SS2018 – 5. Repetitorium – Prof. Paditz

Aufg. 6.1. 12, 17, 21c), 23b), 24a), 30h), i), 31

Aufg. 6.1. 12

Wir betrachten die folgende chemische Reaktion: Ein Atom vom Typ A vereinige sich mit einem Atom vom Typ B zu einem Molekül vom Typ AB: $A+B\to AB$. Die Anzahl der Atome vom Typ A bzw. B betrage zu Beginn der Reaktion (d.h. zur Zeit $t=0$) a bzw. b. Nach der Zeit $t>0$ seien $x=x(t)$ Moleküle AB entstanden. Dann läßt sich die chemische Reaktion durch die Differenzialgleichung 1. Ordnung $\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x)$ beschreiben ($k>0$: "Geschwindigkeitskonstante").

a) Lösen Sie diese Differenzialgleichung für $a\neq b$ und den Anfangswert $x(0)=0$.

b) Wann kommt die Reaktion zum Stillstand (Annahme: $a>b$)?

Lösung:

a) per Hand: TdV für $a \neq b$

$$\int \frac{1}{(a-x)(b-x)}dx=\int k\,dt+C$$

$$\frac{\ln(x-a)-\ln(x-b)}{a-b}=k\cdot t+C$$

solve(ans, x)

$$\left\{x=\frac{b\cdot e^{a\cdot k\cdot t-b\cdot k\cdot t+C\cdot a-C\cdot b}-a}{e^{a\cdot k\cdot t-b\cdot k\cdot t+C\cdot a-C\cdot b}-1}\right\}$$

$$\frac{b\cdot e^{a\cdot k\cdot t-b\cdot k\cdot t+C\cdot a-C\cdot b}-a}{e^{a\cdot k\cdot t-b\cdot k\cdot t+C\cdot a-C\cdot b}-1}=\frac{b\cdot e^{a\cdot k\cdot t-b\cdot k\cdot t}e^{C\cdot a-C\cdot b}-a}{e^{a\cdot k\cdot t-b\cdot k\cdot t}e^{C\cdot a-C\cdot b}-1}=$$

$$\frac{b\cdot e^{a\cdot k\cdot t-b\cdot k\cdot t}C1-a}{e^{a\cdot k\cdot t-b\cdot k\cdot t}C1-1}=\frac{b\cdot e^{(a-b)\cdot k\cdot t}C1-a}{e^{(a-b)\cdot k\cdot t}C1-1}$$

somit

$$\text{Define } x(t)=\frac{b\cdot e^{(a-b)\cdot k\cdot t}C1-a}{e^{(a-b)\cdot k\cdot t}C1-1}$$

done

$x(0)=0$

$$\frac{C1\cdot b-a}{C1-1}=0$$

solve(ans, C1)

$$\left\{C1=\frac{a}{b}\right\}$$

Ergebnis:

$$x(t)=\frac{a\cdot e^{(a-b)\cdot k\cdot t}-a}{\frac{a}{b}e^{(a-b)\cdot k\cdot t}-1}=a\cdot b\frac{e^{(a-b)\cdot k\cdot t}-1}{a\cdot e^{(a-b)\cdot k\cdot t}-b}$$

a) mit dem CAS für $a \neq b$

dSolve(x'=k•(a−x)(b−x), t, x, t=0, x=0)|a>0 and b>0

$$\left\{\frac{(|x-a|)^{\frac{1}{a-b}}}{(|x-b|)^{\frac{1}{a-b}}}=\frac{a^{\frac{1}{a-b}}\cdot e^{k\cdot t}}{b^{\frac{1}{a-b}}}\right\}$$

Betragsauflösung für x<a, x<b

$$\frac{(a-x)^{\frac{1}{a-b}}}{(b-x)^{\frac{1}{a-b}}}=\frac{a^{\frac{1}{a-b}}\cdot e^{k\cdot t}}{b^{\frac{1}{a-b}}}$$ ergibt

$$\text{solve}\left(\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{\frac{1}{a-b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{a-b}}\cdot e^{k\cdot t}, x\right)$$

$$\left\{x=\frac{b\cdot\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{a-b}}\cdot e^{k\cdot t}\right)^{a-b}-a}{\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{a-b}}\cdot e^{k\cdot t}\right)^{a-b}-1}\right\}$$

simplify(ans)

$$\left\{x=\frac{b\cdot\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{a-b}}\right)^{a-b}\cdot e^{a\cdot k\cdot t-b\cdot k\cdot t}-a}{\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{a-b}}\right)^{a-b}\cdot e^{a\cdot k\cdot t-b\cdot k\cdot t}-1}\right\}$$

$$x=\frac{b\cdot\frac{a}{b}\cdot e^{(a-b)\cdot k\cdot t}-a}{\frac{a}{b}\cdot e^{(a-b)\cdot k\cdot t}-1}=\frac{a\cdot b(e^{(a-b)\cdot k\cdot t}-1)}{ae^{(a-b)\cdot k\cdot t}-b}$$

Ergebnis: $x(t)=a\cdot b\frac{1-e^{-(a-b)k\cdot t}}{a-b\cdot e^{-(a-b)k\cdot t}}$, $t\geq 0$.

b) a>b

$$\lim_{t\to\infty}\left(a\cdot b\frac{1-e^{-(a-b)k\cdot t}}{a-be^{-(a-b)k\cdot t}}\,|\,a>b>0 \text{ and } k>0\right)=a\cdot b\frac{1-0}{a-0}=b$$

Reaktionsende, wenn alle Atome A in Moleküle AB übergegangen sind.

Aufg. 6.1.17

Lösen Sie die Differenzialgleichung für den Abkühlungsprozeß (vgl. Aufgabe 1) unter der Anfangsbedingung $T(0)=T_0$ ($T_0>TL$). Gegen welchen Endwert strebt die Körpertemperatur?

Lösung:

siehe Lösung zu **6.1.**1 in der **7.** Übung

$T(t)=TL+(T_0-TL)e^{-at}$, $t\geq 0$,

ergibt $T(\infty)=TL$

Aufg. 6.1.21c)

Lösen Sie die die Differenzialgleichung 1. Ordnung: $y'\sin(y)=-x$.

Lösung: nichtlin. Dgl. TdV

DelVar x, y

done

$$\int \sin(y)\,dy=\int -x\,dx+C$$

$$-\cos(y)=\frac{-x^2}{2}+C$$

solve(ans, y)

$$\left\{y=-\cos^{-1}\left(\frac{x^2}{2}-C\right)+2\cdot\pi\cdot\mathrm{constn}(1), y=\cos^{-1}\left(\frac{x^2}{2}-C\right)+2\cdot\pi\cdot\mathrm{cc}\right.$$

Ergebnis: Periodizität $2\cdot\pi\cdot k$

$y(x)=\pm\arccos(\frac{x^2}{2}-C)+2\cdot\pi\cdot k$, $C\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Kontrolle mit CAS:

dSolve(y'•sin(y)=−x, x, y)

$$\left\{y=-\cos^{-1}\left(\frac{x^2}{2}+\mathrm{const}(1)\right)+2\cdot\pi\cdot\mathrm{constn}(1), y=\cos^{-1}\left(\frac{x^2}{2}+\mathrm{co}\right.\right.$$

Probe:

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}(\frac{x^2}{2}+C)+2\cdot\pi\cdot k\right)\cdot\sin(\cos^{-1}(\frac{x^2}{2}+C)+2\cdot\pi\cdot k)$$

$$\frac{-x\cdot\sin\left(2\cdot k\cdot\pi+\cos^{-1}\left(\frac{x^2}{2}+C\right)\right)}{\sqrt{\frac{-x^4}{4}-C\cdot x^2-C^2+1}}$$

ans|k=constn(1)

$$\frac{-2\cdot x\cdot\sqrt{\frac{-x^4}{4}-C\cdot x^2-C^2+1}}{\sqrt{-x^4-4\cdot C\cdot x^2-4\cdot C^2+4}}$$

simplify(ans)

$$-x$$

Aufg. 6.1.23b)

Lösen Sie die Differenzialgleichung 1. Ordnung

$y'+\frac{y}{1+x}=e^{2x}$ mit der Anfangsbedingung $y(0)=1$.

Lösung: für $x>-1$

inhom. lin. Dgl. mit nichtkonst. Koeff.

1. Schritt: hom. lin. Dgl. mit TdV lösen

DelVar x, y

done

$$\int_{□}^{□} \frac{1}{y} dy = \int_{□}^{□} \frac{-1}{1+x} dx + C1$$

$$\ln(|y|) = -\ln(|x+1|) + C1$$

solve(ans, y)

$$\left\{ y = \frac{-e^{C1}}{|x+1|}, y = \frac{e^{C1}}{|x+1|} \right\}$$

Zwischenergebnis: $y\_hom(x) = \frac{C}{x+1}$

2. Schritt: VdK

$y\_p, inhom(x) = \frac{C(x)}{x+1}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{C(x)}{x+1}\right) + \frac{C(x)}{x+1} * \frac{1}{1+x} = e^{2x}$$

$$\frac{x \cdot \frac{d}{dx}(C(x)) + \frac{d}{dx}(C(x)) - C(x)}{(x+1)^2} + \frac{C(x)}{(x+1)^2} = e^{2 \cdot x}$$

simplify(ans)

$$\frac{\frac{d}{dx}(C(x))}{x+1} = e^{2 \cdot x}$$

$\frac{d}{dx}(C(x)) = (x+1) e^{2 \cdot x}$ ergibt

$$\int_{□}^{□} (x+1) e^{2 \cdot x} dx$$

$$\frac{2 \cdot x \cdot e^{2 \cdot x} + e^{2 \cdot x}}{4}$$

C(x)=factor(ans)

$$C(x) = \frac{(2 \cdot x + 1) \cdot e^{2 \cdot x}}{4}$$

$$y\_p(x)=\frac{C(x)}{x+1}=\frac{(2\cdot x+1)\cdot e^{2\cdot x}}{4\cdot(x+1)}$$

$$y(x)=\frac{C}{x+1}+\frac{2\cdot x+1}{4\cdot(x+1)}\cdot e^{2\cdot x}$$

$$\frac{C}{x+1}+\frac{2\cdot x+1}{4\cdot(x+1)}\cdot e^{2\cdot x}=1|x=0$$

$$C+\frac{1}{4}=1$$

$$C=\frac{3}{4}$$

Ergebnis:

$$y(x)=\frac{3}{4}\frac{1}{x+1}+\frac{2x+1}{4(x+1)}e^{2x}=\frac{3+(2x+1)e^{2x}}{4(x+1)}$$

Kontrolle mit dem CAS:

$$\text{dSolve}\left(y'+\frac{y}{1+x}=e^{2x},x,y\right)|x>-1$$

$$\left\{y-\frac{\int|x+1|\cdot e^{2\cdot x}dx}{x+1}-\frac{\text{const}(1)}{x+1}=0\right\}$$

$$y-\frac{\int_{\square}^{\square}(x+1)\cdot e^{2\cdot x}dx}{x+1}-\frac{C}{x+1}=0$$

$$\frac{-(2\cdot x\cdot e^{2\cdot x}+e^{2\cdot x})}{4\cdot(x+1)}+y-\frac{C}{x+1}=0$$

ans|x=0 and y=1

$$-C+\frac{3}{4}=0$$

$$C=\frac{3}{4}$$

Ergebnis:

$$\text{Define } y(x)=\frac{1}{4}\frac{2\cdot x+1}{x+1}e^{2\cdot x}+\frac{3}{4}\frac{1}{x+1}$$

done

Probe:

y(0)

$$1$$

$$\frac{d}{dx}(y(x))+\frac{y(x)}{1+x}=e^{2x}$$

$$\frac{4\cdot x^2\cdot e^{2\cdot x}+6\cdot x\cdot e^{2\cdot x}+3\cdot e^{2\cdot x}-3}{4\cdot(x+1)^2}+\frac{\frac{(2\cdot x+1)\cdot e^{2\cdot x}}{4\cdot(x+1)}+\frac{3}{4\cdot(x+1)}}{x+1}$$

simplify(ans)

$$e^{2\cdot x}=e^{2\cdot x}$$

Aufg. 6.1. 24a)

Lösen Sie die Differenzialgleichung 1. Ordnung mit Hilfe einer geeigneten Substitution: $y'=(x+y+1)^2$.

Lösung:

Subst.: $z(x)=x+y(x)+1$, $z'=1+y'$

$z'-1=z^2$, $z'=1+z^2$, TdV

$$\int \frac{1}{1+z^2}dz=\int 1dx+C$$

$$\tan^{-1}(z)=x+C$$

solve(ans, z)

$$\{z=\tan(x+C)\}$$

$y(x)=\tan(x+C)-x-1$, $C\in\mathbf{R}$,

Probe:

$$\frac{d}{dx}(\tan(x+C)-x-1)=(\tan(x+C))^2$$

$$(\tan(x+C))^2=(\tan(x+C))^2$$

Aufg. 6.1.30h)

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$y''+2y'+3y=e^{-2x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Lösung: (per Hand vgl. 30i)

dSolve$(y''+2y'+3y=e^{-2x}, x, y)$

$$\left\{y=\cos(\sqrt{2}\cdot x)\cdot e^{-x}\cdot \text{const}(1)+\sin(\sqrt{2}\cdot x)\cdot e^{-x}\cdot \text{const}(2)+\frac{e}{}\right.$$

allgem. Lösung:

$$y(x)=e^{-x}(\cos(\sqrt{2}\cdot x)\cdot C1+\sin(\sqrt{2}\cdot x))\cdot C2+\frac{e^{-2\cdot x}}{3}$$

AWP:

dSolve$(y''+2y'+3y=e^{-2x}, x, y, x=0, y=0, x=0, y'=1)$

$$\left\{y=\frac{-\cos(\sqrt{2}\cdot x)\cdot e^{-x}}{3}+\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(\sqrt{2}\cdot x)\cdot e^{-x}}{3}+\frac{e^{-2\cdot x}}{3}\right\}$$

Define $y(x)=\frac{1}{3}e^{-x}(2\sqrt{2}\cdot\sin(\sqrt{2}\cdot x)-\cos(\sqrt{2}\cdot x))+\frac{e^{-2\cdot x}}{3}$

done

Probe:

$y(0)$

0

$\frac{d}{dx}(y(x))\,|\,x=0$

1

$\frac{d^2}{dx^2}(y(x))+2\frac{d}{dx}(y(x))+3y(x)=e^{-2x}$

$$\frac{-2\cdot(4\cdot\cos(\sqrt{2}\cdot x)+\sqrt{2}\cdot\sin(\sqrt{2}\cdot x))\cdot e^{-x}}{3}-\frac{(\cos(\sqrt{2}\cdot x)-2\cdot\sqrt{}}{}$$

simplify(ans)

$$e^{-2\cdot x}=e^{-2\cdot x}$$

alternative Lösung: Laplace−Transformation

DelVar x, y, s

done

laplace(y''+2y'+3y=e^{-2x}, x, y, s)

$$-s\cdot y(0)-y'(0)+Lp\cdot s^2-2\cdot(y(0)-Lp\cdot s)+3\cdot Lp=\frac{1}{s+2}$$

ans|y(0)=0 and y'(0)=1

$$Lp\cdot s^2+2\cdot Lp\cdot s+3\cdot Lp-1=\frac{1}{s+2}$$

solve(ans, Lp)

$$\left\{Lp=\frac{s+3}{s^3+4\cdot s^2+7\cdot s+6}\right\}$$

$$y=\mathcal{L}_s^{-1}\left(\frac{s+3}{s^3+4\cdot s^2+7\cdot s+6}\right)[x]$$

$$y=\frac{-\cos(\sqrt{2}\cdot x)\cdot e^{-x}}{3}+\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(\sqrt{2}\cdot x)\cdot e^{-x}}{3}+\frac{e^{-2\cdot x}}{3}$$

stop

Aufg. 6.1. 30i)

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$y''+4y'+5y=5x^2-32x+5$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Lösung:

inhom. lin. Dgl. 2.Ordnung mit konst. Koeff.

1. Schritt:

allgem. Lös. der hom. Dgl. mit charakt. Gl.:

solve($\lambda^2+4\lambda+5=0, \lambda$)

$\{\lambda=-2-i, \lambda=-2+i\}$

$e^{\lambda x}=e^{(-2\pm i)x}=e^{-2\cdot x}(\cos(\pm x)+i\sin(\pm x))=$

$e^{-2\cdot x}\cos(x)\pm i e^{-2\cdot x}\sin(x)$ (Eulerformel!)

Realteil und Imaginärteil sind Basislösungen:

$y1(x)=e^{-2\cdot x}\cos(x)$, $y2(x)=e^{-2\cdot x}\sin(x)$

Zwischenergebnis:

$y\_hom(x)=(\cos(x)\cdot C1+\sin(x)\cdot C2)\cdot e^{-2\cdot x}$

Kontrolle im CAS:

dSolve(y''+4y'+5y=0, x, y)

$\{y=\cos(x)\cdot e^{-2\cdot x}\cdot const(1)+\sin(x)\cdot e^{-2\cdot x}\cdot const(2)\}$

2. Schritt: y_p, inhom(x) mit Ansatz

$yp(x)=a*x^2+b*x+c$, um rechte Seite $5x^2-32x+5$ der Dgl. zu erfassen:

$\frac{d^2}{dx^2}\left(a*x^2+b*x+c\right)+4*\frac{d}{dx}\left(a*x^2+b*x+c\right)+5*(a*x^2+b*x+$

$5\cdot\left(a\cdot x^2+b\cdot x+c\right)+4\cdot(2\cdot a\cdot x+b)+2\cdot a=5\cdot x^2-32\cdot x+5$

collect(ans)

$5\cdot a\cdot x^2+(8\cdot a+5\cdot b)\cdot x+2\cdot a+4\cdot b+5\cdot c=5\cdot x^2-32\cdot x+5$

Koeff.-vergleich:

$\left.\begin{cases}5a=5\\8\cdot a+5\cdot b=-32\\2\cdot a+4\cdot b+5\cdot c=5\end{cases}\right|_{a,b,c}$

$\{a=1, b=-8, c=7\}$

allgem. Lösung:

Define $y(x)=(\cos(x)\cdot C1+\sin(x)\cdot C2)\cdot e^{-2\cdot x}+x^2-8\cdot x+7$

done

AWP: per Hand:

$y(0)=1$

$$C1+7=1$$

$\frac{d}{dx}(y(x))=0|x=0$ and $C1=-6$

$$C2+4=0$$

$C2=-4$

Kontrolle mit dem CAS:

dSolve(y''+4y'+5y=5x^2−32x+5, x, y, x=0, y=1, x=0, y'=0)

$$\{y=-6\cdot\cos(x)\cdot e^{-2\cdot x}-4\cdot\sin(x)\cdot e^{-2\cdot x}+x^2-8\cdot x+7\}$$

Define $y(x)=-(3\cdot\cos(x)+2\cdot\sin(x))\cdot 2e^{-2\cdot x}+x^2-8\cdot x+7$

done

Probe:

$y(0)$

$$1$$

$\frac{d}{dx}(y(x))|x=0$

$$0$$

$\frac{d^2}{dx^2}(y(x))+4\frac{d}{dx}(y(x))+5y(x)=5x^2-32x+5$

$$4\cdot(2\cdot x\cdot e^{2\cdot x}-8\cdot e^{2\cdot x}+8\cdot\cos(x)+14\cdot\sin(x))\cdot e^{-2\cdot x}+(2\cdot e^{2}$$

simplify(ans)

$$5\cdot x^2-32\cdot x+5=5\cdot x^2-32\cdot x+5$$

alternative Lösung: Laplace−Transformation

laplace(y''+4y'+5y=5x^2−32x+5, x, y, s)

$$-s\cdot y(0)-y'(0)+Lp\cdot s^2-4\cdot(y(0)-Lp\cdot s)+5\cdot Lp=\frac{5}{s}-\frac{32}{s^2}+\frac{10}{s^3}$$

ans|y(0)=1 and y'(0)=0

$$Lp\cdot s^2+4\cdot(Lp\cdot s-1)+5\cdot Lp-s=\frac{5}{s}-\frac{32}{s^2}+\frac{10}{s^3}$$

solve(ans, Lp)

$$\left\{Lp=\frac{s^4+4\cdot s^3+5\cdot s^2-32\cdot s+10}{s^3\cdot(s^2+4\cdot s+5)}\right\}$$

$$y=\mathcal{L}_s^{-1}\left(\frac{s^4+4\cdot s^3+5\cdot s^2-32\cdot s+10}{s^3\cdot(s^2+4\cdot s+5)}\right)[x]$$

$$y=-6\cdot\cos(x)\cdot e^{-2\cdot x}-4\cdot\sin(x)\cdot e^{-2\cdot x}+x^2-8\cdot x+7$$

stop

Aufg. 6.1.31

Man gebe die allgemeine Lösung der folgenden Differenzialgleichung an: $y'''-6y''+11y'-6y=0$.

Hinweis: Homogene lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffzienten der Ordnung $n>2$ werden genauso behandelt wie im Fall $n=2$, d.h. es ist die zugehörige charakteristische Gleichung zu lösen.

Lösung:

dSolve(y'''−6y''+11y'−6y=0, x, y)

$$\{y=e^{3\cdot x}\cdot const(3)+e^{2\cdot x}\cdot const(2)+e^{x}\cdot const(1)\}$$

charakteristische Gleichung:

solve($\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0, \lambda$)

$$\{\lambda=1, \lambda=2, \lambda=3\}$$

Define $y(x)=e^{3\cdot x}\cdot C3+e^{2\cdot x}\cdot C2+e^{x}\cdot C1$

done

Probe:

$$\frac{d^3}{dx^3}(y(x))-6\frac{d^2}{dx^2}(y(x))+11\frac{d}{dx}(y(x))-6y(x)=0$$

$$27\cdot C3\cdot e^{3\cdot x}+8\cdot C2\cdot e^{2\cdot x}+C1\cdot e^{x}-6\cdot\left(C3\cdot e^{3\cdot x}+C2\cdot e^{2\cdot x}+C1\cdot\right.$$

simplify(ans)

$$0=0$$

alternative Lösung: Laplace–Transformation

laplace(y'''−6y''+11y'−6y=0, x, y, s)

$$-s^2\cdot y(0)-s\cdot y'(0)-y''(0)+Lp\cdot s^3+6\cdot\left(s\cdot y(0)+y'(0)-Lp\cdot s\right.$$

ans|y(0)=C1 and y'(0)=C2 and y''(0)=C3

$$Lp\cdot s^3-C1\cdot s^2-6\cdot\left(Lp\cdot s^2-C1\cdot s-C2\right)+11\cdot(Lp\cdot s-C1)-C2\cdot s-C$$

solve(ans, Lp)

$$\left\{Lp=\frac{C1\cdot s^2-6\cdot C1\cdot s+C2\cdot s+11\cdot C1-6\cdot C2+C3}{s^3-6\cdot s^2+11\cdot s-6}\right\}$$

$$y=\mathcal{L}_s^{-1}\left(\frac{C1\cdot s^2-6\cdot C1\cdot s+C2\cdot s+11\cdot C1-6\cdot C2+C3}{s^3-6\cdot s^2+11\cdot s-6}\right)[x]$$

$$y=C1\cdot e^{3\cdot x}-\frac{3\cdot C2\cdot e^{3\cdot x}}{2}+\frac{C3\cdot e^{3\cdot x}}{2}-3\cdot C1\cdot e^{2\cdot x}+4\cdot C2\cdot e^{2\cdot x}-$$

$$y=e^{3\cdot x}\cdot\left(C1-\frac{3\cdot C2}{2}+\frac{C3}{2}\right)+e^{2\cdot x}\cdot(-3\cdot C1+4\cdot C2-C3)+e^{x}\cdot(3\cdot$$

$$=e^{3\cdot x}\cdot A+e^{2\cdot x}\cdot B+e^{x}\cdot C$$