

Einführung in die CAS-Software (ClassPad)

=====

Kurs Prof. Scholz:

=====

Logarithmen: im CAS werden alle Logarithmen über den natürlichen Logarithmus $\ln(\dots)$ dargestellt.

Hinweis: im CAS werden Argumente von Funktionen **stets in Klammern** gesetzt,

z.B. $\ln(x)$ statt $\ln x$ oder $\ln x$

Dann kann es nicht zu Irritationen kommen, was

z.B. $\ln x^y$ bedeutet: $\ln(xy)$ oder

$\ln(x)^y = y * \ln(x) = \ln(x^y)$

Beispiele

=====

1) Termumformung mit $16=2^4$

$$\log_2(16) = 4$$

$$4=4$$

$$2^{\text{ans}}$$

$$16=16$$

2) Termumformung für $x \in \mathbb{R}$

$$\log_{1/2}(4) = x$$

$$-2=x$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\text{ans}}$$

$$4 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$\text{solve}(\text{ans}, x)$$

$$\{x=-2\}$$

3) Gleichungsumformung für $x > 0$

$$\log_3(x) = 4$$

$$\frac{\ln(x)}{\ln(3)} = 4$$

$$3^{\log_3(x)} = 3^4$$

$$3^{\frac{\ln(x)}{\ln(3)}} = 81$$

$$\text{simplify}(3^{\log_3(x)})$$

x

$$\text{solve}(\log_3(x) = 4, x)$$

$$\{x=81\}$$

4) Gleichungsumformung für $x > 0$ und $x \neq 1$

$$\log_x(27) = 3$$

$$\frac{3 \cdot \ln(3)}{\ln(x)} = 3$$

$$x^{\log_x(27)} = x^3$$

$$x^{\frac{3 \cdot \ln(3)}{\ln(x)}} = x^3$$

$$\text{simplify}(\text{ans})$$

$$27 = x^3$$

$$\text{solve}(\log_x(27) = 3, x)$$

$$\{x=3\}$$

5) Termumformung für $b > 0$ und $\frac{a}{c+d} > 0$

Hinw.: log bezeichnet im TR den dekadischen Logarithmus

$$\text{judge}\left(\log\left(\frac{a\sqrt{b}}{c+d}\right) = \log_{10}\left(\frac{a\sqrt{b}}{c+d}\right)\right),$$

TRUE

$$\log\left(\frac{a\sqrt{b}}{c+d}\right)$$

$$\log\left(\frac{a\sqrt{b}}{c+d}\right)$$

expand(ans)

$$\log\left(\frac{a\sqrt{b}}{c+d}\right)$$

6) für $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$

$$\ln(2a) + 2\ln(b) - 2\ln(2c)$$

$$\ln(a) + 2 \cdot \ln(b) - 2 \cdot (\ln(c) + \ln(2)) + \ln(2)$$

simplify(ans)

$$2 \cdot \ln(b) - 2 \cdot \ln(c) + \ln\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$\text{judge}\left(\ln\left(\frac{2a \times b^2}{(2c)^2}\right) = \ln(2a) + 2\ln(b) - 2\ln(2c)\right)$$

Undefined

$$\text{judge}\left(\ln\left(\frac{2a \times b^2}{(2c)^2}\right) = \ln(2a) + 2\ln(b) - 2\ln(2c) \mid \{a > 0, b > 0, c > 0\}\right)$$

TRUE

Bem.: Termumformungen sind an Vorzeichenbedingungen gebunden.

7)

$$\frac{1}{2} \log_2(x^2 - x \times y + y^2) + \frac{1}{2} \log_2(x + y)$$

$$\frac{\ln(x^2 + y^2 - x \cdot y)}{2 \cdot \ln(2)} + \frac{\ln(x + y)}{2 \cdot \ln(2)}$$

simplify(ans)

$$\text{judge}\left(\frac{\ln(x^2+y^2-x\cdot y)+\ln(x+y)}{2\cdot\ln(2)} = \frac{\ln((x^2+y^2-x\cdot y)(x+y))}{2\cdot\ln(2)}\right)$$

Undefined

$$\text{judge}\left(\frac{\ln(x^2+y^2-x\cdot y)+\ln(x+y)}{2\cdot\ln(2)} = \frac{\ln((x^2+y^2-x\cdot y)(x+y))}{2\cdot\ln(2)}\right)$$

TRUE

simplify((x^2+y^2-x*y)(x+y))

$$x^3+y^3$$

$$\text{judge}\left(\frac{\ln(x^2+y^2-x\cdot y)+\ln(x+y)}{2\cdot\ln(2)} = \frac{\ln(x^3+y^3)}{2\cdot\ln(2)}\right)$$

Undefined

$$\text{judge}\left(\frac{\ln(x^2+y^2-x\cdot y)+\ln(x+y)}{2\cdot\ln(2)} = \frac{\ln(x^3+y^3)}{2\cdot\ln(2)} \mid x>0 \text{ and } y>0\right)$$

TRUE

$$\text{judge}\left(\frac{\ln(x^2+y^2-x\cdot y)+\ln(x+y)}{2\cdot\ln(2)} = \frac{1}{2} \log_2(x^3+y^3)\right)$$

Undefined

$$\text{judge}\left(\frac{\ln(x^2+y^2-x\cdot y)+\ln(x+y)}{2\cdot\ln(2)} = \frac{1}{2} \log_2(x^3+y^3) \mid x>0 \text{ and } y>0\right)$$

TRUE

log₂(sqrt(x^3+y^3))

$$\frac{\ln(x^3+y^3)}{2\cdot\ln(2)}$$

$$\text{judge}\left(\frac{1}{2} \log_2(x^2-x\cdot y+y^2) + \frac{1}{2} \log_2(x+y) = \log_2\left(\sqrt{x^3+y^3}\right)\right)$$

Undefined

$$\text{judge}\left(\frac{1}{2}\log_2(x^2 - x \cdot y + y^2) + \frac{1}{2}\log_2(x+y) = \log_2\left(\sqrt{x^3 + y}\right)\right)$$

TRUE

8) Bestimmungsgleichung für $x \in \mathbb{R}$

$$\log(2^x) + \log(3^x) + \log(5^x) = 4$$

$$x \cdot \log(5) + x \cdot \log(3) + x \cdot \log(2) = 4$$

factor(ans)

$$x \cdot \log(30) = 2^2$$

solve(ans, x)

$$\left\{ x = \frac{4}{\log(3)+1} \right\}$$

Bem.: eine kurze Lösungsdarstellung ist $x = \frac{4}{\log(30)}$

9) für $a > 0$ und $b > 0$

$$a^{5-x} = (3b)^{x+1}$$

$$a^{-x+5} = (3 \cdot b)^{x+1}$$

solve(ans, x)

$$\left\{ -(3 \cdot b)^{x+1} + a^{-x+5} = 0 \right\}$$

Bem.: die logarithmierte Gl. ist leichter lösbar

$$\ln(a^{5-x} = (3b)^{x+1})$$

$$\ln(a^{-x+5}) = \ln((3 \cdot b)^{x+1})$$

simplify(ans | a > 0 and b > 0)

$$-(x-5) \cdot \ln(a) = (x+1) \cdot \ln(3 \cdot b)$$

solve(ans, x)

$$\left\{ x = \frac{5 \cdot \ln(a)}{\ln(a) + \ln(b) + \ln(3)} - \frac{\ln(b)}{\ln(a) + \ln(b) + \ln(3)} - \frac{\ln(3)}{\ln(a) + \ln(b) + \ln(3)} \right\}$$

simplify(ans)

$$\left\{ x = \frac{5 \cdot \ln(a) - \ln(b) + \ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\ln(a) + \ln(3 \cdot b)} \right\}$$

simplify(ans | a > 0 and b > 0)

$$\left\{ x = \frac{\ln\left(\frac{a^5}{3 \cdot b}\right)}{\ln(3 \cdot a \cdot b)} \right\}$$

Bem.: kompakte Lösungsdarstellung

$$\frac{1}{\ln(3a \cdot b)} \ln\left(\frac{a^5}{3 \cdot b}\right)$$

$$\text{judge}\left(\frac{5 - \log_a(3) - \log_a(b)}{1 + \log_a(3) + \log_a(b)} = \frac{1}{\ln(3a \cdot b)} \ln\left(\frac{a^5}{3 \cdot b}\right)\right)$$

Undefined

$$\text{judge}\left(\frac{5 - \log_a(3) - \log_a(b)}{1 + \log_a(3) + \log_a(b)} = \frac{1}{\ln(3a \cdot b)} \ln\left(\frac{a^5}{3 \cdot b}\right) \mid a > 0 \text{ and } b > 0\right)$$

TRUE

Bem.: für $a=b=0$ erhält man die mehrdeutige

Lösung: $-1 < x < 5$

$$a^{5-x} = (3b)^{x+1} \mid a=0 \text{ and } b=0$$

$$0^{-x+5} = 0^{x+1}$$

$$\text{solve}(\text{ans}, x)$$

No Solution

$$\text{solve}(0^{-x+5} = 0^{x+1} \mid x > -1 \text{ and } x < 5, x)$$

No Solution

$$\text{solve}(0^{-x+5} = 0^{x+1}, x, 2, -1, 5)$$

$$\{x=1.9, x=1.95, x=1.975, x=1.987460691, x=2, x=2.006\}$$

Warnhinweis vom System: weitere Lösungen

können existieren!

$$0^{-x+5} = 0^{x+1} \mid x=2$$

$$0=0$$

10) Termumformung für $a > 0$, $a \neq 1$, und $b > 0$,
 $b \neq 1$,

$$\log_a(b) \left(\log_a(a \cdot b) \log_b(a) - 1 \right)$$

$$\frac{\left(\frac{\ln(a \cdot b)}{\ln(b)} - 1 \right) \cdot \ln(b)}{\ln(a)}$$

simplify(ans)

$$\frac{\ln(a \cdot b) - \ln(b)}{\ln(a)}$$

simplify(ans | a > 0 and b > 0)

1

11) Gleichung mit Logarithmen

$$\log_a \left(\log_b \left(\log_c(x) + 1 \right) + 1 \right) = 0$$

$$\frac{\ln \left(\frac{\ln \left(\frac{\ln(x)}{\ln(c)} + 1 \right)}{\ln(b)} + 1 \right)}{\ln(a)} = 0$$

simplify(ans)

$$\frac{\ln \left(\frac{\ln \left(\frac{\ln(x)}{\ln(c)} + 1 \right)}{\ln(b)} + 1 \right)}{\ln(a)} = 0$$

solve(ans, x)

{x=1}

Ergebnis: für alle $a, b, c > 0$ und $a, b, c \neq 1$ gilt $x=1$

$$\log_a \left(\log_b \left(\log_c(x) + 1 \right) + 1 \right) = 0 \mid \{a=5, b=3, c=40\}$$

$$\frac{\ln \left(\frac{\ln \left(\frac{\ln(x)}{\ln(5) + 3 \cdot \ln(2)} + 1 \right)}{\ln(3)} + 1 \right)}{\ln(5)} = 0$$

solve(ans, x)

{x=1}

Aufgaben

=====

1. Vereinfachen

a) für $a, x, y > 0$ und $a \neq 1$

$$\frac{1}{2} \log_a(x) + \frac{1}{2} \log_a(xy) - \log_a(y)$$

$$\frac{\ln(x \cdot y)}{2 \cdot \ln(a)} + \frac{\ln(x)}{2 \cdot \ln(a)} - \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$$

simplify(ans)

$$\frac{\ln(x \cdot y) + \ln(x) - 2 \cdot \ln(y)}{2 \cdot \ln(a)}$$

simplify(ans | x > 0 and y > 0)

$$\frac{\ln\left(\frac{x^2}{y}\right)}{2 \cdot \ln(a)}$$

$$\text{judge}\left(\frac{\ln\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)}{\ln(a)} = \frac{1}{2} \log_a(x) + \frac{1}{2} \log_a(xy) - \log_a(y)\right)$$

FALSE

$$\text{judge}\left(\frac{\ln\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)}{\ln(a)} = \frac{1}{2} \log_a(x) + \frac{1}{2} \log_a(xy) - \log_a(y) \mid (x > 1)\right)$$

TRUE

$$\text{judge}\left(\log_a\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) = \frac{\ln\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)}{\ln(a)}\right)$$

TRUE

b)

$$\frac{\log_a\left(\frac{a^x}{y}\right) \log_b(y \times a^x)}{\log_b(a)}$$

$$\frac{\ln\left(\frac{a^x}{y}\right) \cdot \ln(a^x \cdot y)}{(\ln(a))^2}$$

simplify(ans)

$$\frac{\ln\left(\frac{a^x}{y}\right) \cdot \ln(a^x \cdot y)}{(\ln(a))^2}$$

simplify(ans | {a>0, y>0})

$$x^2 - \frac{(\ln(y))^2}{(\ln(a))^2}$$

$$\text{judge}\left(\frac{\log_a\left(\frac{a^x}{y}\right) \log_b(y \cdot a^x)}{\log_b(a)} = x^2 - \left(\frac{\ln(y)}{\ln(a)}\right)^2\right)$$

Undefined

$$\text{judge}\left(\frac{\log_a\left(\frac{a^x}{y}\right) \log_b(y \cdot a^x)}{\log_b(a)} = x^2 - \left(\frac{\ln(y)}{\ln(a)}\right)^2 \mid \{a>0, b>0\}\right)$$

TRUE

2. Bestimmungsgleichungen für x

a)

$$\text{solve}(3^x=27)$$

$$\{x=3\}$$

b)

$$\text{solve}(10^x=0.001, x)$$

$$\{x=-3\}$$

c)

$$\text{solve}(8^x=4, x)$$

$$\left\{x=\frac{2}{3}\right\}$$

d)

$$\text{solve}(\log_x\left(\frac{1}{32}\right)=-5, x)$$

$$\{x=2\}$$

e)

$$\text{solve}(\log_x\left(\frac{1}{5}\right)=-1, x)$$

$$\{x=5\}$$

f)

$$\text{solve}(\log_{\frac{1}{5}}(x)=-2, x)$$

$$\{x=25\}$$

g)

$$\text{simplify}(\log(10)=x)$$

$$1=x$$

h)

$$\text{simplify}(\log_7(49)=x)$$

$$2=x$$

i)

$$\text{simplify}(\log_6\left(\sqrt[5]{36}\right)=x)$$

$$\frac{2}{5}=x$$

3. Bestimmungsgleichungen für x

a)

$$\text{solve}(2^{6x-2}=4^{2x+3}, x)$$

$$\{x=4\}$$

b)

$$\text{solve}(\log_3(4 \times 3^{x-1} - 1) = 2x - 1, x)$$

$$\{x=0, x=1\}$$

Warnhinweis vom System: weitere Lösungen können existieren!

$$\log_3(4 \times 3^{x-1} - 1) = 2x - 1$$

$$\frac{\ln(4 \cdot 3^{x-1} - 1)}{\ln(3)} = 2 \cdot x - 1$$

$${}_3 \log_3(4 \cdot 3^{x-1} - 1) = 2x - 1$$

$${}_3 \frac{\ln(4 \cdot 3^{x-1} - 1)}{\ln(3)} = {}_3 2 \cdot x - 1$$

simplify(ans)

$$\frac{4 \cdot 3^x}{3} - 1 = \frac{3^{2 \cdot x}}{3}$$

Substitution: $3^x = z$

$$\text{solve}\left(\frac{4 \cdot z}{3} - 1 = \frac{z^2}{3}, z\right)$$

$$\{z=1, z=3\}$$

$$\log_3(\text{ans} | z=3^x)$$

$$\{x=0, x=1\}$$

Damit gibt es nur zwei Lösungen $x=0, x=1$

c)

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-7} = \left(\frac{4}{3}\right)^{7x-3}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{3 \cdot x - 7} = \left(\frac{4}{3}\right)^{7 \cdot x - 3}$$

solve(ans, x)

$$\{x=1\}$$

Warnhinweis vom System: weitere Lösungen können existieren!

Zwischenschritt:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{7x-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{3-7x}$$

Exponentenvergleich:

$3x-7=3-7x$ ergibt eindeutig $x=1$.