Prof. Dr. Ludwig Paditz 03.11.2014

3.Ü WR 2.4,7,10, dann **6.**1,2,9 und **4.**12
===================================

2.4 s.Aufg. **9.**1 im LÜB S.148 und S.315f

2.7 vgl. Aufg. **9.**2 im LÜB S. 148f und S.316

2.10 s.Beisp. **9.**1 und **9.**4 im LÜB S. 145 und 146.

6.1 vgl. Aufg. **10.**11 im LÜB S. 174 und S. 320.

6.2 vgl. Aufg. **10.**12 im LÜB S. 174 und S. 320.

6.9 vgl. Aufg. **10.**17 im LÜB S. 175 und S. 321.

4.12 s.Aufg.**9.**9 im LÜB S.150f u. 316f

Wo es sinnvoll erscheint, sind die Wktn. im TR abzurufen.

Lösung als eActivity generiert:

WR 2.4: Lottoaufgabe
=================

Hypergeometrische Verteilung,
diskrete Zgr. $X\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$ ... Anzahl der "Richtigen" im Tipp

$P(X=i)=\frac{nCr(M,i)*nCr(N-M,n-i)}{nCr(N,n)}$ mit $N=49$, $M=6$, $n=6$, $i=0(1)6$.

z.B bezeichnet nCr(n,r) den Binomialkoeffizienten "n über r", Anzahl der Kombinationen (engl. Combinations) aus n genau r Zahlen zu ziehen.

TR-Befehl:

P(X=i)=hypergeoPDf(i, n, M, N) oder

$$P(X=i)=\frac{nCr(M,i)*nCr(N-M,n-i)}{nCr(N,n)}$$

a) Sechser, d.h. i=6

6→n

6

6→M

6

49→N

49

hypergeoPDf(6, n, M, N)

7.151123842E-8

b) Fünfer mit Zusatzzahl

$$\frac{nCr(M,5)*nCr(1,1)*nCr(N-1-M,0)}{nCr(N,n)}$$

4.290674305E-7

c) Fünfer ohne Zusatzzahl

$$\frac{nCr(M,5)*nCr(1,0)*nCr(N-1-M,1)}{nCr(N,n)}$$

1.802083208E-5

d) Vierer

hypergeoPDf(4, n, M, N)

9.686197244E-4

e) Dreier mit Zusatzzahl

$$\frac{nCr(M,3)*nCr(1,1)*nCr(N-1-M,2)}{nCr(N,n)}$$

1.231423526E-3

f) Dreier ohne Zusatzzahl

$$\frac{nCr(M,3)*nCr(1,0)*nCr(N-1-M,3)}{nCr(N,n)}$$

0.01641898034

g) keine richtige Zahl

hypergeoPDf(0,n,M,N)

0.4359649755

WR 2.7: Gütekontrolle

===================

a) p_m=hypergeoPDf(m,n,M,N)

b) Beispiel

10⇒n

10

4⇒M

4

100⇒N

100

P({mindest. ein Ausschußteil})=1−P({kein Ausschußteil})

1−hypergeoPDf(0,n,M,N)

0.3483694509

WR 2.10: Hotelunterbringung

========================

a Reisende, b Hotels

a) getrennt wohnen (b≥a)

$$b*(b-1)*(b-2)*...*(b-(a-1))=\prod_{i=0}^{a-1}(b-i)$$

Im Fall b<a keine Möglichkeit (Anzahl = 0)

b) Hotelwahl ohne Einschränkung

jeder der Reisenden kann zwischen b Hotels wählen

$b*b*b*...*b=b^a$ (a Faktoren)

WR 6.1: Praktikumsgruppen
========================

Hypergeometrische Verteilung,
diskrete Zgr. $X \in \{0,1,2,3,4,5\}$ ... Anzahl der "sehr guten Stochastiker" in der Praktikumsgruppe

a) genau zwei:

6→n

6

5→M

5

20→N

20

hypergeoPDf(2,n,M,N)

0.3521671827

b) höchstens einer, d.h. keiner oder genau einer:

hypergeoPDf(0,n,M,N)+hypergeoPDf(1,n,M,N)

0.5165118679

oder kumulativ mit C in hypergeoCDf:

hypergeoCDf(1,n,M,N)

0.5165118679

Bem.: C ... kumuliert

WR 6.2: Fische im See
=====================

N unbekannt

1000→M

1000

150→n

150

10→m

10

ges.: max(hypergeoPDf(m,n,M,N)) bezüglich N

d.h. ges. max(hypergeoPDf(10,150,1000,N))

das ist eine Extremwertaufgabe, die nicht einfach zu lösen ist.

Lösung: Zahlenfolge p_N=hypergeoPDf(10,150,1000,N) untersuchen.

seq(hypergeoPDf(10,150,1000,N),N,14995,15005,1)

{0.1301482558,0.1301482809,0.1301482997,0.130148312▶

listToMat(ans)

$$\begin{bmatrix} 0.1301482558 \\ 0.1301482809 \\ 0.1301482997 \\ 0.1301483122 \\ 0.1301483185 \\ 0.1301483185 \\ 0.1301483122 \\ 0.1301482997 \\ 0.1301482809 \\ 0.1301482559 \\ 0.1301482246 \end{bmatrix}$$

als max-Wert erscheint

hypergeoPDf(10,150,1000,14999)=

hypergeoPDf(10,150,1000,15000)= 0.1301483185

Lösung: im See sind höchstwahrscheinlich ca. 15000 Fische. Dann ist das eingetretene Ereignis, unter 150 gefangenen Fischen genau 10 markierte zu finden, am wahrscheinlichsten und deshalb so eingetreten.

Anmerkung:

Einfacher ist es, die Quotientenfolge $\frac{p\_(N+1)}{p\_N}$ zu untersuchen:

$$\frac{p\_(N+1)}{p\_N}=\frac{(N-999)(N-149)}{(N-1139)(N+1)}$$

(Binomialkoeff. notieren und dann kürzen)

Die Quotientenfolge ist zuerst >1, dann etwa gleich 1, dann <1:

$\text{solve}\left(\frac{(N-999)(N-149)}{(N-1139)(N+1)}=1,N\right)$

{N=14999}

Damit hat man das optimale N=14999.

WR 6.9: Telefonzentrale

====================

Poissonverteilung

X ... Anzahl eingehender Anrufe pro Zeiteinheit

$X\in\mathbf{N}=\{0,1,2,...\}$

$P(X=i)=\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$, λ ist der Mittelwert ($\lambda=\bar{x}$), vgl. [1] S.256

a) $\lambda=2.5$[pro min]

a) bis d)

poissonPDf(0,2.5)

0.08208499862

poissonPDf(1,2.5)

0.2052124966

poissonPDf(2,2.5)

0.2565156207

poissonPDf(3,2.5)

0.2137630172

e) kumulieren bis X=4

$\sum_{i=0}^{4}$(poissonPDf(i,2.5))

0.8911780189

oder kumulativ mit C in poissonCDf:

poissonCDf(4,2.5)

0.8911780189

f) mehr als sechs ist negiert: höchstens 6

1-poissonCDf(6,2.5)

0.01418731199

b) jetzt $\lambda=\bar{x}=\frac{300}{60}=5$ [pro min]

mehr als sechs (Überlastung) ist negiert: höchstens 6 (max. Kapazität)

1-poissonCDf(6,5)

0.237816537

Die Wkt. der Überlastung beträgt 0.2378=23,78%

WR 4.12: Gütekontrolle

=====================

4.12.1

zerlege Ereignis A in $A \cap B$ bzw. $A \cap \bar{B}$

zerlege Ereignis $\bar{A}$ in $\bar{A} \cap B$ bzw. $\bar{A} \cap \bar{B}$

Damit haben wir 4 unvereinbare Teilereignisse

mit folgenden Häufigkeiten:

$$\begin{bmatrix} h(A\cap B) & h(A\cap\bar{B}) \\ h(\bar{A}\cap B) & h(\bar{A}\cap\bar{B}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 930 & 40 \\ 20 & 10 \end{bmatrix}$$

Die Häufigkeitsmatrix wird durch elementare Überlegung ausgefüllt:

Vorgabe: $h(\bar{A}\cap\bar{B})=10$ sowie

$h(A)=970=h(A\cap B)+h(A\cap\bar{B}) \Rightarrow h(\bar{A})=30$

$h(B)=950=h(A\cap B)+h(\bar{A}\cap B) \Rightarrow h(\bar{B})=50$

Gesamthäufigkeit = 1000

rel. Häufigkeiten:

$f(A)=\frac{970}{1000}=0.97$

$f(\bar{A}\cap B)=\frac{20}{1000}=0.02$

$f(A\cup B)=1-f(\bar{A}\cap\bar{B})=1-\frac{10}{1000}=0.99$

4.12.2 wie in **4.**12.1 vorgehen und die Häufigkeitsmatrix aufstellen:

$$\begin{bmatrix} h(A\cap B) & h(A\cap\bar{B}) \\ h(\bar{A}\cap B) & h(\bar{A}\cap\bar{B}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 42 & 33 \\ 26 & x \end{bmatrix} \text{ mit}$$

$42+33+26+x=100 \Rightarrow x=-1$

Damit ist ein Widerspruch in den erhobenen Daten.

Eine neg. Häufigkeit deutet auf schlechte Datenerfasung hin.

Der Produktionsleiter kann mit Recht unzufrieden sein.