

Vorlesung Mathematik II
Studiengang
Chemieingenieurwesen/Umwelttechnik

D. Oestreich

3 Lineare Algebra und Geometrie

3.1 Matrizen und Determinanten

3.1.1 Definition und Spezialfälle von Matrizen

Matrix vom Typ (m, n) : rechteckiges Zahlenschema aus m waagrecht angeordneten Zeilen und n senkrecht angeordneten Spalten, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dabei bezeichnen

$a_{ik} \in \mathbb{R}$: Matrixelemente (Komponenten)
 $(i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, n)$

i : Zeilenindex

k : Spaltenindex

Schreibweisen für Matrizen: A , (a_{ik}) , $(a_{ik})_{(m,n)}$

Spezialfälle

- 1) $(n\text{-reihige})$ **quadratische** Matrix:
 Falls $m = n$, d.h. Zeilenzahl = Spaltenzahl
- 2) a) **Spaltenvektor**: Matrix vom Typ $(m, 1)$, d.h.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$$

- b) **Zeilenvektor**: Matrix vom Typ $(1, n)$, d.h.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

- 3) *Nullmatrix* O : Matrix, wo jedes Element = 0
- 4) *transponierte Matrix* A^T : Matrix, die man erhält, wenn man in A Zeilen und Spalten vertauscht, d.h. $a_{ik}^T = a_{ki} \quad \forall i, k$

Spezielle quadratische Matrizen

A) (n-reihige) **Einheitsmatrix** $E = (\delta_{ik})$, wobei

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} \quad (\text{Kronecker-Symbol})$$

B) **Dreiecksmatrix**: Alle Elemente ober- oder unterhalb der Hauptdiagonale = 0:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{untere Dreiecksmatrix}} \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{obere Dreiecksmatrix}}$$

C) **Symmetrische Matrix**: $A = A^T$, d.h. $a_{ik} = a_{ki} \quad \forall i, k = 1, \dots, n$

D) **Schiefsymmetrische Matrix**: $A = -A^T$.

3.1.2 Rechenoperationen für Matrizen

Zwei Matrizen $A = (a_{ik})$ und $B = (b_{ik})$ vom *gleichen* Typ (m, n) heißen **gleich**: $A = B$, wenn $a_{ik} = b_{ik} \quad \forall i, k$.

I) Addition und Subtraktion

Zwei Matrizen $A = (a_{ik})$ und $B = (b_{ik})$ vom *gleichen* Typ (m, n) werden addiert bzw. subtrahiert, indem die entsprechenden gleichstelligen Matrixelemente addiert bzw. subtrahiert werden:

Summe: $C = A + B = (c_{ik})$ mit $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$,

Differenz: $D = A - B = (d_{ik})$ mit $d_{ik} = a_{ik} - b_{ik}$,

$$i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n.$$

Offenbar gilt für beliebige Matrizen

$$A + B = B + A \quad (\text{Kommutativgesetz})$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad (\text{Assoziativgesetz})$$

II) Multiplikation mit Skalar

Eine Matrix $A = (a_{ik})$ wird mit einem *Skalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert, indem jedes Matrixelement mit λ multipliziert wird: $\lambda A = (\lambda \cdot a_{ik}) \quad \forall i, k$.

Dabei gilt für beliebige Matrizen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A \quad (\text{Assoziativgesetz});$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A,$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \quad (\text{Distributivgesetze})$$

III) Multiplikation von Matrizen

Sei $A = (a_{ik})$ eine Matrix vom Typ (m, n) und $B = (b_{jk})$ eine Matrix vom Typ (n, p) . Dann heißt die Matrix $C = AB = (c_{ik})$, $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, p$ mit

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

das **Produkt** der Matrizen A und B .

Anmerkungen: Die Produktbildung ist nur möglich, wenn die *Spaltenzahl* von A mit der *Zeilenzahl* von B übereinstimmt ("verkettete Matrizen"). Das Matrixprodukt AB ist vom Typ (m, p) .

Nun gilt

$$\begin{aligned} AB &\neq BA \quad (\text{im Allgemeinen!}) && \text{nicht kommutativ} \\ A(BC) &= (AB)C && (\text{Assoziativgesetz}) \\ A(B+C) &= AB+AC && (\text{Distributivgesetz}) \\ AO &= OA = O \\ AE &= EA = A \\ (AB)^T &= B^T A^T \end{aligned}$$

3.1.3 Determinanten

Die **Determinante** einer n -reihigen *quadratischen* Matrix $A = (a_{ik})$ ist eine Zahl, die nach bestimmter Vorschrift berechnet wird:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^\delta a_{1i_1} a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n},$$

wobei i_1, i_2, \dots, i_n alle möglichen Permutationen von $1, 2, \dots, n$ und δ Anzahl der Indexvertauschungen.

Spezialfälle:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Bezeichnen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Dann ist (*) in Matrixschreibweise: $\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$ (**).

Lösung: Spaltenvektor(en) \vec{x} , die (*) bzw. (**) erfüllen.

Das lineare Gleichungssystem (*) heißt *homogen*, wenn

$$\vec{b} = \vec{0} := \left. \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{array}{l} m \\ \text{Zeilen} \end{array}$$

Andernfalls heißt (*) *inhomogen*.

Speziell für $m = n$: *Cramersche Regel:*

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|}, \quad k = 1, \dots, n \quad \text{mit}$$

$$|A_k| := \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2k-1} & b_2 & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

↑
k-te Spalte

Allgemein

Lösung von (*) bleibt unverändert bei *elementaren (Zeilen-) Umformungen:*

1. *Vertauschen* zweier Zeilen
2. *Multiplikation* der Elemente einer Zeile mit Faktor $\lambda \neq 0$
3. *Addition* eines Vielfachen einer *anderen* Zeile zu einer Zeile

Ziel: Überführung der Matrix A vom Typ (m, n) mittels elementarer Umformungen in *Trapezform* $\hat{=}$ äquivalente Matrix :

$$A^* = \left(\begin{array}{cccccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1r} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2r} & \dots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3r} & \dots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{rr} & \dots & \alpha_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} r \\ \text{Zeilen} \\ \\ \\ m-r \\ \text{Zeilen} \end{array}$$

Rang der Matrix $A = r(A) = r$: Anzahl der Zeilen in Trapezform, die nicht nur 0 enthalten.

3.2.2 Der Gaußsche Algorithmus

Zwecks Lösung des linearen Gleichungssystems (*) betrachtet man *erweiterte Koeffizientenmatrix*

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Gaußscher Algorithmus (Allgemeines Schema):

1. Mittels elementarer (Zeilen-)Umformungen wird die *erweiterte* Koeffizientenmatrix $(A|\vec{b})$ auf die ranggleiche Matrix in Trapezform überführt:

$$A \Rightarrow A^*, \quad (A|\vec{b}) \Rightarrow (A^*|\vec{b}^*).$$

2. Das lineare Gleichungssystem liegt nun in gestaffelter Form $A^*\vec{x} = \vec{b}^*$ vor und läßt sich – falls es lösbar ist – von unten nach oben sukzessiv lösen.

Konkret zu 1.

- 1.0.** (Eventuell Multiplikation von Zeile(n) mit Faktor)
- 1.1.** *Leitelement* $a_{ij} \neq 0$ wählen \implies Leitzeile (x) fixiert
- 1.2.** Leitelement \times Faktor + andere Zeile so, daß in Spalte des Leitelements alles Null wird \implies neuer Block
- 1.3.** Falls noch keine Trapezform \implies 1.0.

3.2.3 Lösungsverhalten eines linearen Gleichungssystems

Gegeben lineares (m, n) -System $A\vec{x} = \vec{b}$:

- FALL I** $r(A) = r(A|\vec{b}) = r$:
- a) $r = n$: genau eine Lösung
 - oder b) $r < n$: unendlich viele Lösungen mit $n - r$ Parametern
- FALL II** $r(A) < r(A|\vec{b})$: keine Lösung

Anmerkungen:

1) Der Fall $r(A) < r(A|\vec{b})$ tritt beim Gaußschen Algorithmus auf, wenn die letzte Zeile, die nicht nur aus Nullen besteht, *nur* in der Spalte der *freien* Glieder ein Element $\neq 0$ enthält, d.h.

$$0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad | \quad * \neq 0$$

2) Bei *homogenen* linearen Gleichungssystemen gilt stets $r(A) = r(A|\vec{b})$, d.h. sie sind immer lösbar – eine *oder* unendlich viele Lösungen. Besitzt es einzige Lösung, dann nur die *triviale* Lösung: $\vec{x} = (0, 0, \dots, 0)^T$.

3) Ein lineares (n, n) -System ist *eindeutig* lösbar $\iff r(A) = n$

$$\iff |A| \neq 0 \iff A^{-1} \text{ existiert: } \vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

3.3 Vektorrechnung und analytische Geometrie

3.3.1 Darstellung von Vektoren

(Geometrischer) **Vektor** $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$: Parallelverschiebung, die Punkt P in Punkt Q des (Anschauungs-)Raumes überführt.

Jeder Vektor \vec{a} ist eindeutig bestimmt durch Länge (= **Betrag** $|\vec{a}|$) und *Richtung*.

Arten von Vektoren:

- gebundene Vektoren: fester Angriffspunkt
- linienflüchtige Vektoren: entlang einer Gerade verschiebbar
- *freie* Vektoren: beliebig im Raum verschiebbar

Spezielle Vektoren:

- Nullvektor $\vec{0} = \overrightarrow{PP}$
- entgegengesetzter (inverser) Vektor $-\vec{a} = \overrightarrow{QP}$
- Einheitsvektor \vec{e} : $|\vec{e}| = 1$

Rechenoperationen

• Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} heißen **gleich**: $\vec{a} = \vec{b}$, wenn sie in Betrag und Richtung übereinstimmen.

• Addition: Seien $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$, $\vec{b} = \overrightarrow{QR}$:

Summe: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{PR}$

• Multiplikation mit Skalar:

$\alpha \geq 0$: $\alpha \vec{a}$ – α -faches von \vec{a}

$\alpha < 0$: $\alpha \vec{a} = -(|\alpha| \vec{a})$

Ortsvektor: $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$

mit (a_x, a_y, a_z) – kartesische Koordinaten von $A \implies$

Jedem Vektor im Raum entspricht ein Spaltenvektor vom Typ (3,1) (oder ein Zeilenvektor vom Typ (1,3)).

Vektor durch Punkte $A = (a_x, a_y, a_z)$, $B = (b_x, b_y, b_z)$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \\ b_z - a_z \end{pmatrix}.$$

3.3.2 Vektorraum und lineare Abhängigkeit

Eine Menge $V \neq \emptyset$, in der man zu je zwei Elementen $\vec{a}, \vec{b} \in V$ eine Summe $\vec{a} + \vec{b} \in V$ und zu jedem Element $\vec{a} \in V$ das λ -fache ($\lambda \in \mathbb{R}$) $\lambda \vec{a} \in V$ bilden kann, heißt **Vektorraum** (über \mathbb{R}), wenn folgende 8

Axiome erfüllt sind:

1° $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (kommutativ)

2° $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (assoziativ)

3° $\exists \vec{0}$ (Nullvektor): $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

4° $\exists (-\vec{a}) \in V$: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

5° $1\vec{a} = \vec{a}$

6° $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$

7° $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

8° $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

jeweils für beliebige $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Vektoren: Elemente des Vektorraums V .

Statt $\vec{a} + (-\vec{b})$ schreibt man $\vec{a} - \vec{b}$ (*Differenz*).

Beispiel: $\mathbb{R}^n := \{\vec{a} : \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$.

(*n-dimensionaler Euklidischer Raum*)

Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in V$ heißen **linear abhängig**, wenn reelle Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 > 0$) existieren, so daß

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}. \quad (1)$$

Gilt (1) nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, so heißen die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ **linear unabhängig**.

Der Vektor \vec{b} stellt **Linearkombination** von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ dar, wenn

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in V$ bilden **Basis** des Vektorraums V , wenn

1) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ linear unabhängig

2) Jeder Vektor $\vec{b} \in V$ Linearkombination von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Dimension des Vektorraums V ($= \dim V$): maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren.

Folglich: Falls $\dim V = n$, so bilden beliebige n linear unabhängige Vektoren eine Basis.

Speziell: Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden *orthonormierte Basis* in \mathbb{R}^3 , d.h. sie stehen jeweils senkrecht aufeinander und ihre Länge beträgt 1.

3.3.3 Operationen mit Vektoren

Seien $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

I) Skalarprodukt

- (geometrisch) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$ (+)
mit φ eingeschlossenem Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b}
($0 \leq \varphi \leq \pi$)
- (algebraisch) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ (++)

Rechenregeln:

- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 =: \vec{a}^2 > 0$, falls $\vec{a} \neq 0$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$, ($\lambda \in \mathbb{R}$)
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Einige Anwendungen

1) Länge eines Vektors \vec{a} :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \quad (3)$$

2) Winkel zwischen Vektoren \vec{a} und \vec{b} :

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \quad (4)$$

Speziell: $\vec{a} \perp \vec{b} \leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

3) Projektion eines Vektors \vec{b} auf Vektor \vec{a} :

$$\vec{b}_a = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right) \vec{a}.$$

4) Richtungswinkel zwischen Vektor und den Koordinatenachsen (*Richtungskosinus*) $\alpha := \angle(\vec{e}_1, \vec{a})$, $\beta := \angle(\vec{e}_2, \vec{a})$, $\gamma := \angle(\vec{e}_3, \vec{a})$:

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}. \quad (5)$$

Offenbar gilt

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

II) Vektorprodukt

- (geometrisch) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, wenn
 - a) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$
(φ eingeschlossener Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b})
 - b) \vec{c} steht senkrecht auf \vec{a} und \vec{b}
 - c) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden Rechtssystem
- (algebraisch) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

Rechenregeln:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}), \quad (\lambda \in \mathbb{R})$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Anwendungen: Flächeninhalt des von \vec{a}, \vec{b} aufgespannten

Parallelogramms $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$

bzw. Dreiecks $A = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$.

Speziell: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

III) Spatprodukt

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Anwendung: Volumen des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten

Parallelepipeds (Spat) $V = |[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]|$.

Speziell: $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar.

Mehrfache Produkte

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) \end{aligned} \quad (\text{Zerlegungssatz})$$

3.3.4 Kartesische Koordinatentransformationen

Ursprüngliches (x, y) -Koordinatensystem wird transformiert in (x', y') -Koordinatensystem. Bezeichnen die entsprechenden Koordinaten in den Systemen mit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

I. Parallelverschiebung des Koordinatensystems

Seien $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)^T$ Koordinaten des Koordinatenursprungs O' des x', y' -Systems bezüglich des x, y -Systems. Dann gilt:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}' \quad \text{bzw.} \quad \vec{x}' = \vec{x} - \vec{x}_0.$$

II. Drehung des Koordinatensystems

Sei φ Drehwinkel:

$$\vec{x}' = A\vec{x} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

bzw. die inverse Transformation

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{x}' \quad \text{mit} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

III. Parallelverschiebung und Drehung

Ein x, y -Koordinatensystem wird um $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)^T$ in ein x', y' -Koordinatensystem verschoben und anschließend um den Winkel φ in ein x'', y'' -Koordinatensystem gedreht. Man erhält für die Koordinaten $\vec{x}'' = (x'', y'')^T$

$$\vec{x}'' = A(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

oder in Koordinatenschreibweise

$$\begin{aligned} x'' &= (x - x_0) \cos \varphi + (y - y_0) \sin \varphi \\ y'' &= -(x - x_0) \sin \varphi + (y - y_0) \cos \varphi \end{aligned}$$

3.3.5 Geraden und Ebenen

I a) Geraden im Raum

Gegeben Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ (fest) und $\overrightarrow{P(x, y, z)}$ (beliebig) und Richtung \vec{a} der Geraden g : Bezeichnen $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{Parametergleichung}). \quad (6)$$

Abstand d zwischen einem Punkt Q und der Geraden g :

$$d = \frac{|(\vec{r}_Q - \vec{r}_1) \times \vec{a}|}{|\vec{a}|} \quad \text{mit } \vec{r}_Q = \overrightarrow{OQ}. \quad (7)$$

Lage zweier Geraden: $g_1: \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a}_1$, $g_2: \vec{r} = \vec{r}_2 + s\vec{a}_2$, $s, t \in \mathbb{R}$

- gleich: > 1 Schnittpunkt
- einziger Schnittpunkt
(Schnittwinkel = Winkel zwischen \vec{a}_1 und \vec{a}_2)
- parallel } kein Schnittpunkt $\nearrow \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \Leftrightarrow \vec{a}_1 = \lambda\vec{a}_2$
- windschief } \searrow sonst

I b) Geraden in der Ebene

Gegeben Gerade g mit Punkten $P(x, y) \in g$:

$$Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 > 0) \quad (\text{implizite Gleichung}).$$

Falls $B \neq 0 \implies$

$$y = mx + b \quad (\text{explizite Gleichung}),$$

wobei m Anstieg und b Schnittpunkt mit y -Achse der Geraden g .

Falls $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) \in g$ (feste Punkte):

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{Zweipunkte-Gleichung}).$$

Falls $\vec{n}^0 = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ (normierter Normalenvektor):

$$\vec{n}^0 \cdot \vec{r} = p \quad (\text{Hessesche Normalform})$$

mit p Abstand vom Ursprung 0 bzw. in Koordinatenschreibweise

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0.$$

II) Ebenen

Gegeben Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ (fest) und $P(x, y, z)$ (beliebig) und Richtungsvektoren $\vec{a} \parallel \vec{b}$ in der Ebene E : Bezeichnen $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + s\vec{a} + t\vec{b}, \quad s, t \in \mathbb{R} \quad (\text{Parametergleichung}). \quad (8)$$

Sei $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = (A, B, C)^T$ (Normalenvektor der Ebene) und $\vec{n}^0 = \frac{\vec{n}}{\pm|\vec{n}|}$ (normierter Normalenvektor) \implies

$$\vec{r} \cdot \vec{n}^0 - p = 0 \quad (\text{Hessesche Normalform}), \quad (9)$$

mit $p = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{n}}{\pm|\vec{n}|} = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ bzw. in Koordinatenschreibweise

$$\frac{Ax + By + Cz - D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0,$$

wobei Vorzeichen \pm so gewählt wird, daß $p \geq 0$ ($p = \text{Abstand}$ vom Koordinatenursprung).

Abstand d eines Punktes $P_0(x_0, y_0, z_0)$ von Ebene E :

Bezeichnen $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$

$$d = |\vec{r}_0 \cdot \vec{n}^0 - p|. \quad (10)$$

Lage zweier Ebenen:

$$E_1: A_1x + B_1y + C_1z = D_1$$

$$E_2: A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

\implies Lösen des Gleichungssystems

- gleich: Lösung mit 2 Parametern
- Schnitt in einer Geraden: Lösung mit 1 Parameter
(Schnittwinkel = Winkel zwischen Normalenvektoren \vec{n}_1 und \vec{n}_2)
- parallel: keine Lösung

3.3.6 Kurven und Flächen 2. Ordnung**A) In der Ebene**

Gleichung mit 2 Unbekannten $F(x, y) = 0$ beschreibt **Kurve**.

1. $Ax + By + C = 0$: Gerade (siehe oben)
2. $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
: Kurve 2. Ordnung (Kegelschnitte)

Dabei gilt

$$\delta := AC - B^2 = \begin{cases} > 0 & \text{für Ellipsen} \\ = 0 & \text{für Parabeln} \\ < 0 & \text{für Hyperbeln} \end{cases}$$

Falls sich der Kegelschnitt *nicht* in achsenparalleler Lage ($B \neq 0$) befindet, kann das gemischt-quadratische Glied durch eine Drehung des Koordinatensystems zum Verschwinden gebracht werden. Der entsprechende Drehwinkel φ ergibt sich aus

$$\tan 2\varphi = \frac{2B}{A - C}$$

Die linearen Glieder können danach durch eine Parallelverschiebung (mittels quadratischer Ergänzung) eliminiert werden und man erhält die *kanonische* Gleichung des Kegelschnitts, d.h. die Normalform in Mittelpunktlage.

B) Im Raum

Gleichung mit 3 Unbekannten $F(x, y, z) = 0$ beschreibt **Fläche**.

1. $Ax + By + Cz + D = 0$ Ebene (siehe oben)
2. x, y, z quadratisch Fläche 2. Ordnung

4 Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen

4.1 Partielle Differentiation

4.1.1 Funktionen von mehreren Variablen

Funktion von zwei unabhängigen Variablen: Vorschrift, die jedem geordneten Zahlenpaar $(x, y) \in D$ genau ein Element $z \in W$ zuordnet.

Schreibweise: $z = f(x, y)$.

x, y : unabhängige Variable
 z : abhängige Variable oder Funktionswert
 $D \subset \mathbb{R}^2$: Definitionsbereich der Funktion f
 $W \subset \mathbb{R}$: Wertebereich der Funktion f

ANALOG werden Funktionen von *mehr* als zwei unabhängigen Variablen definiert. Eine Funktion von n unabhängigen Variablen kann auch als **Vektorfunktion** aufgefaßt werden:

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Höhenliniendiagramm

Höhenlinien (Niveaulinien) einer Funktion zweier Variabler:

Bilden für $z = f(x, y)$ Schnittkurven mit Ebenen parallel zur x, y -Ebene (Schnittebenen $z = c = \text{const}$):

$$f(x, y) = c = \text{const} \quad \text{mit Parameter } c \in W.$$

Die Projektionen dieser Linien *gleicher Höhe* in die x, y -Ebene heißen **Höhenlinien** (Niveaulinien).

Oft zweckmäßig: Wahl von c in gleichem Abstand \implies je steiler Fläche, desto gedrängter Höhenlinien.

Anmerkung: Analog können Niveaulinien für Schnitte parallel zur y, z -Ebene ($x = c$) bzw. parallel zur x, z -Ebene ($y = c$) erzeugt werden.

Räumliche Koordinatensysteme

a) Kartesische Koordinaten (x, y, z) : bekannt

b) **Zylinderkoordinaten** (ρ, φ, z) eines Punktes $P \in \mathbb{R}^3$ mit Projektion $P' = (\rho, \varphi, 0)$ in x, y -Ebene:

- ρ : Abstand von P' zum Ursprung
 φ : Winkel von positiver x -Achse zum Ortsvektor zu P'
 $(0 \leq \rho < \infty, \quad -\pi < \varphi \leq \pi)$

Umrechnung:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \pm \arccos \frac{x}{\rho} \\ z = z \end{cases} \quad (1)$$

Oberes (unteres) Vorzeichen für $y \geq 0$ ($y < 0$).

c) Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) eines Punktes $P \in \mathbb{R}^3$ mit Projektion P' in x, y -Ebene:

- r : Abstand von P zum Ursprung
 ϑ : Winkel von positiver z -Achse zu Ortsvektor \overrightarrow{OP}
 φ : Winkel von positiver x -Achse zu Ortsvektor $\overrightarrow{OP'}$
 $(0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi)$

Umrechnung:

$$\begin{cases} x = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = r \cos \vartheta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \vartheta = \arccos \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ \tan \varphi = \frac{y}{x} \end{cases} \quad (2)$$

4.1.2 Grenzwert und Stetigkeit

Man sagt, die Folge $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ für $n \rightarrow \infty$, wenn

$$(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Die Zahl g heißt **Grenzwert** der Funktion $z = f(x, y)$ im Punkt (x_0, y_0) , wenn $f(x_n, y_n) \rightarrow g$ für jede Folge $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ für $n \rightarrow \infty$.

Schreibweise: $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = g$.

Die Funktion $z = f(x, y)$ heißt **stetig** im Punkt (x_0, y_0) , wenn

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Die Funktion f ist auf D stetig, wenn f in allen Punkten $(x, y) \in D$ stetig ist.

ANALOG werden Grenzwert und Stetigkeit für Funktionen von mehr als zwei unabhängigen Variablen definiert.

Beachte: Aus Stetigkeit einer Funktion von mehreren Variablen folgt Stetigkeit dieser Funktion bezüglich *jeder* einzelnen Variablen (bei festgehaltenen übrigen Variablen). Die Umkehrung gilt allgemein nicht!

4.1.3 Partielle Ableitungen

Partielle Ableitung 1. Ordnung nach x_k ($k = 1, \dots, n$) der Funktion $z = f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$ an der Stelle $(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$ heißt der *Grenzwert* (wenn er existiert):

$$f_{x_k} := \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_k + \Delta x_k, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)}{\Delta x_k}.$$

Übliche *Bezeichnungen*:

$$z_{x_k}(x_1, \dots, x_n) = f_{x_k}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n)$$

(auch ohne Argumente)

Speziell $z = f(x, y)$:

$$z_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$z_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) := \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Die *praktische* Berechnung der partiellen Ableitungen geschieht durch gewöhnliche Differentiation der gegebenen Funktion als Funktion *einer* Variablen mit $n - 1$ festen Parametern. Dabei gelten alle bekannten Ableitungsregeln!

Partielle Ableitungen **(n+1)-ter Ordnung** erhält man, wenn man partielle Ableitungen n -ter Ordnung *partiell* differenziert ($n \geq 1$).

Die Ordnung entspricht der Anzahl der Indizes. Schreibweise auch in Form *partieller Differentialquotienten* möglich.

Speziell $z = f(x, y)$:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

bzw.

$$f_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) =: \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \quad \text{usw.}$$

Satz von Schwarz: Falls die Funktion $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, eine stetige partielle Ableitung $f_{xy}(x, y)$ hat, so besitzt sie auch die Ableitung $f_{yx}(x, y)$ und es gilt $f_{yx}(x, y) = f_{xy}(x, y)$, $(x, y) \in D$.

Anmerkung: Der Satz gilt sinngemäß auch für mehr als zwei Variable und/oder höhere partielle Ableitungen.

4.1.4 Das vollständige Differential einer Funktion

Annahme: Die Funktion $z = f(x, y)$ besitze stetige partielle Ableitungen $f_x(x, y)$ und $f_y(x, y)$.

Gleichung der **Tangentialebene** an die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ mit $z_0 = f(x_0, y_0)$:

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (3)$$

Anmerkung: (3) stellt die *Linearisierung* der Funktion $z = f(x, y)$ in der Umgebung von (x_0, y_0) dar.

Unter dem **vollständigen Differential** einer Funktion $z = f(x, y)$ versteht man den linearen Differentialausdruck

$$dz = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (4)$$

ANALOG: Vollständiges Differential der Funktion $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$dz = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + \dots + f_{x_n} dx_n.$$

Der Term

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (+)$$

wird **Differentialform** genannt.

Falls P, Q stetige partielle Ableitungen 2. Ordnung auf D besitzen, gilt:

$$(+)$$
 vollständiges Differential einer Funktion $f \iff \boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}$ auf D .
 (Integrabilitätsbedingung).

Die Funktion f nennt man *Potential*.

Anmerkung: Falls (+) kein vollständiges Differential darstellt, kann durch Multiplikation mit einer geeigneten Funktion ("integrierender Faktor") unter Umständen (+) in ein vollständiges Differential einer Funktion überführt werden.

4.1.5 Kettenregel für Funktionen mehrerer Variabler

I) $z = f(x(t), y(t))$, wobei $x = x(t)$, $y = y(t)$ differenzierbar:

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (5)$$

(ANALOG für mehr als zwei Variable.)

Speziell:

Ableitung einer *impliziten* Funktion $F(x, y) = 0$:

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

II) $z = f(x(u, v), y(u, v))$, wobei $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ partielle Ableitungen nach u und v besitzen:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (6)$$

Allgemein für $z = f(x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m))$:

$$\frac{\partial z}{\partial t_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_k}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Speziell:

Ableitung einer Funktion in *Polarkoordinaten* $f = f(r, \varphi)$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{r} \sin \varphi,$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{r} \cos \varphi.$$

4.2 Anwendungen der partiellen Differentiation

4.2.1 Das Fehlerfortpflanzungsgesetz

Gegeben *Meßwerte* $x \pm \Delta x_{\max}$ mit

x : *Mittelwert*

Δx_{\max} : (geschätzter) **absoluter Maximalfehler**

Weiterhin

$\frac{\Delta x_{\max}}{|x|}$: *relativer Maximalfehler*

$\frac{\Delta x_{\max}}{|x|} \cdot 100\%$: **prozentualer Maximalfehler**

Es seien die Größen x, y, z, \dots derart gemessen: $x \pm \Delta x_{\max}, y \pm \Delta y_{\max}, z \pm \Delta z_{\max}, \dots$

Fehlerfortpflanzungsgesetz [GAUSS]: Sei $u = f(x, y, z, \dots)$. Dann ist

$$\Delta u_{\max} = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x_{\max} + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y_{\max} + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \Delta z_{\max} + \dots \quad (1)$$

und $\frac{\Delta u_{\max}}{|u|}$ ist der relative Maximalfehler von u .

Spezialfälle

- 1) Absoluter Maximalfehler einer *Summe* oder *Differenz* =
Summe der absoluten Maximalfehler der Eingangsgrößen
- 2) Relativer Maximalfehler eines *Produkts* oder *Quotienten* =
Summe der relativen Maximalfehler der Eingangsgrößen
- 3) Ist $u = u(v)$ und $v = v(x, y, \dots)$, so gilt nach der Kettenregel:

$$\Delta u_{\max} = \left| \frac{du}{dv} \right| \left(\left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| \Delta x_{\max} + \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| \Delta y_{\max} + \dots \right)$$

4.2.2 Grundlagen der Vektoranalysis

Skalares Feld: Zuordnung $\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{\in \mathbb{R}^n} \mapsto z = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$

(Funktion von n unabhängigen Variablen)

Vektorfeld: Zuordnung $\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{\in \mathbb{R}^n} \mapsto \vec{f}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^m$

mit $\vec{f}(x_1, \dots, x_n) := (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))^T$

Sei $u = f(x, y, z)$ ein skalares Feld.

Der **Gradient** von f im Punkt (x, y, z) ist das folgende *Vektorfeld*:

$$\text{grad } f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Führen ein den *Nabla-Operator*:

$$\vec{\nabla} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt: $\vec{\nabla} f = \text{grad } f$, d.h. der Nabla-Operator ordnet der Funktion f das Vektorfeld $\text{grad } f$ zu.

Eigenschaften

- (i) Der Gradient zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs von f .
Dieser stärkste Anstieg beträgt $|\text{grad } f|$
(bezogen auf den Einheitsvektor $d\vec{r} = (dx, dy, dz)^T$).
- (ii) Der Gradient steht senkrecht auf den Niveauflächen
 $f(x, y, z) = c$.

Sei $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z) = (a_1(x, y, z), a_2(x, y, z), a_3(x, y, z))^T$ Vektorfeld.

Die **Rotation** eines Vektorfeldes \vec{a} ist das folgende *Vektorfeld*:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Die **Divergenz** eines Vektorfeldes \vec{a} ist ein *skalares* Feld, das definiert ist durch

$$\operatorname{div} \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}.$$

Interpretation

1) Das Vektorfeld \vec{a} wird oft als *Fluß* durch einen Körper interpretiert und durch *Feldlinien* veranschaulicht (z.B. elektrische Felder von Ladungen oder Geschwindigkeitsfelder bei strömenden Flüssigkeiten).

2) Die *Divergenz* beschreibt den Zufluß und Abfluß in einem Volumenelement und wird auch *Quelldichte* genannt. Insbesondere gilt

$\operatorname{div} \vec{a} > 0$: Der *abfließende* Anteil *überwiegt*:

im Volumenelement befindet sich eine "Quelle".

$\operatorname{div} \vec{a} < 0$: Der *zufließende* Anteil *überwiegt*:

im Volumenelement befindet sich eine "Senke".

Vektorfeld \vec{a} heißt in einem Bereich **quellenfrei**, wenn dort $\operatorname{div} \vec{a} = 0$ gilt.

3) Die *Rotation* beschreibt die "Verwirbelung" eines Flusses.

Wenn $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}$ ist, heißt das Vektorfeld **wirbelfrei**.

4) Das Vektorfeld \vec{a} wird *konservativ* genannt, wenn es Gradient eines skalaren Feldes $f(x, y, z)$ ist, d.h. $\vec{a} = \operatorname{grad} f$. Man nennt dann $f(x, y, z)$ das *Potential* dieses Vektorfeldes. Es gilt:

$$\vec{a} \text{ konservativ} \Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}.$$

Allgemeine Beziehungen

$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \vec{0}$ Ein Gradientenfeld ist wirbelfrei.

$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0$ Ein Rotorfeld ist quellenfrei.

Weiterhin

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} =: \Delta f$$

(Δ : Laplace-Operator)

4.2.3 Die Taylorsche Formel

Sei $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ und $\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt in der Nähe von $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

Bezeichnen $\Delta x_i := x_i - x_i^0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \Delta f : &= f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}^0) \Delta x_i + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^0) \Delta x_i \Delta x_j + R(\vec{x}). \end{aligned} \quad (2)$$

Anmerkung: Das Restglied $R(\vec{x})$ wird hier nicht weiter betrachtet. Es ist klein, wenn \vec{x}^0 nahe \vec{x} ist.

Insbesondere

$$\Delta f \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}^0) \Delta x_i = df \quad (1. \text{ Näherung}),$$

$$\Delta f \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}^0) \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^0) \Delta x_i \Delta x_j \quad (2. \text{ Näherung}).$$

4.3 Extremwertaufgaben

4.3.1 Relative Extremwerte (ohne Nebenbedingungen)

Eine Funktion $z = f(x, y)$ besitzt im Punkt (x_0, y_0) ein **relatives Maximum (relatives Minimum)**, wenn für alle (x, y) aus einer Umgebung von (x_0, y_0) gilt

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad (\text{bzw. } f(x_0, y_0) \leq f(x, y)). \quad (*)$$

Anmerkungen: Gelten die Ungleichungen (*) für alle $(x, y) \in D(f)$, so spricht man von *absolutem* Maximum bzw. Minimum in (x_0, y_0) . Maxima und Minima werden wieder als **Extrema** zusammengefaßt.

Notwendige Bedingung: In (x_0, y_0) relatives Extremum $\implies f_x(x_0, y_0) = 0$ und $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Hinreichende Bedingung: Die Funktion $z = f(x, y)$ besitzt im Punkt (x_0, y_0) ein relatives Extremum, wenn

- 1) $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$
 2) $D := \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0.$

Ist dabei $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, so liegt ein *relatives Maximum* vor, für $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ dagegen ein *relatives Minimum*.

Anmerkung: Für $D < 0$ liegt kein Extremum vor, sondern ein *Sattelpunkt*. Für $D = 0$ ist unmittelbar *keine* Aussage möglich.

4.3.2 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Problemstellung:

$$z = f(x, y) = \max! \quad (\min!)$$

mit Nebenbedingungen

$$g_j(x, y) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (++)$$

Anmerkung: Analog läßt sich die Aufgabe für mehr als zwei Variable formulieren.

Lösungsmöglichkeiten:

I) Umstellen der Nebenbedingung(en) nach einer Variablen und einsetzen in $z = f(x, y) \implies$ Extremwertaufgabe für *eine* Variable.
 (Nicht immer möglich!)

II) Multiplikatorenregel von Lagrange: Betrachten

$$H(x, y; \lambda_1, \dots, \lambda_m) := f(x, y) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x, y). \quad (1)$$

Notwendige Bedingung:

Wenn im Punkt (x^*, y^*) Extremum von $z = f(x, y)$ unter der Bedingung $(++)$, so gilt

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial y} = 0 & \text{in } (x^*, y^*) \\ g_j(x^*, y^*) = 0, & j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (2)$$

4.3.3 Methode der kleinsten Quadrate

Aufgabe: Eine Größe y hänge von einer Größe x in noch unbekannter

Weise ab. Meßpunkte: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

Gesucht: Funktion $y = f(x)$ (*Approximationsfunktion*)

Einfachster Fall: Meßpunkte (*ohne Fehler*) liegen auf einer Geraden

Gesucht: **Ausgleichsgerade** (Regressionsgerade):

$$y = A(x) = a + bx.$$

Lösungsansatz:

$$\sum_{i=1}^n [A(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^n (a + bx_i - y_i)^2 =: F(a, b) \rightarrow \min.$$

Lösung:

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2},$$

$$a = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b \right]. \quad (3)$$

Mitunter legt die Folge der Meßpunkte einen *anderen* Typ von Ausgleichskurve nahe. Zum Beispiel:

Lösungsansatz	$y = A(x)$	Parameter
Quadratische Funktion	$y = a + bx + cx^2$	a, b, c
Potenzfunktion	$y = ax^b$	a, b
Exponentialfunktion	$y = ae^{bx}$	a, b

Die unbekannt Parameter lassen sich analog mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate (vgl. obigen Lösungsansatz!) ermitteln.

Speziell kann man näherungsweise *Exponential- und Potenzfunktionen* auch im *halb-* bzw. *doppellogarithmischen* Maßstab durch Geraden darstellen.

Für **periodische** Vorgänge empfiehlt sich die Verwendung periodischer Funktionen:

Gegeben: Meßpunkte: "Stützstellen" $x_i = i \cdot \frac{2p}{2n}$ und
 "Stützwerte" y_i für $i = 1, 2, \dots, 2n$
 Gesucht: $y = f(x)$ periodische Funktion mit Periode $2p$

Ansatz:

$$P_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{p} + b_k \sin \frac{k\pi x}{p} \right), \quad m < n$$

(trigonometrisches Polynom)
 bzw. durch alle Meßpunkte

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \frac{a_n}{2} \cos \frac{n\pi x}{p}.$$

mit Parametern: $a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$.

Lösung:

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2n} y_i; \quad a_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2n} y_i \cos \frac{k\pi}{p} x_i, \quad k = 1, \dots, n$$

$$b_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2n} y_i \sin \frac{k\pi}{p} x_i, \quad k = 1, \dots, m.$$

4.4 Integration für Funktionen mehrerer Variabler

4.4.1 Doppelintegrale

Sei $z = f(x, y)$ eine Funktion, definiert auf dem Bereich $(A) \subset \mathbb{R}^2$.
 Zerlegen (A) in n Teilbereiche (ΔA_k) mit den Flächeninhalten ΔA_k und
 wählen Punkte $P_k = (x_k, y_k) \in (\Delta A_k)$, $k = 1, \dots, n$.

Der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

heißt, falls er existiert und zwar bei $\max_{1 \leq k \leq n} \Delta A_k \rightarrow 0$ und beliebiger Wahl von $(x_k, y_k) \in (\Delta A_k)$, $k = 1, \dots, n$, **Doppelintegral** (oder zweifaches Integral) und wird bezeichnet durch das Symbol

$$\iint_{(A)} f(x, y) dA.$$

Dabei

- x, y : Integrationsvariable
- $f(x, y)$: Integrand
- dA : Flächendifferential oder - element
- (A) : Integrationsbereich

Anmerkung: Der Grenzwert *existiert*, wenn der Integrand $f(x, y)$ im abgeschlossenen Integrationsbereich (A) (d.h. einschließlich dessen Randes) *stetig* ist.

Berechnung:

Betrachten "normalen" Integrationsbereich (A) :

$$f_u(x) \leq y \leq f_o(x), \quad a \leq x \leq b,$$

wobei $y = f_u(x)$ untere Randkurve und $y = f_o(x)$ obere Randkurve \implies

$$\begin{aligned} \iint_{(A)} f(x, y) dA &= \\ &= \iint_{(A)} f(x, y) dy dx = \int_{x=a}^b \left[\int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} f(x, y) dy \right] dx \end{aligned} \quad (1)$$

Anmerkungen:

1) Bei *Vertauschung* der Integrationsreihenfolge müssen die Integrationsgrenzen *neu* bestimmt werden, d.h. explizite Vorgaben $x = g_1(y)$ und $x = g_2(y)$ sind erforderlich.

2) Für $f(x, y) = 1 \implies$

$$\iint_{(A)} dA = \int_{x=a}^b \left[\int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} dy \right] dx.$$

Zahlenmäßig beschreibt dieser Wert den *Flächeninhalt* von (A) .

Berechnung in Polarkoordinaten:

Wegen $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi \implies$

$z = f(x, y) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) =: F(r, \varphi)$.

Sei Integrationsbereich (A) :

$$r_i(\varphi) \leq r \leq r_a(\varphi), \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2,$$

wobei $r = r_i(\varphi)$ innere Randkurve und $r = r_a(\varphi)$ äußere Randkurve \implies

$$\iint_{(A)} f(x, y) dA = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr \right] d\varphi \quad (2)$$

4.4.2 Dreifachintegrale

Sei $u = f(x, y, z)$ eine Funktion, definiert auf dem Bereich $(V) \subset \mathbb{R}^3$.

Zerlegen (V) in n Teilbereiche (ΔV_k) mit den Volumina ΔV_k und wählen

Punkte $P_k = (x_k, y_k, z_k) \in (\Delta V_k)$, $k = 1, \dots, n$.

Der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k$$

heißt, falls er existiert und zwar bei $\max_{1 \leq k \leq n} \Delta V_k \rightarrow 0$ und beliebiger Wahl von $(x_k, y_k, z_k) \in (\Delta V_k)$, $k = 1, \dots, n$, **Dreifachintegral** und wird bezeichnet durch das Symbol

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV.$$

Dabei

x, y, z :	Integrationsvariable
$f(x, y, z)$:	Integrand
dV :	Volumenelement
(V) :	Integrationsbereich

Berechnung:

Betrachten "normalen" Integrationsbereich (V) :

$$z_u(x, y) \leq z \leq z_o(x, y), \quad f_u(x) \leq y \leq f_o(x), \quad a \leq x \leq b$$

mit $z = z_u(x, y)$ "Bodenfläche", $z = z_o(x, y, z)$ "Deckelfläche" bzw. im Projektionsbereich (A) in der x, y -Ebene $y = f_u(x)$ untere Randkurve und $y = f_o(x)$ obere Randkurve \implies

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \\ \int_{x=a}^b \left\{ \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \left[\int_{z=z_u(x,y)}^{z_o(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Insbesondere *Volumen* V des Körpers (V) :

$$V = \iiint_{(V)} dV.$$

Berechnung in Zylinderkoordinaten:

Wegen $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z \implies$

$z = f(x, y, z) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) =: F(r, \varphi, z)$:

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \\ \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \left\{ \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} \left[\int_{z=z_u(x,y)}^{z_o(x,y)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz \right] r dr \right\} d\varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

4.4.3 Linienintegrale

I) Betrachten ebene Kurve $(K) = AB$. Auf der Kurve sei eine (stetige) Funktion $f(x, y)$ definiert.

Wählen Punkte auf (K) : $A_0 = A, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n = B$

und bezeichnen $\Delta s_k =$ Länge des Kurvenstücks $A_{k-1}A_k, k = 1, \dots, n$.

Der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta s_k$$

heißt, falls er existiert und zwar bei $\max_{1 \leq k \leq n} \Delta s_k \rightarrow 0$ und beliebiger Wahl von $A_k, k = 1, \dots, n-1$, **Linienintegral** (Kurvenintegral) **erster Art** und wird symbolisiert durch

$$\int_{(K)} f(x, y) ds.$$

(ds – Bogenelement)

Berechnung:

Die ebene Kurve (K) habe die Parameterdarstellung:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \implies$$

$$\int_{(K)} f(x, y) ds = \int_{t=t_0}^{t_1} f(x(t), y(t)) \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} dt \quad (5)$$

Insbesondere *Bogenlänge* von (K) :

$$s = \int_{(K)} ds.$$

II) Betrachten $f(x, y)$ auf (K) wie in I) und wählen zusätzlich Punkte $P_k = (\xi_k, \eta_k) \in A_{k-1}A_k$ und bezeichnen mit $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ die Projektion von $A_{k-1}A_k$ ($k = 1, \dots, n$) auf die x -Achse.

Der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k$$

heißt, falls er existiert und zwar bei $\max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k \rightarrow 0$ und beliebiger Wahl von $P_k \in A_{k-1}A_k$, ($k = 1, \dots, n-1$), **Linienintegral** (Kurvenintegral) **zweiter Art** und wird symbolisiert durch

$$\int_{(K)} f(x, y) dx.$$

Erläuterungen

1) Analog wird das Linienintegral

$$\int_{(K)} f(x, y) dy$$

definiert.

2) Das Integral

$$W = \int_{(K)} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy \quad (6)$$

beschreibt die **Arbeit**, die eine ebene Kraft $\vec{F} = (F_1(x, y), F_2(x, y))^T$ bei der Bewegung einer punktförmigen Masse *längs der Kurve* (K) verrichtet.

3) Das Linienintegral (17) (= Arbeit W) zwischen zwei festen Punkten $A = (x_a, y_a)$ und $B = (x_b, y_b)$ hängt im Allgemeinen vom Weg $(K) = AB$ zwischen A und B ab.

Falls der Integrand in (17) ein *vollständiges Differential* einer Funktion $V = V(x, y)$ darstellt, d.h. es gilt

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy = F_1 dx + F_2 dy,$$

so heißt das Linienintegral (die Arbeit) **wegunabhängig** und es gilt:

$$W = \int_A^B dV = V(x, y) \Big|_A^B = V(x_b, y_b) - V(x_a, y_a). \quad (7)$$

Die Funktion V heißt Potentialfunktion.

Integral (17) ($= W$) wegunabhängig $\iff \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$.

Ein derartiges Kraftfeld $\vec{F} = (F_1, F_2)^T$ wird *konservativ* genannt.

4.4.4 Oberflächenintegrale

Sei (S) (Ober-)Fläche, die durch die Gleichung $z = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ gegeben ist. Auf (S) sei eine Funktion $f(x, y, z)$ definiert.

Zerlegen (S) in n Oberflächenelemente (ΔS_k) mit den Flächeninhalten ΔS_k und wählen Punkte $P_k = (x_k, y_k, z_k) \in (\Delta S_k)$, $k = 1, \dots, n$.

Der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta S_k$$

heißt, falls er existiert und zwar bei $\max_{1 \leq k \leq n} \Delta S_k \rightarrow 0$ und beliebiger Wahl von $P_k \in (\Delta S_k)$, $k = 1, \dots, n$, **Oberflächenintegral 1. Art** und wird bezeichnet durch

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dS.$$

(dS – Oberflächenelement)

Berechnung:

Bezeichnen mit (B) die Projektion der Fläche (S) in die x, y -Ebene. Dann gilt

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dS = \iint_{(B)} f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2} dB. \quad (8)$$

Insbesondere *Inhalt* S (*Oberfläche*) von (S) :

$$S = \iint_{(S)} dS.$$

5 Spezielle Kapitel

5.1 Unendliche Reihen

5.1.1 Zahlenreihen

Sei (a_n) unendliche Zahlenfolge. Bilden sogenannte **Partialsommen**:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

...

$$s_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m$$

⋮

Die Folge (s_m) der Partialsommen einer Folge (a_n) heißt **unendliche Reihe**. Symbolische Schreibweise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_m + \dots$$

Anmerkung: Die Summation kann auch mit jeder anderen natürlichen Zahl sowie 0 beginnen.

Eine unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **konvergent**, wenn die Folge ihrer Partialsommen $s_m = \sum_{n=1}^m a_n$ einen Grenzwert besitzt, d.h.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m a_n = s.$$

Die Zahl s heißt **Summe** der unendlichen Reihe. Man schreibt

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_m + \dots$$

Besitzt die Folge (s_m) keinen Grenzwert, so heißt die unendliche Reihe **divergent**.

Anmerkung: Die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Aus der absoluten Konvergenz folgt stets die Konvergenz einer Reihe. Die Umkehrung gilt nicht!

Notwendige Konvergenzbedingung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Majoranten- und Minorantenkriterium: Gegeben ist Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

a) Majorantenkriterium: Gibt es eine konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, so daß $|a_n| \leq b_n, \forall n \geq n_0$, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (absolut) konvergent.

b) Minorantenkriterium: Gibt es eine gegen $+\infty$ bestimmt divergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, so daß $a_n \geq c_n, \forall n \geq n_0$, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bestimmt divergent gegen $+\infty$.

Quotientenkriterium: Erfüllen die Glieder einer unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ die Bedingung}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1,$$

so ist die Reihe konvergent. Ist $q > 1$, so ist die Reihe divergent.

Anmerkung: Für $q = 1$ versagt das Quotientenkriterium.

Leibnizsches Kriterium für *alternierende Reihen*: Eine **alternierende** Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$ mit $a_n > 0$ ist konvergent,

wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- 1) (a_n) streng monoton fallend, d.h. $a_n > a_{n+1}, \forall n (\geq n_0)$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

5.1.2 Potenzreihen

Unter einer Potenzreihe $P(x)$ versteht man eine unendliche Reihe der Art

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (1)$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$, ($i = 0, 1, 2, \dots$) – Koeffizienten der Potenzreihe.

Anmerkung: Allgemeiner ist möglich

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (2)$$

mit der Stelle x_0 als "Entwicklungspunkt". Durch die Substitution $z = x - x_0$ ist (2) stets auf (1) zurückföhrbar.

Die Menge aller x -Werte für die eine Potenzreihe konvergiert, heißt **Konvergenzbereich** K der Potenzreihe.

Offenbar konvergiert jede Potenzreihe (1) für $x = 0$.

Weiterhin *konvergiert* (1) in einem bestimmten, zum Nullpunkt symmetrischen Intervall $|x| < r$ und *divergiert* für $|x| > r$. (Für $|x| = r$ ist im Allgemeinen keine Aussage möglich.) Die Zahl r heißt **Konvergenzradius**. Konvergiert eine Potenzreihe (1) *nur* für $x = 0$, setzt man $r = 0$ und konvergiert (1) für *alle* $x \in \mathbb{R}$, setzt man $r = \infty$.

Es gilt:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Anmerkung: Für Potenzreihen (2) ergibt sich der Konvergenzbereich $K = (x_0 - r, x_0 + r)$.

Eine Potenzreihe (1) (bzw. analog (2)) kann im *Innern* des Konvergenzbereiches als *Funktion* aufgefaßt werden, d.h. jedem $x \in (-r, r)$ ist genau ein Funktionswert zugeordnet.

Eigenschaften

1) Eine Potenzreihe darf *innerhalb* ihres Konvergenzbereiches *gliedweise* differenziert und integriert werden. Die neuen Potenzreihen besitzen dabei denselben Konvergenzradius wie die ursprüngliche Reihe.

2) Zwei Potenzreihen dürfen im *gemeinsamen* Konvergenzbereich der Reihen gliedweise addiert und multipliziert werden. Die neuen Potenzreihen konvergieren mindestens im gemeinsamen Konvergenzbereich der Ausgangsreihen.

Wichtigste Potenzreihen: Taylor-Reihen – aus der Taylor-Entwicklung einer Funktion $y = f(x)$ für $n \rightarrow \infty$, d.h.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (3)$$

Dabei Funktionswert = Summe der Reihe für $x \in K$.

Anwendung: Z.B.

Integration durch Potenzreihenentwicklung des Integranden

$$\int f(x) dx = ?$$

- 1) Integrand $f(x)$ wird in *Taylor-Reihe* entwickelt
- 2) *Gliedweise* Integration (im Konvergenzbereich)

5.1.3 Fourier-Reihen

Sei $y = f(x)$ *periodische* Funktion mit der Periode $T > 0$, wobei $f(x)$ stückweise stetig auf $[0, T]$.

Bezeichnen $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (Kreisfrequenz der Grundschwingung).

Dann läßt sich $f(x)$ in folgende *trigonometrische Reihe* entwickeln:

$$f(x) \sim S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)] \quad (4)$$

Die Darstellung (4) heißt **Fourier-Reihe** von $f(x)$. Die Konstanten $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ sind die *Fourier-Koeffizienten*. Dabei gilt:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(n\omega x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5a)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(n\omega x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5b)$$

Darstellungssatz: Ist die T -periodische Funktion $y = f(x)$ auf $[0, T]$ stückweise stetig differenzierbar, so gilt:

$$S_f(x_0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \nearrow x_0} f(x) + \lim_{x \searrow x_0} f(x) \right), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R},$$

d.h. insbesondere $S_f(x_0) = f(x_0)$ in allen *Stetigkeitsstellen* x_0 von $f(x)$.

Erläuterungen:

A) Das Integrationsintervall $[0, T]$ in (5) kann durch jedes beliebige Intervall $[T_0, T_0 + T]$ ersetzt werden, insbesondere durch $[-T/2, T/2]$.

B) Ist $f(x)$ eine *gerade* Funktion, so sind die Koeffizienten $b_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$, d.h.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x).$$

Ist $f(x)$ *ungerade* Funktion, so gilt $a_n = 0$, $n = 0, 1, \dots$, d.h.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x).$$

C) Ist eine Funktion $f(x)$ in einem *endlichen* Intervall $[a, b]$ gegeben, so läßt sie sich **periodisch fortsetzen**, d.h. wir setzen

$$\tilde{f}(x + kT) = f(x), \quad x \in [a, b], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

mit $T = b - a$ (Intervalllänge). Nun läßt sich $\tilde{f}(x)$ in eine Fourier-Reihe entwickeln, wobei $f(x) = \tilde{f}(x)$ für $x \in [a, b]$.

D) Durch Abbruch der Fourier-Reihe (4) nach endlich vielen Gliedern erhält man eine *Näherungsfunktion*

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)].$$

Die Näherung $S_N(x)$ ist die beste im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate, d.h.

$$\int_0^T [f(x) - S_N(x)]^2 dx \leq \int_0^T [f(x) - T_N(x)]^2 dx$$

mit einem beliebigen trigonometrischen Polynom $T_N(x)$.

Die Funktion $f_N(x) := S_N(x)$ wird N -te Näherung ($N = 1, 2, 3, \dots$) von $f(x)$ genannt (vgl. Abb.1).

E) In jeder Sprungstelle von $f(x)$ tritt das sogenannte *Gibbs-Phänomen* auf, d.h. für hinreichend große N überschwingen alle Partialsummen den Sprung von $f(x)$ um $\approx 17,89\%$.

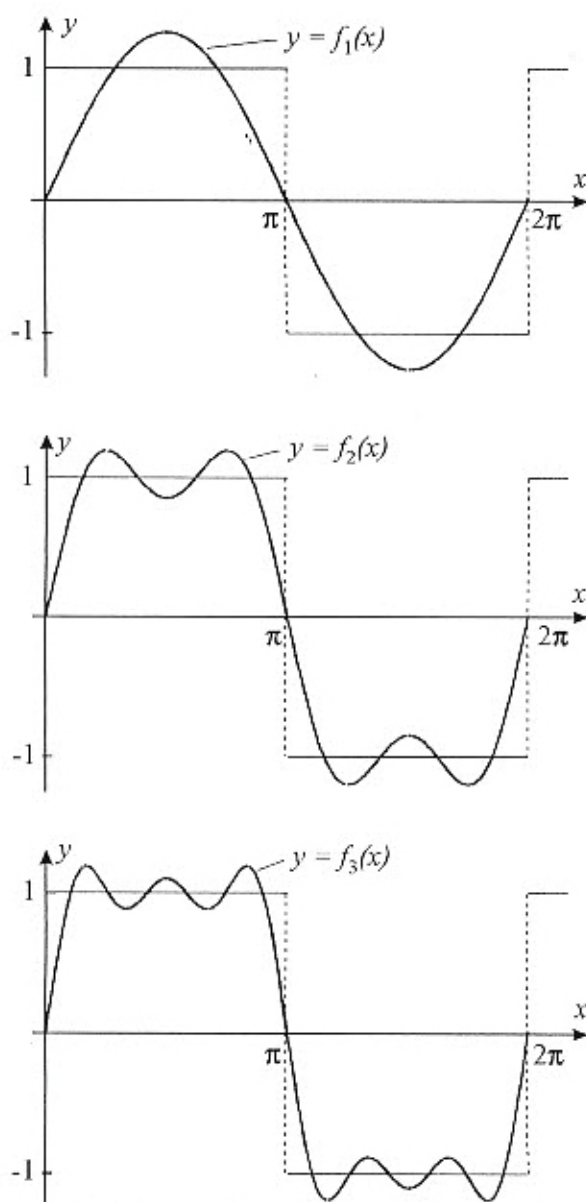


Abb. 1: Näherungsfunktionen der Rechteckskurve

5.2 Komplexe Zahlen

5.2.1 Definition und Eigenschaften

Der Ausdruck $\sqrt{-1} =: i$ heißt *imaginäre Einheit*. Dabei gilt $i^2 = -1$.

Unter einer *imaginären Zahl* bi versteht man das (formale) Produkt aus $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und der imaginären Einheit i .

Komplexe Zahl $z = x + iy$: (Formale) Summe aus einer reellen Zahl x und einer imaginären Zahl yi . Dabei

$x = \operatorname{Re} z$: Realteil von z

$y = \operatorname{Im} z$: Imaginärteil von z

Menge der komplexen Zahlen: $\mathbb{C} = \{z : z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}\}$

Offenbar: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Konjugiert komplexe Zahl zu $z = x + iy$: $\bar{z} = x - iy$

Betrag von z : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Rechenregeln: Seien $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$

0) Gleichheit

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

1) Addition/Subtraktion

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

2) Multiplikation

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$$

3) Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

5.2.2 Darstellungen komplexer Zahlen

A) Normalform: $z = x + iy$

B) Trigonometrische Form: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Umrechnung

- trigonometrische Form \rightarrow Normalform:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

- Normalform \rightarrow trigonometrische Form:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \pm \arccos \frac{x}{r}, \text{ wobei}$$

oberes (unteres) Vorzeichen für $y \geq 0$ ($y < 0$).

Eulersche Formel:

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi} \quad (*)$$

Wegen (*) läßt sich trigonometrische Form auch schreiben:

C) Exponentialform: $z = r e^{i\varphi}$

Multiplikation und Division in Exponentialform

Seien $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} \implies$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Potenzieren:

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Anmerkung: Wegen (*) gilt: $e^{i(\varphi + 2k\pi)} = e^{i\varphi}$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Benutzen zum Vereinfachen!

Radizieren:

z n -te Wurzel aus $a = R e^{i\alpha} \iff z^n = a$:

$$z_k = \sqrt[n]{R} \exp\left(i \frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

5.3 Anwendungen komplexer Zahlen

5.3.1 Algebraische Gleichungen

Fundamentalsatz der Algebra: Die algebraische Gleichung n -ten Grades

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_k \in \mathbb{C} \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (1)$$

hat *mindestens* eine komplexe Lösung.

Insbesondere: Falls die Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$, ($k = 0, 1, \dots, n$) und z_0 Lösung von (6), dann ist auch \bar{z}_0 Lösung von (6).

Anmerkung: Das Horner-Schema gilt auch für Polynome mit komplexen Koeffizienten zur Berechnung an komplexen Stellen z_0 (speziell Nullstellen von (6)).

Folgerung: Ein Polynom $P_n(z)$ n -ten Grades hat n (im Allgemeinen komplexe) möglicherweise zusammenfallende *Nullstellen* z_1, z_2, \dots, z_n . Dabei gilt die Linearfaktor-Zerlegung

$$P_n(z) = a_n(z - z_n)(z - z_{n-1}) \cdot \dots \cdot (z - z_2)(z - z_1).$$

Zusatz: Falls $a_k \in \mathbb{R}$ ($k = 0, 1, \dots, n$), so sind die komplexen Nullstellen paarweise konjugiert: $z_k = x_k + iy_k$ und $z_k = x_k - iy_k$ und lassen sich zu einem reell unzerlegbaren quadratischen Faktor $((z - x_k)^2 + y_k^2)$ zusammenfassen.

5.3.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei A quadratische Matrix.

Vektoren $\vec{y} \neq \vec{0}$, die bei Anwendung der Matrix A in ihr λ -faches übergehen, heißen **Eigenvektoren** von A zum **Eigenwert** $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h.

$$A\vec{y} = \lambda\vec{y}.$$

Die Eigenwerte ergeben sich aus der *charakteristischen Gleichung* der Matrix A

$$|A - \lambda E| = 0. \quad (2)$$

Die Gleichung (7) n -ten Grades bezüglich λ hat nach dem Fundamentalsatz der Algebra n (möglicherweise zusammenfallende) Lösungen

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Den zu λ_i gehörigen Eigenvektor erhält man durch Lösung des Gleichungssystems

$$(A - \lambda_i E)\vec{y}_i = \vec{0}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Als Lösung eines homogenen System ist \vec{y}_i nur bis auf einen Faktor bestimmt, dieser kann geeignet gewählt werden.

Eigenschaften:

1) Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ verschieden $\implies \exists n$ linear unabhängige Eigenvektoren

2) $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n$ linear unabhängige Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \iff$

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei die *Transformationsmatrix* B die Eigenvektoren als Spalten enthält.

3) Für jede reelle *symmetrische* (n,n) -Matrix $A = A^T$ gilt:

- Alle Eigenwerte von A sind reell.
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von A sind orthogonal.

5.3.3 Die Fourier-Transformation

Sei $f(x)$ (stückweise stetige) periodischen Funktion mit Periode $T > 0$
 \implies Fourierreihe in *komplexer Schreibweise*:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}, \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{T} \right) \quad (4)$$

mit

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ik\omega t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

Ziel: Verallgemeinerung auf *nicht-periodische* Funktionen.

Lösung: **Fourier-Integral-Formel:**

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \right) d\omega, \quad x \in \mathbb{R} \quad (6)$$

Eine Funktion $F(\omega)$ heißt **Fourier-Transformierte** (Spektralfunktion) von f , wenn für alle $\omega \in \mathbb{R}$ das folgende Integral existiert:

$$F(\omega) =: \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt. \quad (7)$$

Die **inverse** Fourier-Transformation von F lautet:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} F(\omega) d\omega. \quad (8)$$

Deutung: Die (gegebenen Zeit-)Funktionen $f(t)$ liegen im *Original-* oder *Zeitbereich*, die Fourier-Transformierten $F(\omega)$ im *Bild-* oder *Frequenzbereich*.

Schreibweise: $f(t) \circ\text{---}\bullet F(\omega)$

6 Differentialgleichungen

6.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

6.1.1 Definition und Lösungsbegriff

Eine Gleichung, in der Ableitungen einer unbekanntes Funktion $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ auftreten, nennt man **Differentialgleichung**.

Ist dabei $y = y(x)$ eine Funktion einer Variablen, so spricht man von einer **gewöhnlichen Differentialgleichung**.

(Falls y eine Funktion von mehreren Variablen darstellt, handelt es sich um eine *partielle* Differentialgleichung.)

Ordnung der Differentialgleichung: Ordnung der höchsten vorkommenden Ableitung in der Differentialgleichung

Eine Funktion $y = y(x)$ heißt **Lösung** der gewöhnlichen Differentialgleichung im Intervall I , wenn sie dort mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung erfüllt.

Bei der Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung n -ter Ordnung unterscheidet man:

- **allgemeine Lösung:** mit n Parametern
+ zusätzliche Bedingungen \implies
- **spezielle Lösung:** Parameter haben feste Werte
- *singuläre* Lösung: nicht in allgemeiner Lösung enthalten

Typische Aufgabenstellungen

- 1) *Anfangswertaufgaben* Differentialgleichung n -ter Ordnung +
Anfangsbedingungen für $x_0 \in I$:
 $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)} = y_{n-1}$
($y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ vorgegeben)
- 2) *Randwertaufgaben* Differentialgleichung n -ter Ordnung +
Zusatzbedingungen an wenigstens
2 Stellen $x_1, x_2 \in I$ ($x_1 \neq x_2$)
- 3) *Eigenwertaufgaben* Differentialgleichung n -ter Ordnung +
Anfangsbedingungen: Parameter λ
so wählen, daß \exists Lösung $y(x) \neq 0$

6.1.2 Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1)$$

I. Geometrische Lösung: Setzen $y' = k = \text{const} \implies$

$F(x, y, k) = 0$: Kurvenschar (mit Parameter k):

Dabei besitzt Lösungskurve von (1) in jedem Punkt von $F(x, y, k) = 0$ den Anstieg k . Die Kurven $F(x, y, k) = 0$ werden daher *Isoklinen* der Differentialgleichung (1) (für k) genannt.

Praktisch: Man zeichnet in mehreren Punkten verschiedener Isoklinen jeweils ein kleines Geradenstück mit dem Anstieg k . So ergibt sich das *Richtungsfeld* der Differentialgleichung.

II. Analytische Lösung: *Kein* allgemeines Lösungsverfahren – Verfahren abhängig vom **Typ** der Differentialgleichung.

Ausgewählte Typen

$$\mathbf{A)} \quad y' = f(x)g(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

1) **Trennung der Variablen**

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx.$$

2) Integration der beiden Seiten der Gleichung:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx.$$

3) Auflösung nach y (falls möglich).

Anmerkung: Trennung der Variablen ist nur für $g(y) \neq 0$ möglich. Falls $g(y) = 0$, erhalten wir die (singuläre) Lösung $y = a = \text{const}$.

$$\mathbf{B)} \quad \text{i) } y' = f(ax + by + c) \quad \text{ii) } y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

1) *Substitution:*

$$\text{Bei i) } u = ax + by + c$$

$$\text{Bei ii) } u = \frac{y}{x}.$$

- 2) Integration der neuen Differentialgleichung 1. Ordnung für die Hilfsfunktion u durch Trennung der Variablen.
- 3) Rücksubstitution und Auflösung nach y .

C) Exakte Differentialgleichung

$$P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2)$$

$$\iff P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

(2) heißt *exakt*, wenn die zugehörige Differentialform $P dx + Q dy$ das vollständige Differential einer Funktion $V = V(x, y)$ darstellt, d.h. wenn

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$V = V(x, y) = \text{const}$ ist dann die *allgemeine Lösung* von (2).

6.1.3 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$y' + f(x)y = g(x). \quad (3)$$

1. Homogene Gleichung, d.h. für $g(x) \equiv 0$:

$$y' + f(x)y = 0. \quad (4)$$

Lösung:

$$y_0 = K \exp\left(-\int f(x) dx\right), \quad (K \in \mathbb{R}). \quad (5)$$

2. Inhomogene Gleichung

Integration durch **Variation der Konstanten**:

Man ersetzt in der Lösung (5) der *homogenen* Gleichung (4) die Integrationskonstante K durch eine *Funktion* $K(x)$, d.h. es wird der folgende Produktansatz gemacht:

$$y = K(x) \exp\left(-\int f(x) dx\right). \quad (6)$$

Man erhält dann für $K(x)$ die Beziehung

$$K'(x) \exp\left(-\int f(x) dx\right) = g(x).$$

Nach Integration und Einsetzen von $K(x)$ in (6) erhält man die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (3).

6.1.4 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + ay' + by = g(x), \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

1. Homogene Gleichung, d.h. für $g(x) \equiv 0$:

$$y'' + ay' + by = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Ansatz: $y = e^{\lambda x}$ liefert **charakteristische Gleichung**:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \quad (9)$$

Lösungen:

$$\lambda_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Art der Lösung abhängig von *Diskriminante* $D = a^2 - 4b$:

1. Fall: $D = a^2 - 4b > 0$: 2 reelle Lösungen $\lambda_1 \neq \lambda_2$

\implies Allgemeine Lösung von (8):

$$y_0(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

2. Fall: $D = a^2 - 4b = 0$: 1 reelle Lösung $\lambda_1 = \lambda_2$

\implies Allgemeine Lösung von (8):

$$y_0(x) = (C_1 x + C_2) e^{-\frac{a}{2} x}, \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

3. Fall: $D = a^2 - 4b < 0$: 2 komplexe Lösungen $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Bezeichnen $\omega := \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} \implies$ Allgemeine Lösung von (8):

$$y_0(x) = C_1 e^{-\frac{a}{2} x} \sin(\omega x) + C_2 e^{-\frac{a}{2} x} \cos(\omega x), \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

2. Integration der inhomogenen Gleichung

Satz: Die allgemeine Lösung $y(x)$ der *inhomogenen* Gleichung (7) ist die *Summe* der allgemeinen Lösung $y_0(x)$ der homogenen Gleichung (8) und einer *speziellen* (oder partikulären) Lösung $y_s(x)$ der inhomogenen Gleichung (7), d.h.

$$y(x) = y_0(x) + y_s(x).$$

Bestimmung einer **speziellen** Lösung von (7) in Abhängigkeit vom *Störglied* $g(x)$:

$g(x)$	Lösungsansatz	Parameter
Polynom $P_n(x)$	$Q_n(x)$ für $b \neq 0$ $xQ_n(x)$ für $a \neq 0, b = 0$ $x^2Q_n(x)$ für $a = b = 0$	Koeffizienten von $Q_n(x)$
e^{cx}	Ae^{cx} , falls c keine Lösung der charakterist. Gl. (9) Axe^{cx} , c einfache Lösung von (9) Ax^2e^{cx} , c doppelte Lösung von (9)	A
$\sin(\beta x)$ (und/oder $\cos(\beta x)$)	$A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x)$, falls $\sin(\beta x)$ keine Lösung der homogenen Gleichung (8); $x[A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x)]$, falls $\sin(\beta x)$ Lösung der homogenen Gleichung (8)	A, B

6.2 Ausblick

6.2.1 Lineare Differentialgleichungssysteme

Es gibt verschiedene Lösungsverfahren. Insbesondere kann man versuchen, das Differentialgleichungssystem in eine *einzig*e Differentialgleichung höherer Ordnung zu überführen.

6.2.2 Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

Partielle Differentialgleichung: Unbekannte Funktion von mehreren Variablen + partielle Ableitungen dieser Funktion.

Ordnung der partiellen Differentialgleichung: Höchste vorkommende Ordnung der partiellen Ableitungen

Lösung: Funktion + Ableitungen erfüllen partielle Differentialgleichung. Partielle Differentialgleichungen haben im Allgemeinen unendlich viele Lösungen. Um eindeutige Lösung zu erhalten, sind *zusätzliche* Bedingungen (Anfangs- und/oder Randbedingungen) erforderlich.

Problem: Welche Kombination von Bedingungen sind möglich, um Lösung *eindeutig* zu bestimmen?

Falls die Lösung existiert, eindeutig bestimmt ist und stetig von den gegebenen Größen abhängt, heißt die Aufgabe **korrekt** gestellt.

Partielle Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$F(x_1, \dots, x_n, z(x_1, \dots, x_n), z_{x_1}, \dots, z_{x_n}) = 0.$$

6.2.3 Lineare partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung

$n = 2$ Variable (ebener Fall):

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (*)$$

mit gesuchter Funktion $u = u(x, y)$ und gegebenen Funktionen $A = A(x, y), \dots, G = G(x, y)$ (in einem Gebiet $S \subset \mathbb{R}^2$).

Für $G(x, y) \equiv 0$ (*Störglied*) heißt die Gleichung (10) *homogen*.

Die Art der Lösung wird wesentlich von den Koeffizienten A, B, C bestimmt \implies *Klassifikation*:

Die Gleichung (*) heißt in einem Gebiet S

- 1) **elliptisch**, falls dort $AC - B^2 > 0$
- 2) **parabolisch**, falls dort $AC - B^2 = 0$
- 3) **hyperbolisch**, falls dort $AC - B^2 < 0$.

A Anhang

Gradient, Divergenz und Rotation eines Feldes sind *unabhängig* vom gewählten Koordinatensystem. Mitunter ist deren Berechnung *einfacher*, wenn man Zylinder- oder Kugelkoordinaten einführt.

I. Zylinderkoordinaten

Es werden die folgenden Einheitsvektoren als *Basisvektoren* verwendet (vgl. 4.1.1)

\vec{e}_ρ : Nach außen gerichteter, normierter Ortsvektor
des Projektionspunktes P'

\vec{e}_φ : Normierter Tangentenvektor in P' des Kreises mit Radius ρ

\vec{e}_z : Kartesischer Einheitsvektor \vec{e}_3

Ein Vektor \vec{a} läßt sich in diesem Basissystem in folgender Form darstellen:

$$\vec{a} = a_\rho \vec{e}_\rho + a_\varphi \vec{e}_\varphi + a_z \vec{e}_z.$$

Dann ergeben sich für das skalare Feld in Zylinderkoordinaten

$f = f(\rho, \varphi, z)$ bzw. das Vektorfeld

$$\vec{a} = \vec{a}(\rho, \varphi, z) = a_\rho(\rho, \varphi, z) \vec{e}_\rho + a_\varphi(\rho, \varphi, z) \vec{e}_\varphi + a_z(\rho, \varphi, z) \vec{e}_z$$

die folgenden Beziehungen:

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \cdot a_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} &= \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\varphi \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \cdot a_\varphi) - \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \cdot \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

II. Kugelkoordinaten

Es werden die folgenden Einheitsvektoren als *Basisvektoren* verwendet (vgl. 4.1.1)

\vec{e}_r : Nach außen gerichteter, normierter Ortsvektor von P

\vec{e}_ϑ : Normierter Tangentenvektor an Längengreis durch P

\vec{e}_φ : Normierter Tangentenvektor an Breitenkreis durch P

Ein Vektor \vec{a} läßt sich in diesem Basissystem in folgender Form darstellen:

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\vartheta \vec{e}_\vartheta + a_\varphi \vec{e}_\varphi.$$

Dann ergeben sich für das skalare Feld in Kugelkoordinaten

$f = f(r, \vartheta, \varphi)$ bzw. das Vektorfeld

$$\vec{a} = \vec{a}(r, \vartheta, \varphi) = a_r(r, \vartheta, \varphi) \vec{e}_r + a_\vartheta(r, \vartheta, \varphi) \vec{e}_\vartheta + a_\varphi(r, \vartheta, \varphi) \vec{e}_\varphi$$

die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \\ \text{div } \vec{a} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot a_r) + \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \cdot a_\vartheta) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right] \\ \text{rot } \vec{a} &= \left\{ \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \cdot a_\varphi) - \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right\} \vec{e}_r \\ &+ \left\{ \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot a_\varphi) \right\} \vec{e}_\vartheta + \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot a_\vartheta) - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} \right\} \vec{e}_\varphi \\ \Delta f &= \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \cdot \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right\}. \end{aligned}$$