Prof. Dr. Ludwig Paditz, 5.Mathe-Intensivkurs 2014

Einführung in die CAS-Software (ClassPad)
=====================================
Kurs Prof. Scholz:
==================

Mengenlehre:

===
Die Rechenoperationen $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\times$, Δ (sowie Potenzmengen und Kardinalzahlen) und die Relationen $=$, $\subset$, $\subseteq$, $\not\subset$, $\not\subseteq$ sowie $\in$, $\notin$, $\emptyset$, Ω, A, $\bar{A}$, B, $\bar{B}$ sind zwar im Zeichensatz des ClassPad vorhanden, können aber nicht im CAS genutzt werden. D.h., die Mengenlehre ist zurzeit nicht im Betriebssystem des ClassPad implementiert.

Informatik-Studenten der HTW Dresden haben in den zurückliegenden Jahren im Projektseminar die Mengenlehre für den ClassPad programmiert und zusätzlich AddIns generiert.

Die Programme zur Mengenlehre liegen im library-Ordner dieses vcp-files:
Programm "Menge" zur Mengenlehre
Programm "StrOVenn" generiert zusätzlich Venn-Diagramme

Diese Rahmenprogramme nutzen außerdem Unterprogramme, vgl. Bedienungsanleitung
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/
Bedienungsanleitung_Menge_Version_0_9_13.pdf

Das besondere dieser Programme besteht darin, dass auch **Mengen mit Elementen nichtnumerischer Art** verarbeitet werden können.
Z.B. Mengen mit Vornamen oder Mengen mit e-mail-Adressen usw.
Die Programmierung beruht auf der Zeichenkettenverarbeitung.

Die erwähnten AddIns (sogen. ***.cpa**-files) können nicht in den ClassPad-Manager eingebunden werden sondern lediglich in älteren TR implementiert werden (ClassPad330 und älter, nicht ClassPad330PLUS oder ClassPad400, da hier das AddIn ein anderes Datenformat hat: ***.c1a** bzw ***.c2a**).

Unabhängig davon liegen diese AddIns als eigenständige PC-Version vor:
AddIn "Real Sets"(2011) und **AddIn "Venn-Diagramm"(2014)**
download:
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/Mengenlehre-Add-In-Real-Sets.zip
bzw.
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/Mengenlehre-Add-In-Venn-Diagramm.rar
==

Beispiel 1: Mengen nichtnumerischer Art
====================================
A="Menge aller rechtwinkligen Dreiecke"
B="Menge aller Dreiecke"
Offenbar gilt **$A \subset B$**

Bem.: Die oben genannten Programme können nur Mengen mit endlich vielen unterscheidbaren Elementen verarbeiten.

Beispiel 2: Mengen nichtnumerischer Art
==

A="Menge aller Quadrate"
B="Menge aller Vierecke mit vier gleichlangen Seiten und 4 rechten Winkeln"   Offenbar gilt **A=B**

Beispiel 3: endliche Zahlenmengen
====================================

seq(x,x,0,10,1)

{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

M:="{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}"

"{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}"

A:="{0,2,6,8}"

"{0,2,6,8}"

B:="{1,2,5}"

"{1,2,5}"

Es gilt $\bar{A}$**=M\A:**

Menge(M,"-",A)

done

Ergebnis

"{1,3,4,5,7,9,10}"

Es gilt $\bar{B}$**=M\B:**

Menge(M,"-",B)

done

Ergebnis

"{0,3,4,6,7,8,9,10}"

Menge(A,"∪",B)

done

Ergebnis

"{0,1,2,5,6,8}"

```
Menge(A,"∩",B)
                                                        done
Ergebnis
                                                       "{2}"
Menge(A,"-",B)
                                                        done
Ergebnis
                                                   "{0,6,8}"
Menge(B,"-",A)
                                                        done
Ergebnis
                                                     "{1,5}"
Menge(A,"×",B)
                                                        done
Ergebnis
    "{(0,1),(0,2),(0,5),(2,1),(2,2),(2,5),(6,1),(6,▸
Menge(B,"×",A)
                                                        done
Ergebnis
    "{(1,0),(1,2),(1,6),(1,8),(2,0),(2,2),(2,6),(2,▸
```

Zusatz:
=======

```
Menge(M,"C","dummy")
                                                        done
```

Kardinalzahl von M:

```
Ergebnis
                                                          11
Menge(A,"-",M)
                                                        done
```

leere Menge:

```
Ergebnis
                                                         "Ø"
```

```
Menge(B,"P","dummy")
                                                        done
```

Potenzmenge zu B (Menge aller Teilmengen von B):

```
Ergebnis
        "{Ø,{1},{2},{5},{1,2},{1,5},{2,5},{1,2,5}}"
```

Beispiel 4: Abbildungen (nicht notwendig eindeutig)

```
======================
A:="{x,y,z}"
                                                     "{x,y,z}"
B:="{1,2}"
                                                       "{1,2}"
Menge(A,"×",B)
                                                        done
F1:=Ergebnis
            "{(x,1),(x,2),(y,1),(y,2),(z,1),(z,2)}"
Menge(A,"×","{1}")
                                                        done
F2:=Ergebnis
                              "{(x,1),(y,1),(z,1)}"
Menge("{x,z}","×",B)
                                                        done
F3:=Ergebnis
                        "{(x,1),(x,2),(z,1),(z,2)}"
Menge("{y,z}","×","{1}")
                                                        done
F4:=Ergebnis
                                    "{(y,1),(z,1)}"
```

Beispiel 5: Funktion (eindeutige Abbildung)

```
=====================
Define f(x)=2x
                                                        done
```

A:={0,1,3}

{0,1,3}

B:=f(A)

{0,2,6}

elementweise Abbildung:

Menge("{0}","x","{0}")

done

E1:=Ergebnis

"{(0,0)}"

Menge("{1}","x","{2}")

done

E2:=Ergebnis

"{(1,2)}"

Menge("{3}","x","{6}")

done

E3:=Ergebnis

"{(3,6)}"

Menge(E1,"∪",E2)

done

Ergebnis

"{(0,0),(1,2)}"

Menge(Ergebnis,"∪",E3)

done

F_1:=Ergebnis

"{(0,0),(1,2),(3,6)}"

Wurzelziehen:

positive Wurzel:
Define $f1(x)=\sqrt{x}$

done

negative Wurzel:
Define $f2(x)=-\sqrt{x}$

done

```
A:={0,1}
```
$\{0,1\}$

```
f1(A)
```
$\{0,1\}$

```
f2(A)
```
$\{0,-1\}$

Gesamtmenge der Funktionswerte:
Menge("{0,1}","∪","{0,-1}")

done

```
B:=Ergebnis
```
"{-1,0,1}"

keine eindeutige Abbildung!

Beispiel 6: eineindeutige Abbildung
===================================

```
Define f(x)=2x
```
done

```
A:={0,1,3}
```
$\{0,1,3\}$

```
B:=f(A)
```
$\{0,2,6\}$

```
solve(y=f(x),x)
```
$\left\{x=\frac{y}{2}\right\}$

Define $f^{-1}(y)=\frac{y}{2}$

done

```
B:=f(A)
```
$\{0,2,6\}$

$f^{-1}(B)$

$\{0,1,3\}$

Bem.: f^{-1} bezeichnet die Umkehrfunktion

Aufgaben

=========

1. Mengenoperationen

Hinweis: \ (backslash) ist im TR das Symbol für **Ordner\Unterordner** oder **Ordner\Datei** und kann nicht anders verwendet werden, z.B. als Operationszeichen für die Differenz von Mengen. Deshalb wird hier statt "\" das Symbol "-" benutzt.

A:="{1,2,4,6,8,9,13}"

"{1,2,4,6,8,9,13}"

B:="{0,2,5,7}"

"{0,2,5,7}"

C:="{4,7,8,11}"

"{4,7,8,11}"

D:="{4,8,9,13}"

"{4,8,9,13}"

a)

Menge(A,"∩",B)

done

Ergebnis

"{2}"

b)

Menge(C,"-",D)

done

Ergebnis

"{7,11}"

c)

Menge(D,"∩",A)

done

Ergebnis

"{4,8,9,13}"

d)

```
Menge(B,"∪",C)
                                                  done
E1:=Ergebnis
                                   "{0,2,4,5,7,8,11}"
Menge(E1,"∩",D)
                                                  done
Ergebnis
                                               "{4,8}"
```

e)

```
Menge(A,"-",D)
                                                  done
E1:=Ergebnis
                                             "{1,2,6}"
Menge(E1,"-",B)
                                                  done
Ergebnis
                                               "{1,6}"
```

f)

```
Menge(A,"∩",C)
                                                  done
E1:=Ergebnis
                                               "{4,8}"
Menge(B,"∩",D)
                                                  done
E2:=Ergebnis
                                                   "ø"
Menge(E1,"∪",E2)
                                                  done
Ergebnis
                                               "{4,8}"
```

2. Punktmengen in der x-y-Ebene

Es handelt sich hier um Mengen mit unendlich vielen Punkten, die als 2D-Grafik dargestellt werden.

a) 2D-Grafik
A ist das Äußere des Einheitskreises, einschließlich der Rand

$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geq 1\}$

B enthält die beiden Winkelhalbierenden y=x und y=-x

$B=\{(x,y)\mid y=x \vee y=-x\}$

C enthält die obere Halbebene zu y=x, einschließlich der Rand

$C=\{(x,y)\mid y\geq x\}$

b) $A\cap B\cap C$
die gemeinsamen Punkte liegen auf Halbgeraden (mit Anfangspunkt) im I. bis III. Quadranten, beginnend ab dem Einheitskreis:
$y=x$ mit $|x|\geq\frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $y=-x$ mit $x\leq-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$A\cap B\cap C$

c) $(B\cup C)\setminus A=(B\cup C)\cap\bar{A}=(B\cap\bar{A})\cup(C\cap\bar{A})$
$(B\cap\bar{A})$ Geradenstücke innerhalb des Einheitskreises (ohne Randpunkte)
$(C\cap\bar{A})$ Halbkreisfläche ohne Kreisrand, jedoch mit Innenrand (Durchmesser)

$(B\cup C)\setminus A$

d) $B\cup(A\setminus C)=B\cup(A\cap$nicht$C)=(B\cup A)\cap(B\cup$nicht$C)$
$(B\cup A)$ äußere des Einheitskreises, einschließlich der Rand, und die Winkelhalbierenden
$(B\cup$nicht$C)$ untere Halbebene (ohne Rand y=x) mit

Winkelhalbierenden

$B\cup(A\setminus C)$

e) $A\setminus(B\cup C)=A\cap\text{nicht}(B\cup C)=A\cap\bar{B}\cap\text{nicht}C$

$A\cap\bar{B}$ äußere des Einheitskreises, einschließlich der Rand, ohne die Winkelhalbierenden

$A\cap\bar{B}\cap$nichtC äußere des Einheitskreises, einschließlich der Rand, ohne die Winkelhalbierenden und unterhalb von y=x

$A\setminus(B\cup C)$

3. Kreuzprodukte

A:="{1,2,3}"

"{1,2,3}"

B:="{4,5}"

"{4,5}"

a)

Menge(A,"x",B)

done

Ergebnis

"{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)}"

b)

Menge(B,"x",A)

done

Ergebnis

"{(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3)}"

c)

Menge(A,"x",A)

done

E1:=Ergebnis

"{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,

d)

Menge(B,"x",B)

done

Ergebnis

"{(4,4),(4,5),(5,4),(5,5)}"

e)

Menge(E1,"x",B)

done

Ergebnis

"{(1,1,4),(1,1,5),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,3,▸

Ergebnis als Text mit Zeilenumbruch:

"{(1,1,4),(1,1,5),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),
(1,3,5),(2,1,4),(2,1,5),(2,2,4),(2,2,5),
(2,3,4),(2,3,5),(3,1,4),(3,1,5),(3,2,4),
(3,2,5),(3,3,4),(3,3,5)}"

4. 2D-Grafik eines Kreuzproduktes

A={x∈**R**|0≤x≤1∨x=3} abgeschlossenes Intervall und Einzelwert

B={y∈**R**|1<y≤3∨y=4∨5≤y<6} halboffene Intervalle und Einzelwert

A×**B**	Y1:… Y2:…

5. eindeutige Abbildung

Zuordnung unterscheidbarer Gleichungen zu deren Lösung

a) mit dem Parameter p∈**R** wird die Gleichung Gl(p)

x^2+8p×x+p^2=0 definiert

solve(x^2+8p×x+p^2=0,x)

$$\left\{x=-\sqrt{15}\cdot|p|-4\cdot p, x=\sqrt{15}\cdot|p|-4\cdot p\right\}$$

Für p=0 ist die Lösung eindeutig: $x_n=0$

Für p≠0 ist die Lösung nicht eindeutig:

$x_n=-4p\pm\sqrt{15}\,p$

Damit ist die Zuordnung Gl(p)→x_n nicht eindeutig!

b) mit dem Parameter $p \in \mathbb{R}$ wird die Gleichung Gl(p)

$x^2+p \times x+\frac{p^2}{4}=0$ definiert

solve($x^2+p \times x+\frac{p^2}{4}=0$, x)

$$\left\{x=\frac{-p}{2}\right\}$$

Damit ist die Zuordnung $Gl(p) \rightarrow x_n=\frac{-p}{2}$ eindeutig!

6. verkettete Funktionen

Define $F_1(x)=1/x$

done

Define $F_2(x)=1-x$

done

a)

Define $F_3(x)=F_1(F_2(x))$

done

$F_3(x)$

$$\frac{-1}{x-1}$$

Define $F_4(x)=F_2(F_1(x))$

done

$F_4(x)$

$$\frac{-1}{x}+1$$

Define $F_5(x)=F_1(F_1(x))$

done

$F_5(x)$

$$x$$

Define $F_6(x)=F_2(F_2(x))$

done

$F_6(x)$

$$x$$

b) Umkehrfunktionen

solve($y=F_1(x),x$)

$$\left\{x=\frac{1}{y}\right\}$$

solve($y=F_2(x),x$)

$$\{x=-y+1\}$$

solve($y=F_3(x),x$)

$$\left\{x=\frac{-1}{y}+1\right\}$$

solve($y=F_4(x),x$)

$$\left\{x=\frac{-1}{y-1}\right\}$$

solve($y=F_5(x),x$)

$$\{x=y\}$$

solve($y=F_6(x),x$)

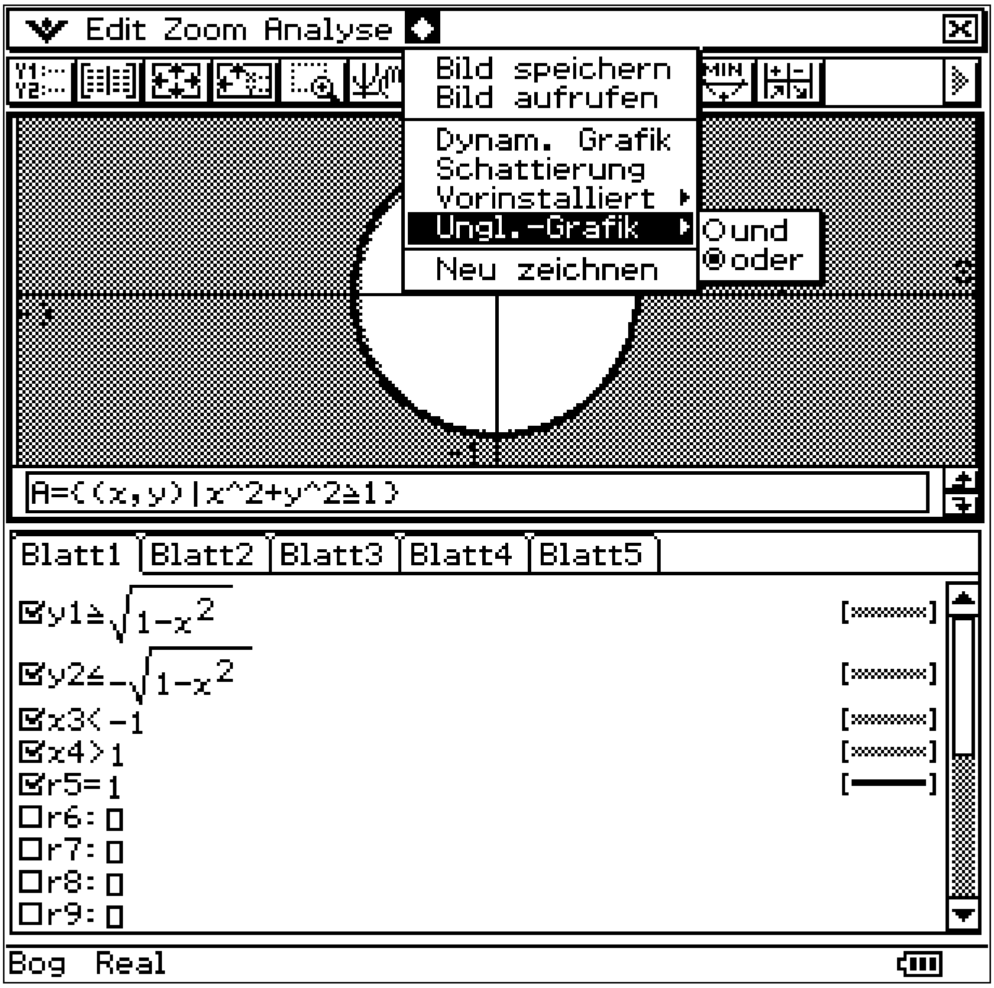
$$\{x=y\}$$

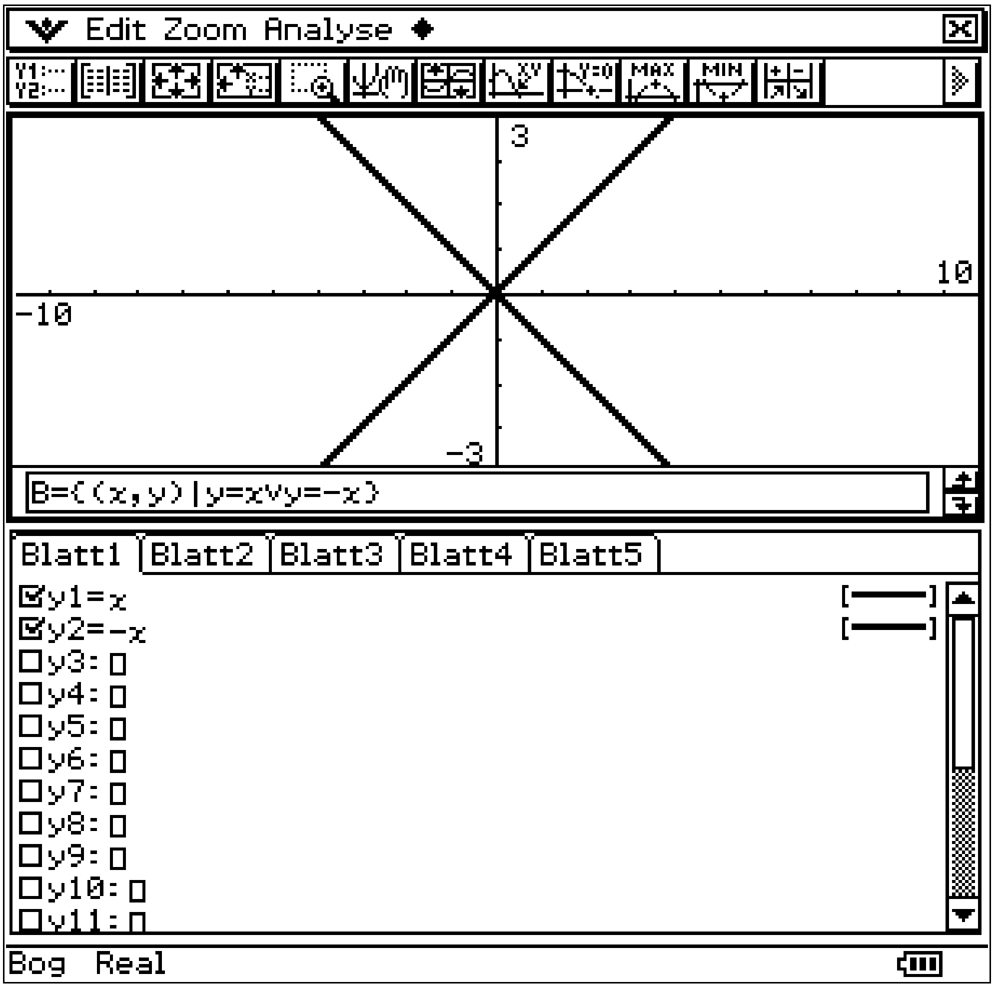
Die Umkehrfunktionen lauten:

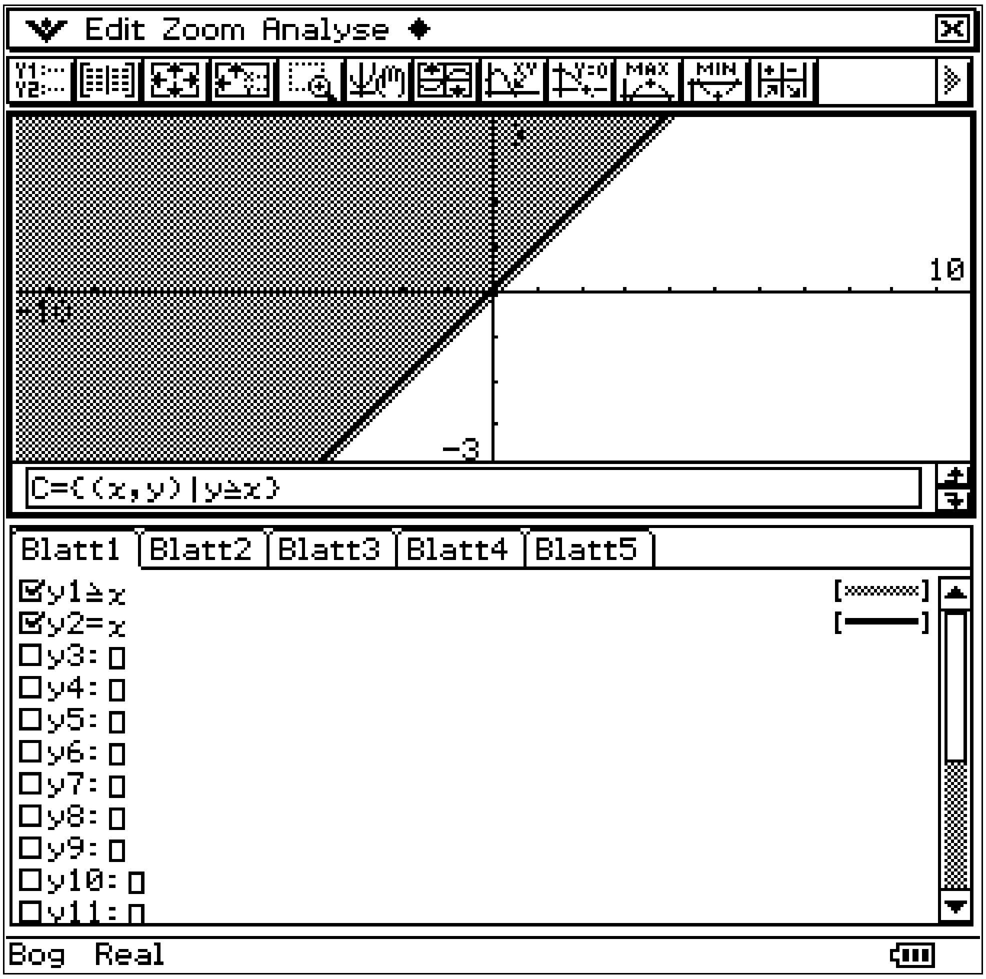
$x=F_1^{-1}(y)=\frac{1}{y}$, $x=F_2^{-1}(y)=-y+1$, $x=F_3^{-1}(y)=\frac{-1}{y}+1$,

$x=F_4^{-1}(y)=\frac{-1}{y-1}$, $x=F_5^{-1}(y)=y$, $x=F_6^{-1}(y)=y$

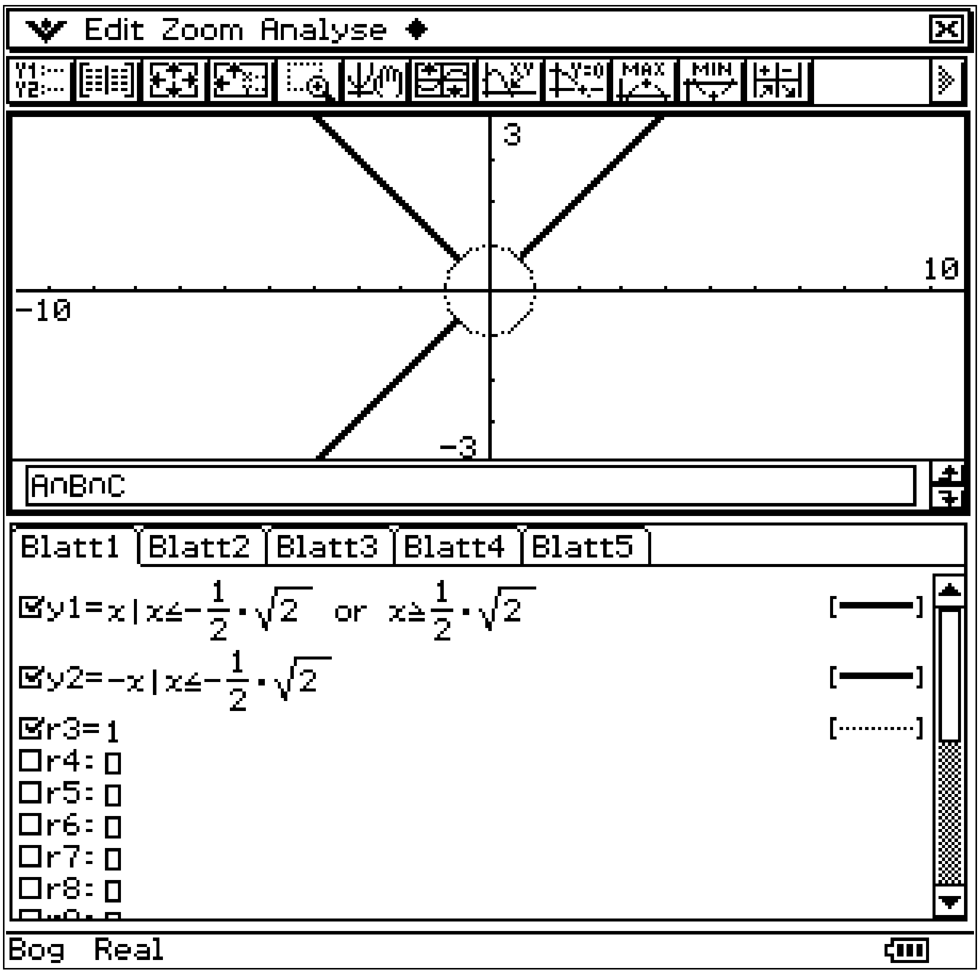
Hintergrundbilder zu den 2D-Grafiken (Aufg. 2)



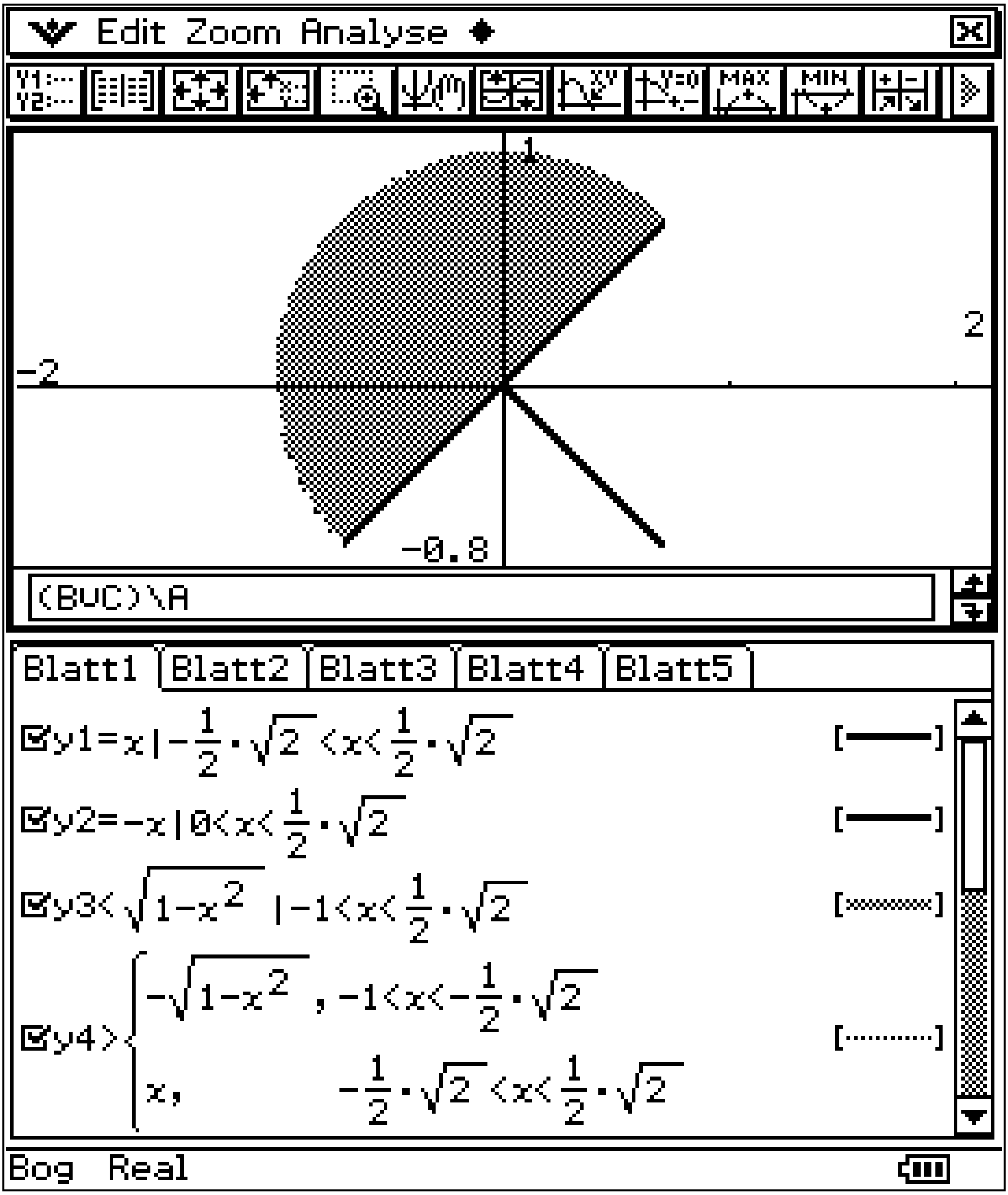


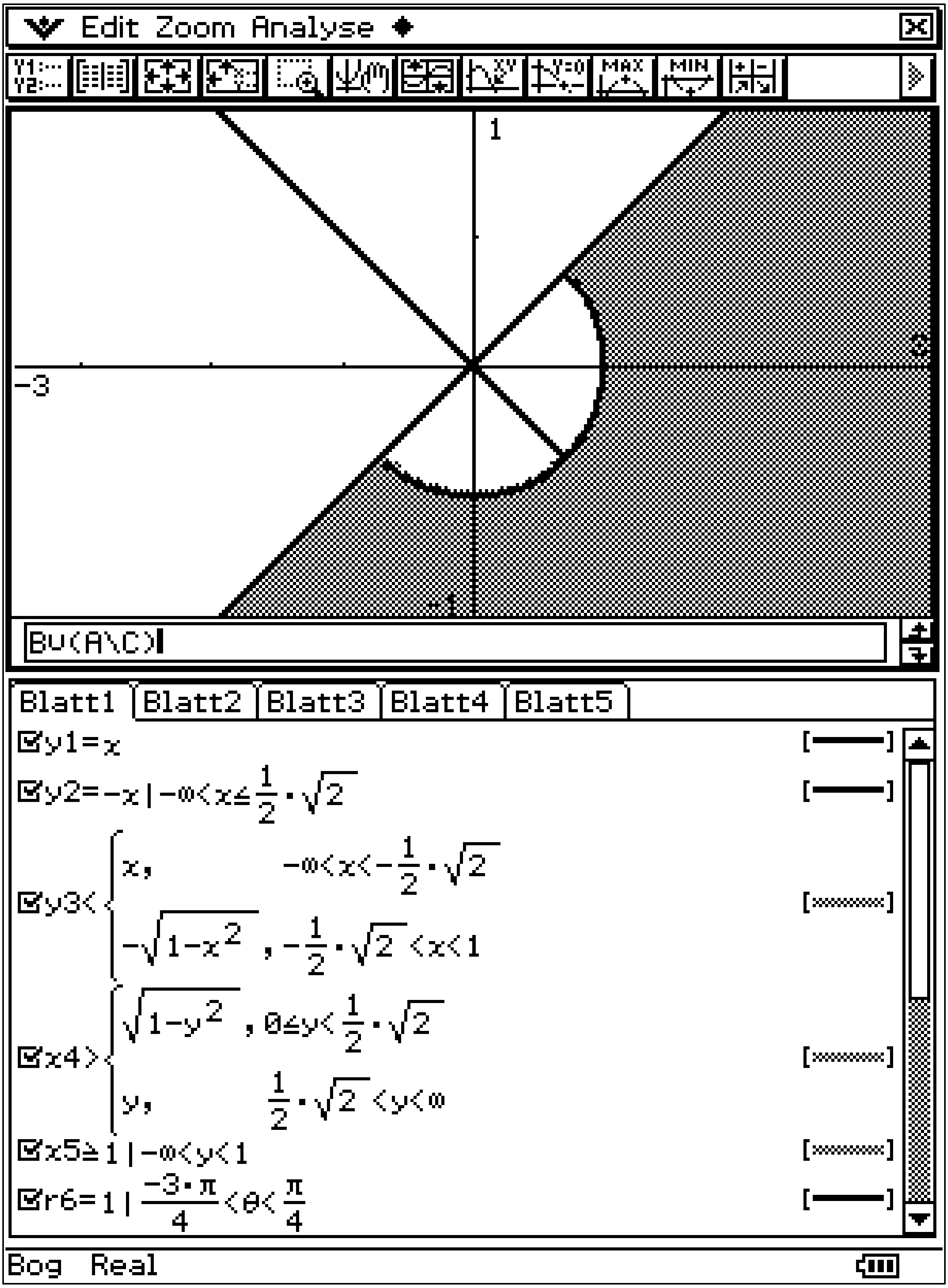


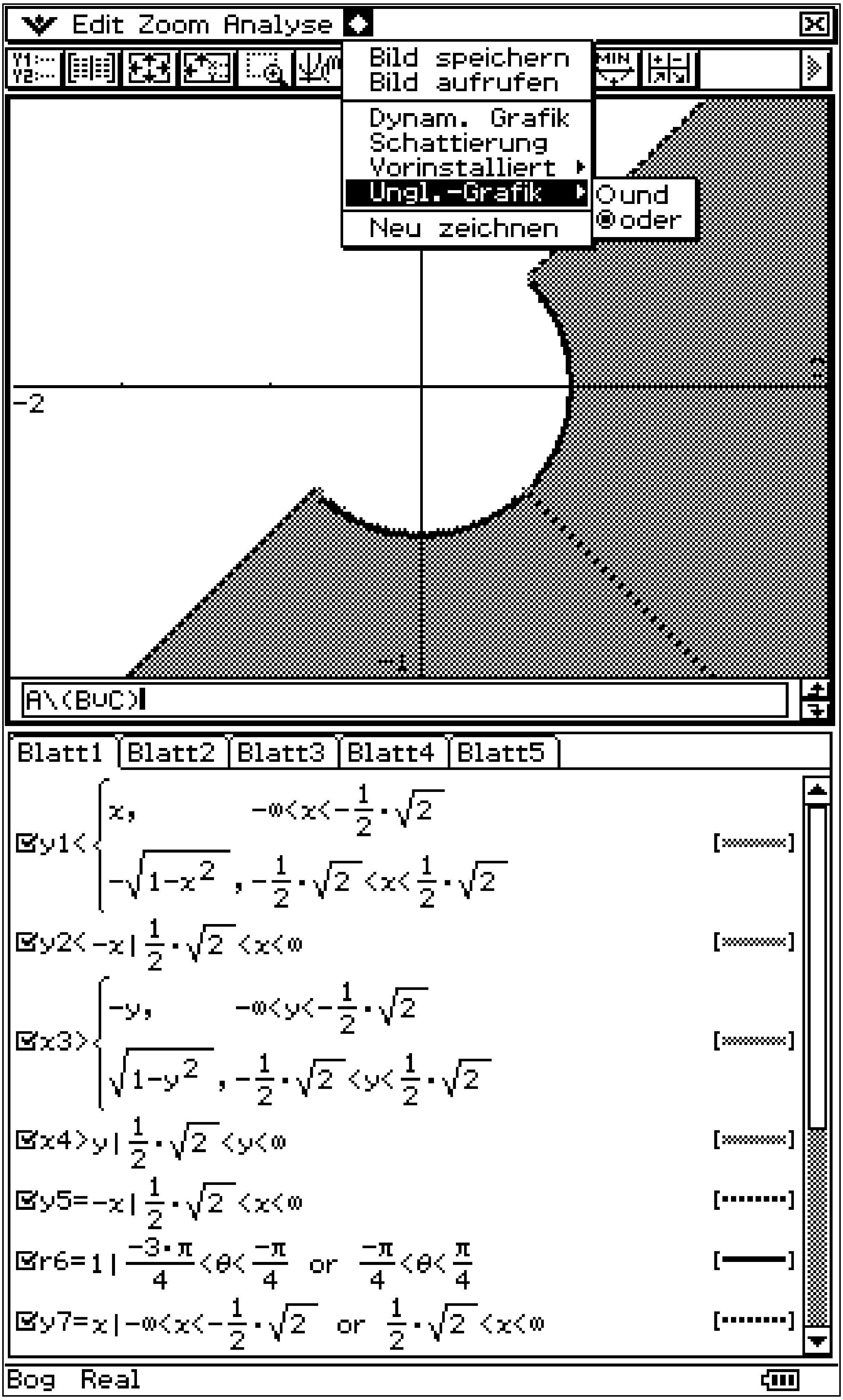
Halbgeraden, beginnend ab dem Einheitskreis:



„Regenschirm“ ohne oberen Rand und ohne Anfangspunkt am „Griff“




Edit Zoom Analyse
1
-3
3
-1
B∪(A\C)
Blatt1
Blatt2
Blatt3
Blatt4
Blatt5
$y1=x$
$y2=-x \mid -\infty<x\le\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$
$y3<\begin{cases} x, & -\infty<x<-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \\ -\sqrt{1-x^2}, & -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}<x<1 \end{cases}$
$x4>\begin{cases} \sqrt{1-y^2}, & 0\le y<\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \\ y, & \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}<y<\infty \end{cases}$
$x5\ge 1 \mid -\infty<y<1$
$r6=1 \mid \frac{-3\cdot\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$
Bog Real



Zweigeteilte Punktmenge (ohne begrenzende Geraden)

Hintergrundbilder zu den 2D-Grafiken (Aufg. 4)

Die Ergebnismenge zerfällt in 6 Teile wie folgt:

Rechteck ohne unteren Rand

Quadrat ohne oberen Rand

Waagerechte Strecke mit Endpunkten

Senkrechte Strecken mit jeweils nur einen Endpunkt und ein Einzelpunkt