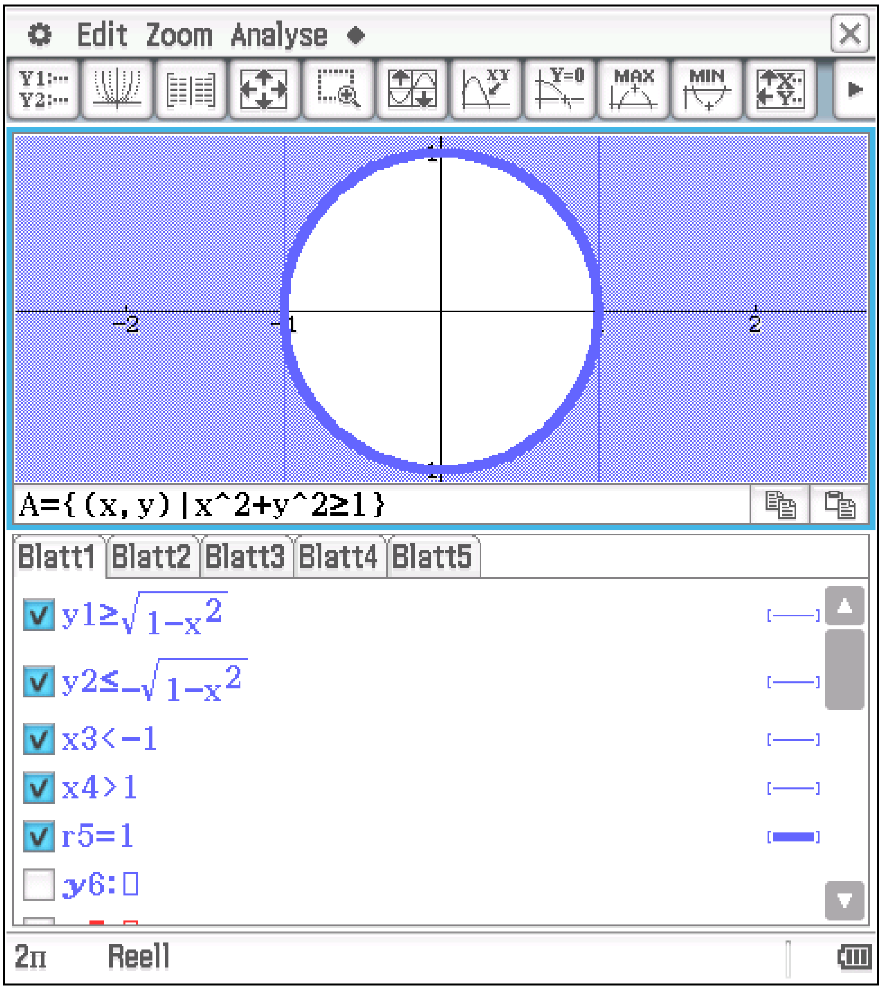
$$\{x=y\}$$

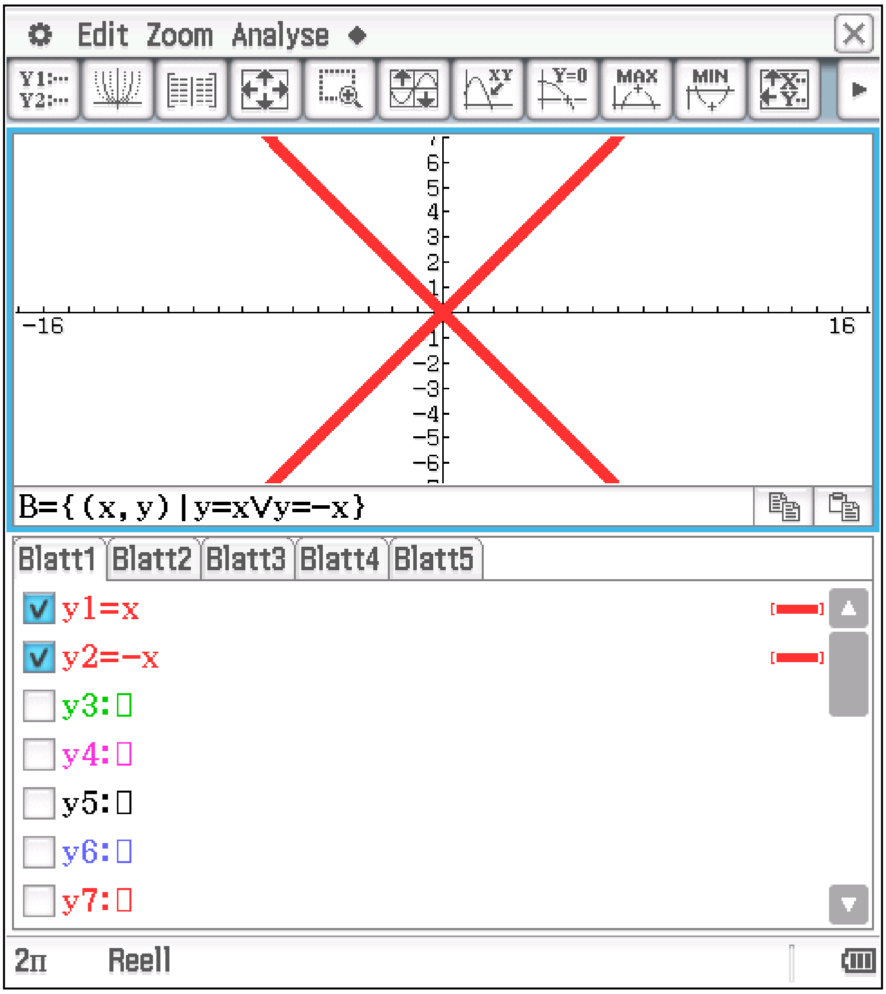
Die Umkehrfunktionen lauten:

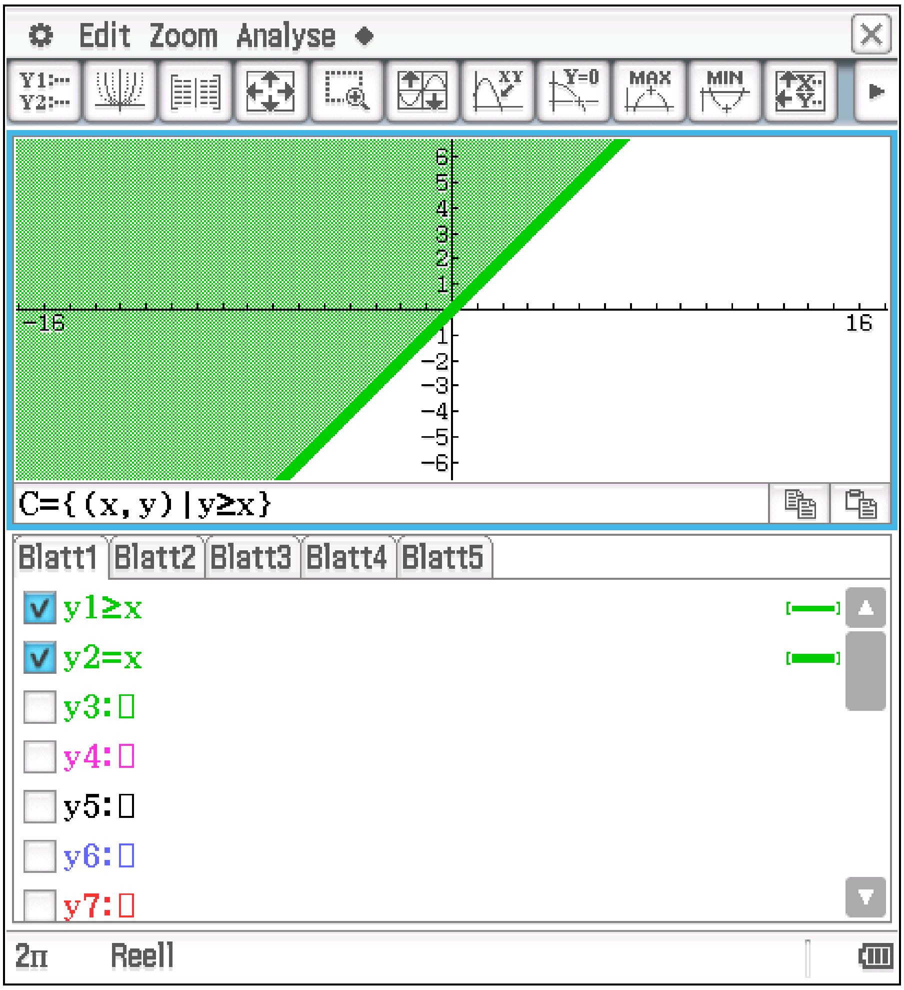
$x=F_1^{-1}(y)=\frac{1}{y}$, $x=F_2^{-1}(y)=-y+1$, $x=F_3^{-1}(y)=\frac{-1}{y}+1$,

$x=F_4^{-1}(y)=\frac{-1}{y-1}$, $x=F_5^{-1}(y)=y$, $x=F_6^{-1}(y)=y$

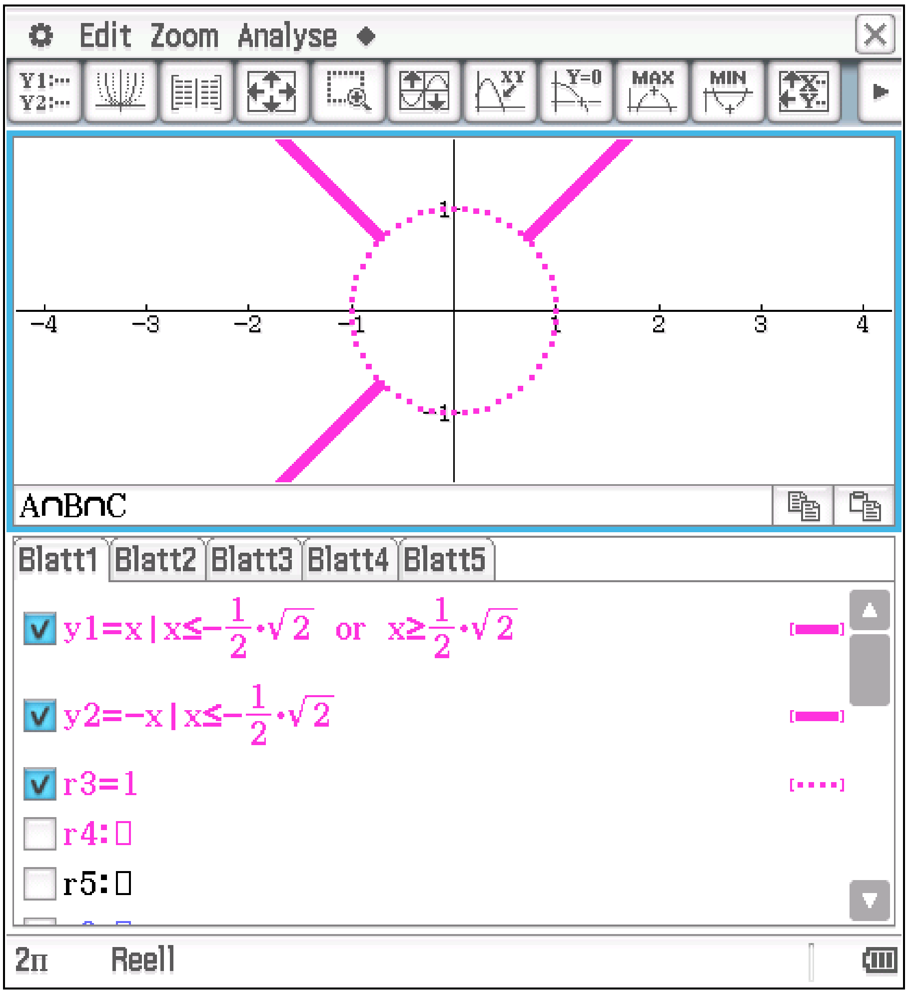
Hintergrundbilder zu den 2D-Grafiken (Aufg. 2)



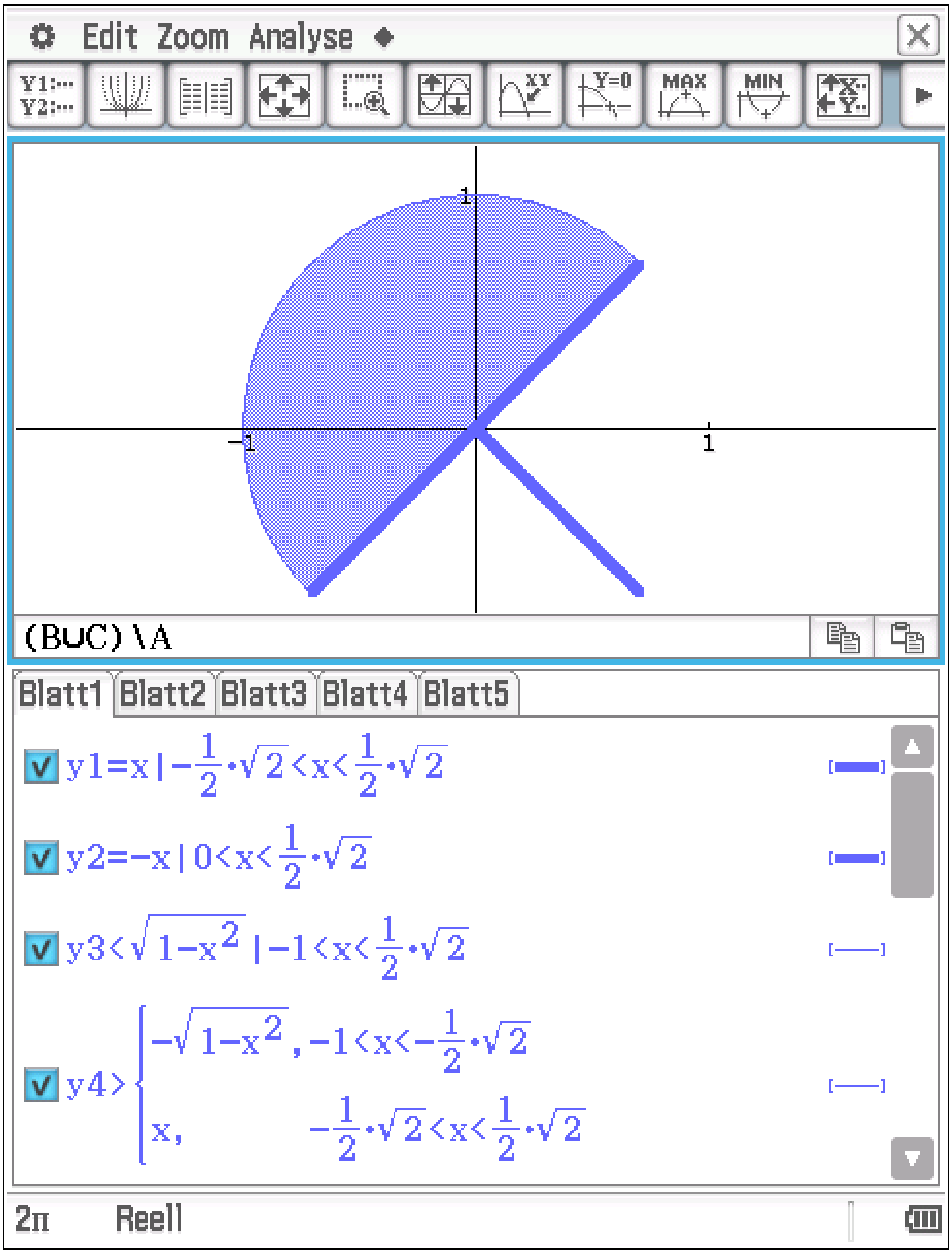


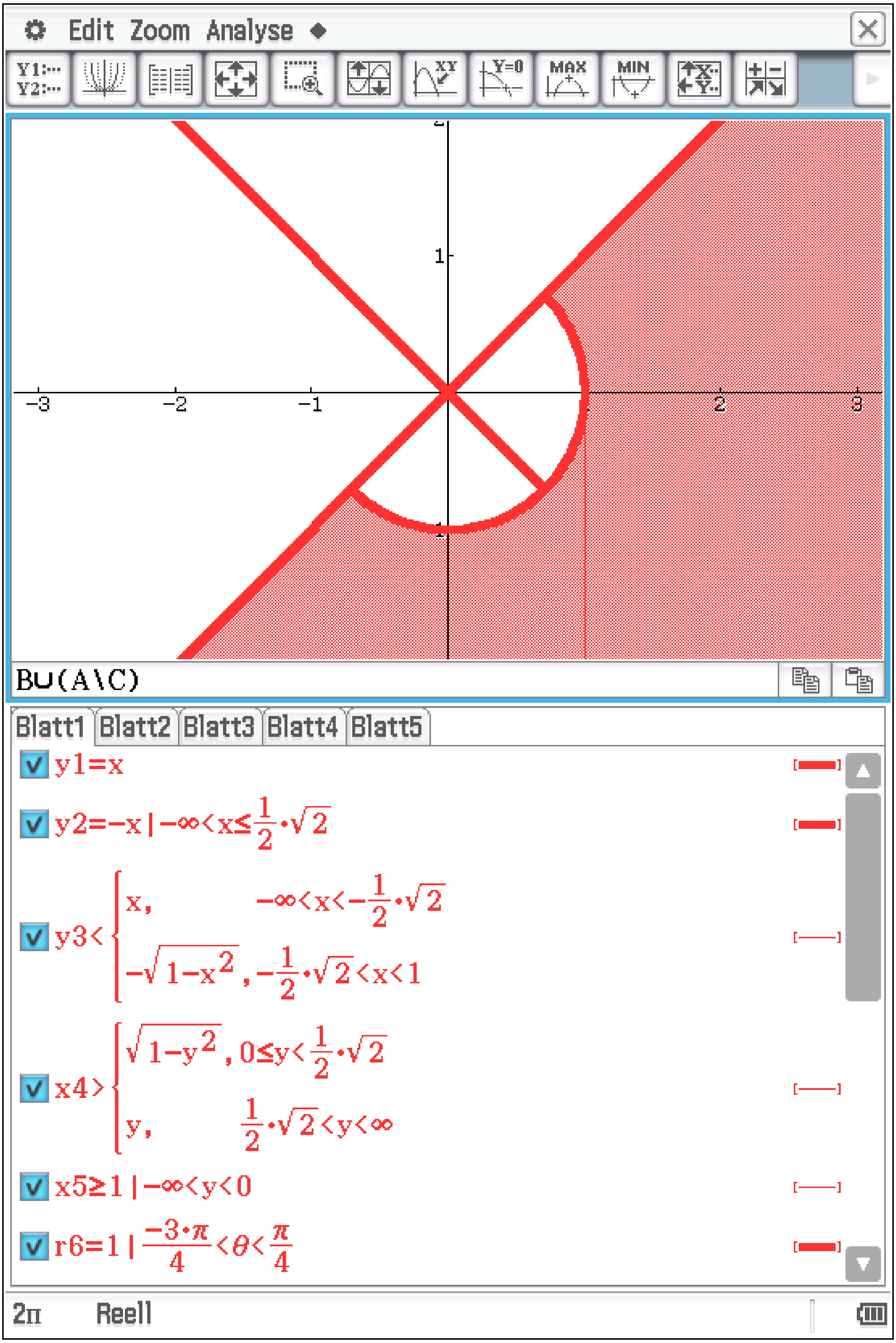


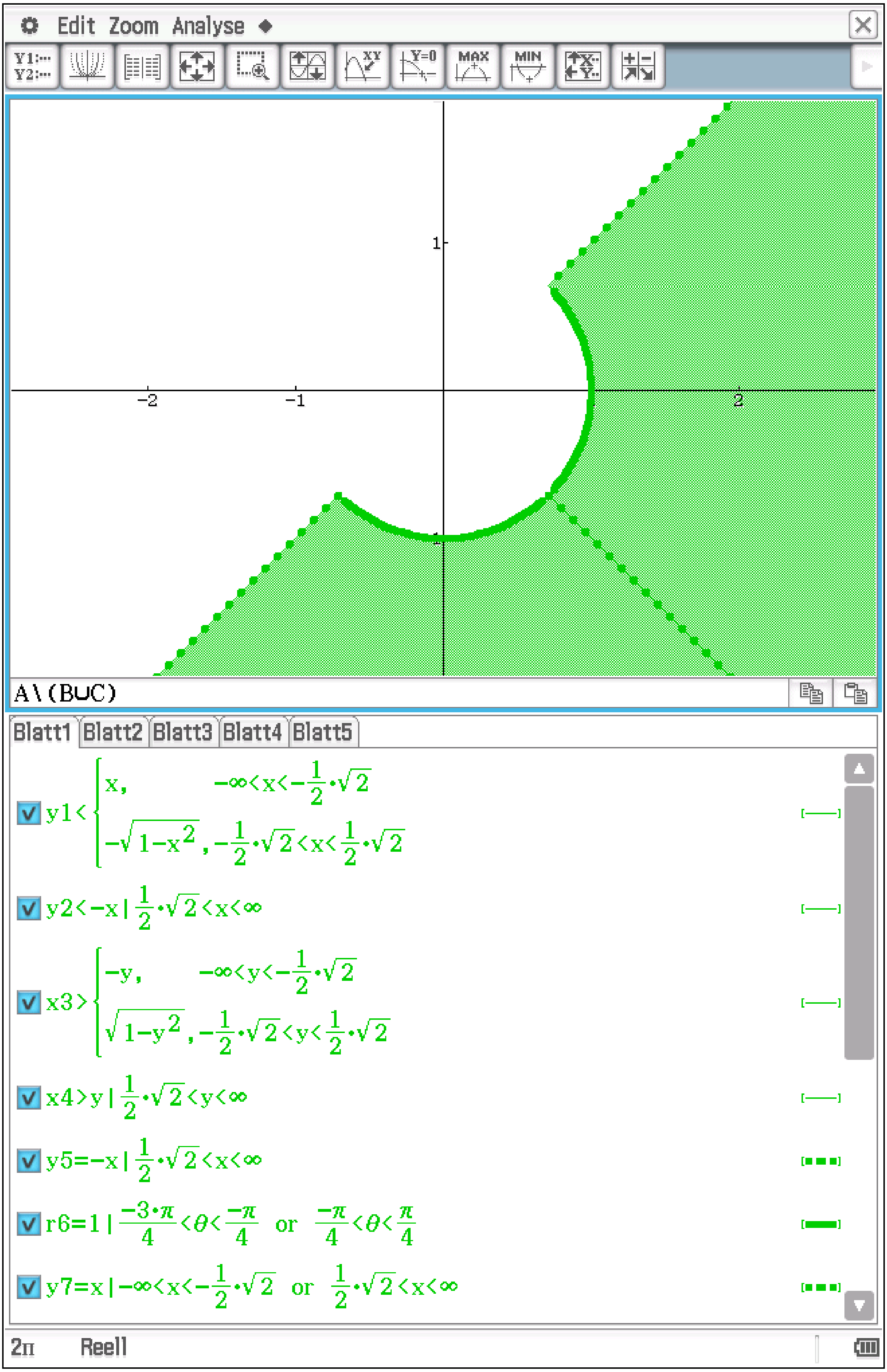
Halbgeraden, beginnend ab dem Einheitskreis:



„Regenschirm“ ohne oberen Rand und ohne Anfangspunkt am „Griff“




Edit Zoom Analyse
1
-3
-2
-1
2
3
B∪(A\C)
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
y1=x
y2=−x | −∞<x≤1/2·√2
y3< { x, −∞<x<−1/2·√2 ; −√(1−x²), −1/2·√2<x<1 }
x4> { √(1−y²), 0≤y<1/2·√2 ; y, 1/2·√2<y<∞ }
x5≥1 | −∞<y<0
r6=1 | −3·π/4<θ<π/4
2π Reell



Zweigeteilte Punktmenge (ohne begrenzende Geraden)

Hintergrundbilder zu den 2D-Grafiken (Aufg. 4)

Die Ergebnismenge zerfällt in 6 Teile wie folgt:

Rechteck ohne unteren Rand

Quadrat ohne oberen Rand

Waagerechte Strecke mit Endpunkten

Senkrechte Strecken mit jeweils nur einen Endpunkt und ein Einzelpunkt