SS2018 – 4. Repetitorium – Prof. Paditz

Aufg. 5.1. 3b), 8b), 14c), 18

5.2. 1a), 9b), 15a) **5.3.** 1a)

Aufg. 5.1. 3b)

Welchem allgemeinen Bildungsgesetz unterliegt die folgende Reihe? Untersuchen Sie diese Reihe mit Hilfe des Quotientenkriteriums auf Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\ldots \quad .$$

Lösung: $a_k=\frac{2k-1}{2^k}$, $k=1,2,3,\ldots$

Define $a(k)=\frac{2k-1}{2^k}$

done

seq(a(k), k, 1, 4, 1)

$$\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{5}{8},\frac{7}{16}\right\}$$

Folgen–Editor

$\frac{a(k+1)}{a(k)}$

$$\frac{2\cdot(k+1)-1}{2\cdot(2\cdot k-1)}$$

simplify(ans)

$$\frac{2\cdot k+1}{2\cdot(2\cdot k-1)}$$

$\lim\limits_{k\to\infty}(\text{ans})<1$

$$\frac{1}{2}<1$$

Reihe konvergent!

Zusatz: Berechnung der Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k-1}{2^k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{2^k}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}\right)$$

$$3=3$$

Summe: $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k-1}{2^k}\right)=3.$

1. Anteil der Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{2^k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{2^{k-1}}\right)$$

$$4=4$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(k*\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right)$$

$$4$$

Ableitung (geometrische Reihe)

$$\frac{d}{dx}\left(x^k\right)\Big|x=\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\cdot k$$

integrierte Reihe als geometrische Reihe berechenbar:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(x^k \mid x=\frac{1}{2}\right)=\frac{x}{1-x}\mid x=\frac{1}{2}$$

$$1=1$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right)\mid x=\frac{1}{2}$$

$$4$$

2. Anteil der Reihe:

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}\right)=-\frac{x}{1-x}\mid x=\frac{1}{2}$$

$$-1=-1$$

stop

Aufg. 5.1.8b)

Man bestimme den Konvergenzradius und -bereich der

Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(x+2)^n}{n^5 3^n}\right)$.

Lösung: sei $\frac{x+2}{3}=z$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n * z^n)$, $a_n=\frac{1}{n^5}$,

Define $a(n)=\frac{1}{n^5}$

done

$$\frac{a(n)}{a(n+1)}$$

$$\frac{(n+1)^5}{n^5}$$

$r=\lim_{n\to\infty}(\text{ans})$

$r=1$

$\text{solve}\left(\left|\frac{x+2}{3}\right|<1, x\right)$

$\{-5<x<1\}$

Randpunktuntersuchung:

$\frac{(x+2)^n}{n^5 3^n}|x=-5$

$\frac{(-1)^n}{n^5}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^5}\right)$ konvergent (altern. Reihe)

$\frac{(x+2)^n}{n^5 3^n}|x=1$

$\frac{1}{n^5}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^5}\right)=1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n^5}\right)$ konvergent (Integralkriterium!)

$\frac{1}{n^5}<\frac{1}{(x-1)^5}$ für $2\le n\le x<n+1$

Integral als konvergente Majorante: (Skizze!)

$1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n^5}\right)<1+\int_2^{\infty}\frac{1}{(x-1)^5}dx$

$\frac{5}{4}$

2D–Prinzipskizze!

$\text{approx}\left(\sum_{n=1}^{1000}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)$

1.036927755

Konvergenzbereich $-5 \le x \le 1$.

Aufg. 5.1.14c)

Berechnen Sie durch Potenzreihenentwicklung des Integranden näherungsweise das folgenden Integral (Genauigkeit 4 Dezimalen): $\int_0^1 x*e^{-x^3}dx$.

Lösung:

$$\int_0^1 x*e^{-x^3}dx$$

$$0.3498961639$$

taylor$(x*e^{-x^3}, x, 25, 0)$

$$\frac{x^{25}}{40320}-\frac{x^{22}}{5040}+\frac{x^{19}}{720}-\frac{x^{16}}{120}+\frac{x^{13}}{24}-\frac{x^{10}}{6}+\frac{x^{7}}{2}-x^4+x$$

$$\int_0^1 \frac{x^{25}}{40320}-\frac{x^{22}}{5040}+\frac{x^{19}}{720}-\frac{x^{16}}{120}+\frac{x^{13}}{24}-\frac{x^{10}}{6}+\frac{x^{7}}{2}-x^4+x dx$$

$$\frac{1126871947}{3220588800}$$

approx(ans)

$$0.349896251$$

Aufg. 5.1.18

Man skizziere die periodische Fortsetzung der folgenden Funktionen und bestimme deren Fourier-Reihe:

a)

f(x)=piecewise(0≤x<1, 1-x, piecewise(-1≤x<0, 1+x, 1/0)) ▶

abs(x), -1≤x<1.

b) f(x)=piecewise(-1<x<1,

abs(x), piecewise(x=1, 0, 1/0))

(piecewise(□)-Funktion: stückweise definieren)

Lösung:

a) Dreieckimpuls

f(x) ist überall stetig und gerade Funktion,

$T=2$, $\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$, $b_k=0$ $\forall k=1,2,3,...$

bei gerader Funktion Symmetrieeigenschaft nutzen

statt $-1<x<1$ nur $0<x<1$ nutzen und Integral verdoppeln:

$$\int_{-1}^{1}(1-|x|)\cos(k\pi x)dx=2*\int_{0}^{1}(1-x)\cos(k\pi x)dx$$

Define $a(k)=2*\int_{0}^{1}(1-x)\cos(k\pi x)dx$

done

a(0)

1

a(k)

$$\frac{-2\cdot(\cos(k\cdot\pi)-1)}{k^2\cdot\pi^2}$$

Define $a(k)=\frac{-2\cdot\left((-1)^k-1\right)}{k^2\cdot\pi^2}$

done

$a(k)=0$, $k>0$ gerade, $k=2m-1$

Define $a(m)=\frac{-2\cdot(-1-1)}{(2m-1)^2\cdot\pi^2}$

done

Define $y1(x)=\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{6}(a(m)\cos((2m-1)\pi x))$

done

y1(x)

$$\frac{4\cdot\cos(x\cdot\pi)}{\pi^2}+\frac{4\cdot\cos(11\cdot x\cdot\pi)}{121\cdot\pi^2}+\frac{4\cdot\cos(9\cdot x\cdot\pi)}{81\cdot\pi^2}+\frac{4\cdot\cos(7\cdot x\cdot\pi)}{49\cdot\pi^2}$$

ein Impuls: von −1 bis 1

$(H(x+1)-H(x-1))$ öffnet ein Fenster von −1 bis 1

(ansonsten ist $y2(x)=0$)

Define $y2(x)=(H(x+1)-H(x-1))(1-|x|)$

done

2D−Grafk

Ergebnis:

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2m-1)^2}\cos((2m-1)\pi x)\right)$$

stop

b) **Dreiecksimpuls mit Unstetigkeitsstelle**

und gerade Funktion,

$T=2,\ \omega=\frac{2\pi}{T}=\pi,\ b_k=0\ \forall k=1,2,3,...$

Lösung aus a) mit $-f(x)+1=-(1-|x|)+1=|x|$

Ergebnis:

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2m-1)^2}\cos((2m-1)\pi x)\right)$$

in allen Stetigkeitsstellen $x\neq\pm1,\pm3,\pm5,...$

$f(x)=0$ in den Unstetigkeitsstellen $x=\pm1,\pm3,\pm5,...$

jedoch

$$\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2m-1)^2}\cos((2m-1)\pi x)\right)=1 \text{ für}$$

$x=\pm1,\pm3,\pm5,...$

Define $y3(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{6}\left(\frac{1}{(2m-1)^2}\cos((2m-1)\pi x)\right)$

done

y3(x)

$$\frac{1}{2}-\frac{4\cdot\left(\frac{\cos(3\cdot x\cdot\pi)}{9}+\frac{\cos(5\cdot x\cdot\pi)}{25}+\frac{\cos(7\cdot x\cdot\pi)}{49}+\frac{\cos(9\cdot x\cdot\pi)}{81}\right.}{\pi^2}$$

expand(ans)

$$\frac{1}{2}-\frac{4\cdot\cos(3\cdot x\cdot\pi)}{9\cdot\pi^2}-\frac{4\cdot\cos(5\cdot x\cdot\pi)}{25\cdot\pi^2}-\frac{4\cdot\cos(7\cdot x\cdot\pi)}{49\cdot\pi^2}-\frac{4\cdot\cos(9\cdot}{81\cdot\pi}$$

Define $y4(x)=(H(x+1)-H(x-1))|x|$

done

2D-Grafik Y1:… Y2:…

Aufg. 5.2. 1a)

von reellem Modus auf komplexen Modus umstellen!

Man berechne $\frac{2-4i}{5+7i}$

Lösung:

$\frac{2-4i}{5+7i}$

$$-\frac{9}{37}-\frac{17\cdot i}{37}$$

Zwischenschritt:

$\frac{(2-4i)(5-7i)}{(5+7i)(5-7i)}$

$$-\frac{9}{37}-\frac{17\cdot i}{37}$$

Aufg. 5.2. 9b)

Berechnen Sie $\sqrt[3]{3-\sqrt{3}\,i}$.

Lösung: Hauptwurzel

Die Wurzeln haben den Winkelabstand $\frac{360°}{n}=120°=\frac{2\pi}{3}$,

d.h. $z_1=z_0 e^{i2\pi/3}$, $z_2=z_1 e^{i2\pi/3}$ (Skizze!)

cExpand($\sqrt[3]{3-\sqrt{3}\,i}$)

$$3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)-3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\cdot i$$

compToPol(ans)

$$3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot e^{\pi\cdot\frac{-i}{18}}$$

$z_0:=3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot e^{\pi\cdot\frac{-i}{18}}$

$$3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot e^{\frac{-\pi\cdot i}{18}}$$

compToPol($z_0 e^{i2\pi/3}$)

$$3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot e^{\frac{\pi\cdot 11\cdot i}{18}}$$

$z_1:=3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot e^{\frac{\pi\cdot 11\cdot i}{18}}$

$$3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot e^{\frac{11\cdot\pi\cdot i}{18}}$$

compToPol($z_0 e^{i2*2\pi/3}$)

$$3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot e^{\pi\cdot\frac{-13\cdot i}{18}}$$

$z_2:=3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot e^{\pi\cdot\frac{-13\cdot i}{18}}$

$$3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot e^{\frac{-13\cdot\pi\cdot i}{18}}$$

solve$(z^3=3-\sqrt{3}\,i, z)$

$$\left\{z=\frac{-(3-\sqrt{3}\cdot i)^{\frac{1}{3}}\cdot(1-\sqrt{3}\cdot i)}{2}, z=\frac{-(3-\sqrt{3}\cdot i)^{\frac{1}{3}}\cdot(1+\sqrt{3}\cdot i)}{2}\right.$$

compToPol(ans)

$$\left\{z=3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot e^{\frac{\pi\cdot 11\cdot i}{18}}, z=3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot e^{\pi\cdot\frac{-13\cdot i}{18}}, z=3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot e\right.$$

$\{z_0, z_1, z_2\}$

$$\left\{3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot e^{\frac{-\pi\cdot i}{18}}, 3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot e^{\frac{11\cdot\pi\cdot i}{18}}, 3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot e^{\frac{-13\cdot\pi\cdot i}{18}}\right\}$$

approx(ans)⇒zliste

$\{1.490098577-0.262744583\cdot i, -0.5175058049+1.42$

approx(listToMat(ans))

$$\begin{bmatrix}1.490098577-0.262744583\cdot i\\ -0.5175058049+1.421835513\cdot i\\ -0.9725927721-1.15909093\cdot i\end{bmatrix}$$

approx(re(zliste))⇒rezliste

$\{1.490098577, -0.5175058049, -0.9725927721\}$

approx(im(zliste))⇒imzliste

$\{-0.262744583, 1.421835513, -1.15909093\}$

statistische Grafik

stop

Aufg. 5.2. 15a)

Man prüfe, ob $1+i$ eine Lösung der folgenden Gleichung ist und gebe gegebenenfalls die anderen Lösungen dieser Gleichung an: $z^4-5z^2+10z-6=0$.

Lösung:

solve$(z^4-5z^2+10z-6=0, z)$

$\{z=-3, z=1, z=1-i, z=1+i\}$

rFactor$(z^4-5z^2+10z-6)$

$(z+3)\cdot(z-1)\cdot(z-1+i)\cdot(z-1-i)$

reelles Polynom, d.h. mit $1+i$ ist auch $1-i$ eine Nst.

$z^4-5z^2+10z-6 \mid z=1+i$

0

$z^4-5z^2+10z-6 \mid z=1-i$

0

Das Polynom enthält die Linearfaktoren $z-(1+i)$ und $z-(1-i)$

$(z-(1+i))(z-(1-i))$

$(z-1+i)\cdot(z-1-i)$

expand(ans)

$z^2-2\cdot z+2$

$$\frac{z^4-5z^2+10z-6}{z^2-2\cdot z+2}$$

$$\frac{z^4-5\cdot z^2+10\cdot z-6}{z^2-2\cdot z+2}$$

simplify(ans)

$(z+3)\cdot(z-1)$

expand(ans)

$z^2+2\cdot z-3$

solve$(z^2+2\cdot z-3=0, z)$

$\{z=-3, z=1\}$

Aufg. 5.3. 1a)

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen

Eigenvektoren der folgenden Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Lösung:

$A:=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Eigenwerte: eigVl(...)

eigVl(A)

$$\{3,-1\}$$

Eigenvektoren: eigVc(...), normiert

eigVc(A)

$$\begin{bmatrix} 0.7071067812 & -0.7071067812 \\ 0.7071067812 & 0.7071067812 \end{bmatrix}$$

$\det(A-\lambda*\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})=0$

$$\lambda^2-2\cdot\lambda-3=0$$

solve(ans, λ)

$$\{\lambda=-1,\lambda=3\}$$

Austauschverfahren:

augment$(A-\lambda*\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})\Rightarrow ST$

$$\begin{bmatrix} -\lambda+1 & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda+1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Schritt: x in Zeile 2

LinEqSys(ST, 2, 1)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} \frac{-(\lambda+1)\cdot(\lambda-3)}{2} & 0 \\ \frac{\lambda-1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Endtabelle T1 für $\{\lambda=-1, \lambda=3\}$

$$\begin{bmatrix} ET & y & 1 \\ y_1 & 0 & 0 \\ x & \frac{\lambda-1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

EV: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda-1}{2}*t \\ t \end{bmatrix}$, $t\in\mathbf{R}$, $t\neq 0$.

norm$\left(\begin{bmatrix} \frac{\lambda-1}{2}*t \\ t \end{bmatrix}\right)$

$$\frac{\sqrt{t^2\cdot(\lambda^2-2\cdot\lambda+5)}}{2}$$

$\begin{bmatrix} \frac{\lambda-1}{2}*t \\ t \end{bmatrix}$/ans

$$\begin{bmatrix} \frac{t\cdot(\lambda-1)}{\sqrt{t^2\cdot(\lambda^2-2\cdot\lambda+5)}} \\ \frac{2\cdot t}{\sqrt{t^2\cdot(\lambda^2-2\cdot\lambda+5)}} \end{bmatrix}$$

simplify(ans|t>0)

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda-1}{\sqrt{\lambda^2-2\cdot\lambda+5}} \\ \frac{2}{\sqrt{\lambda^2-2\cdot\lambda+5}} \end{bmatrix}$$

EV:

$$v_1 := \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda-1}{\sqrt{\lambda^2-2\cdot\lambda+5}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{\lambda^2-2\cdot\lambda+5}} \end{bmatrix} \mid \lambda=3$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$v_2 := \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda-1}{\sqrt{\lambda^2-2\cdot\lambda+5}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{\lambda^2-2\cdot\lambda+5}} \end{bmatrix} \mid \lambda=-1$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

augment(v_1, v_2)

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Zusatz: Diagonalisierung von **A** mithilfe der EV

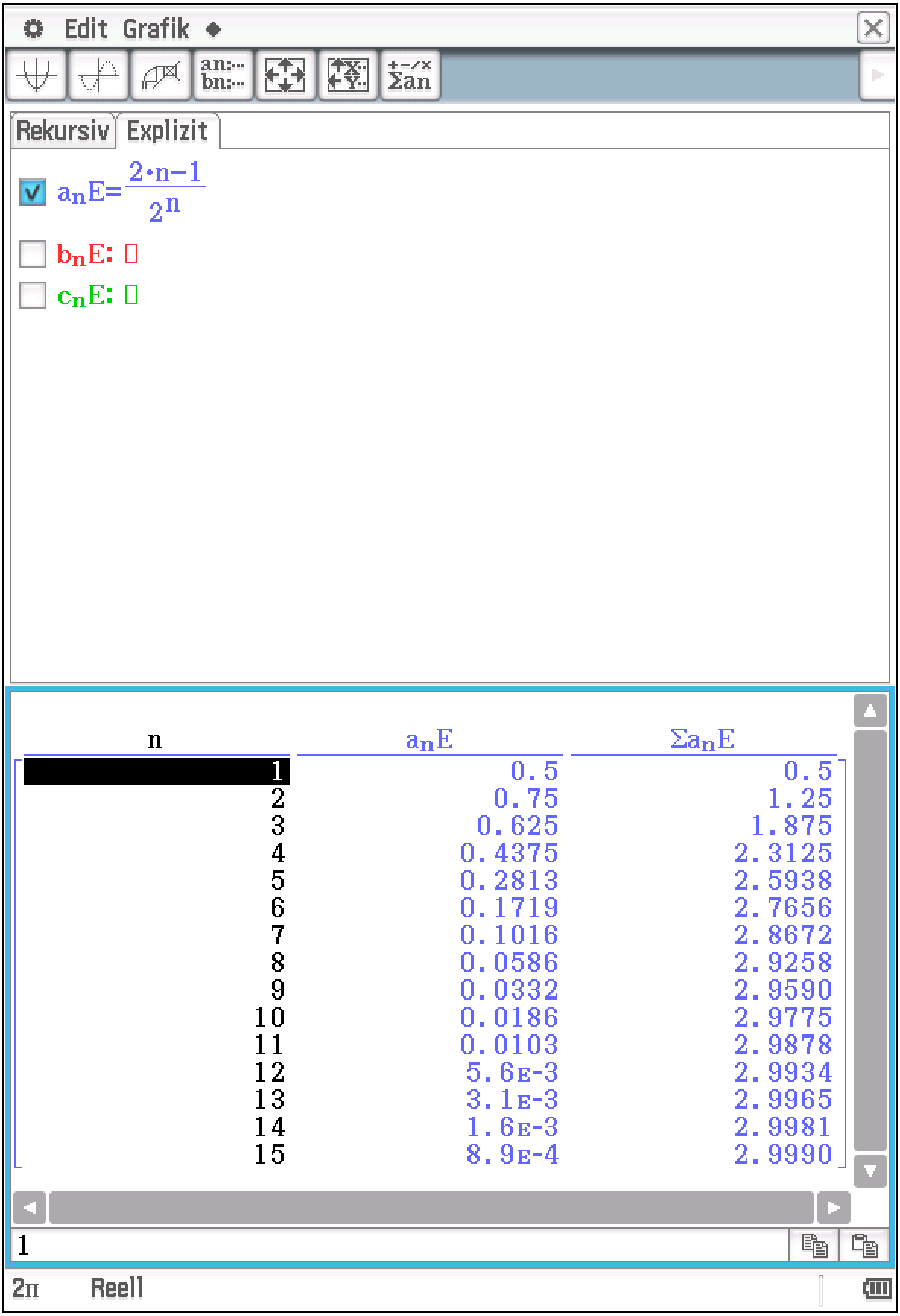
$$\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^{-1} * A * \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Auf der Hauptdiagonalen erscheinen die EW.

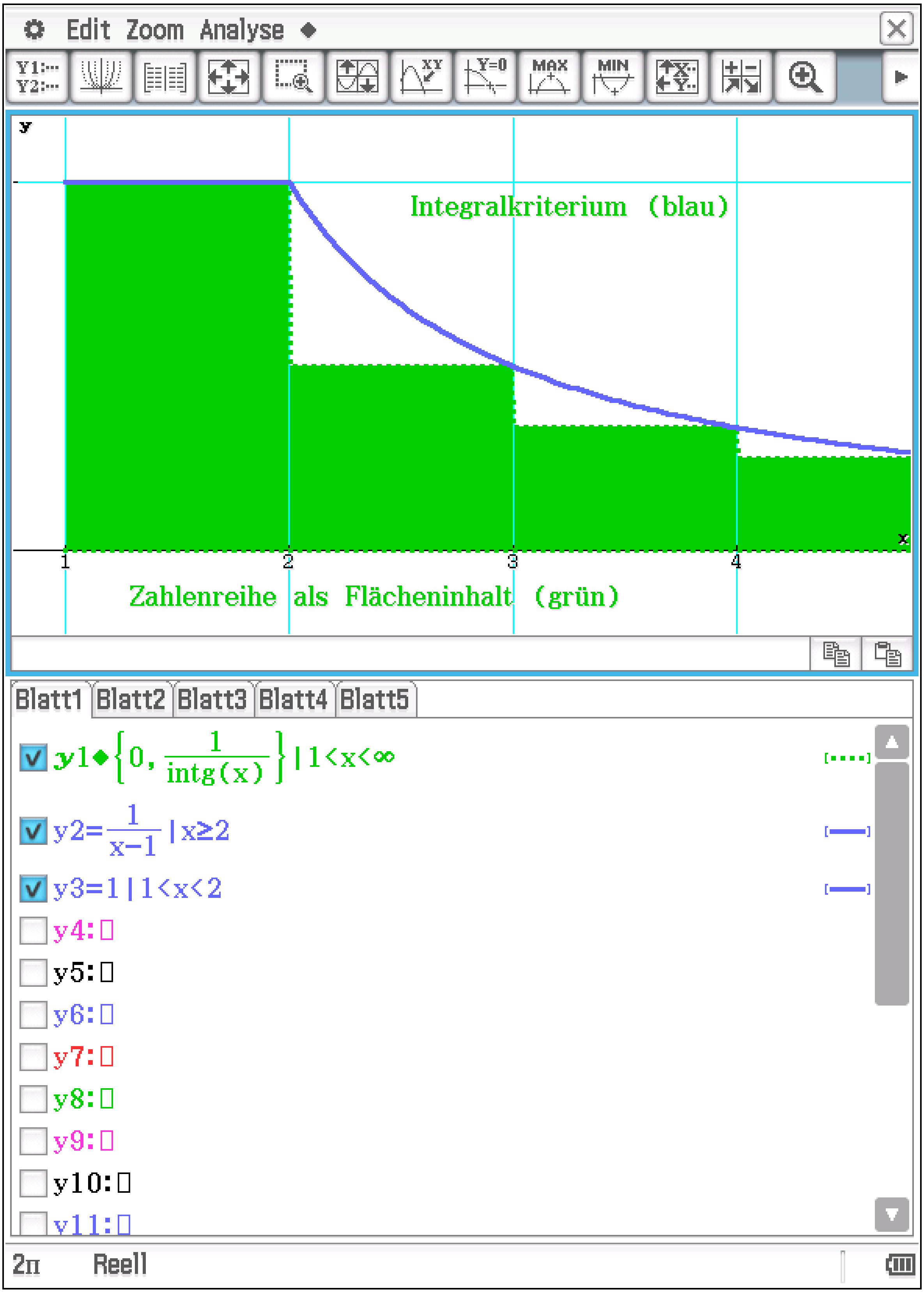
Aufg. 5.1.3b)

Summe:

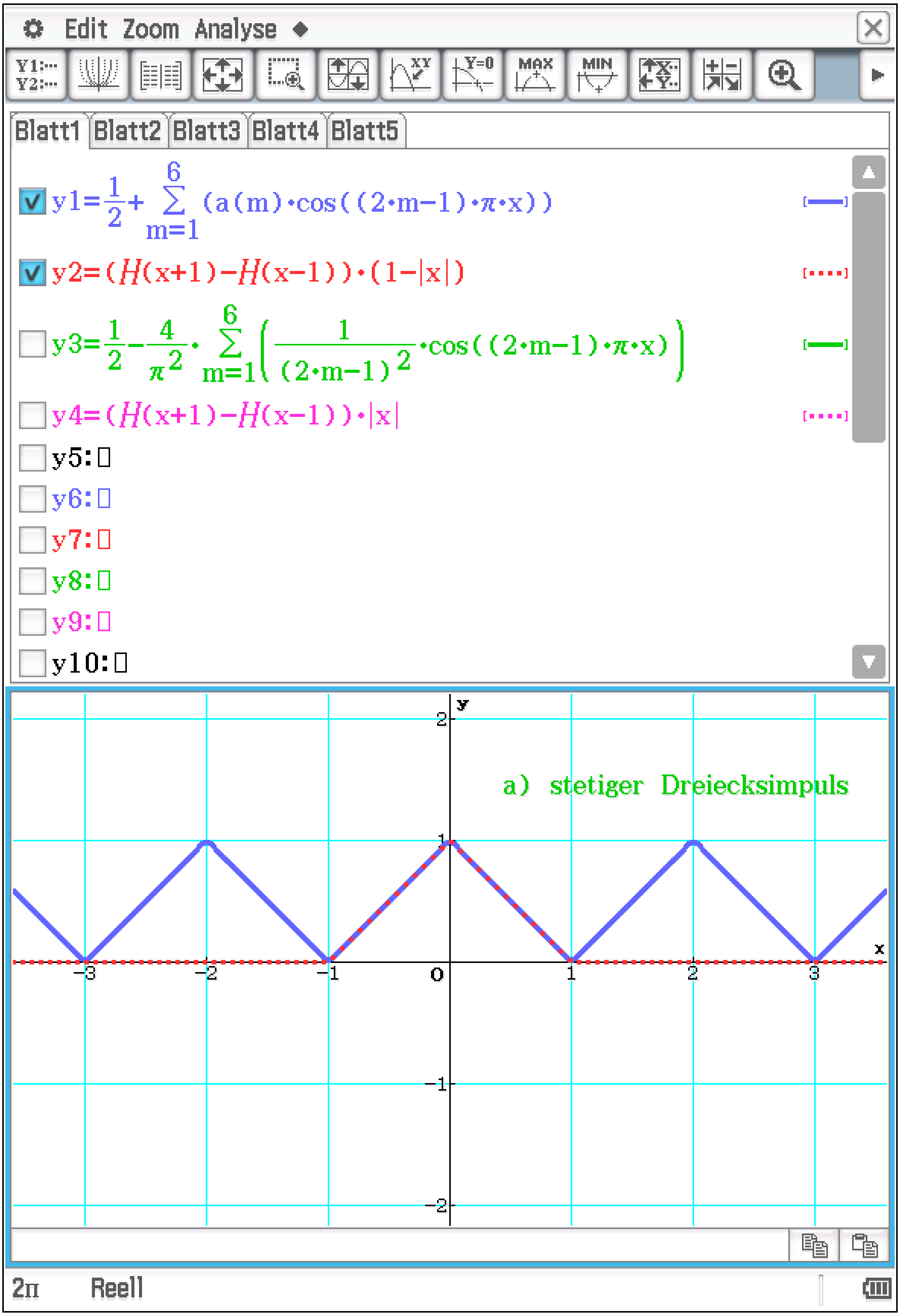


n	a_nE	Σa_nE
1	0.5	0.5
2	0.75	1.25
3	0.625	1.875
4	0.4375	2.3125
5	0.2813	2.5938
6	0.1719	2.7656
7	0.1016	2.8672
8	0.0586	2.9258
9	0.0332	2.9590
10	0.0186	2.9775
11	0.0103	2.9878
12	5.6E-3	2.9934
13	3.1E-3	2.9965
14	1.6E-3	2.9981
15	8.9E-4	2.9990

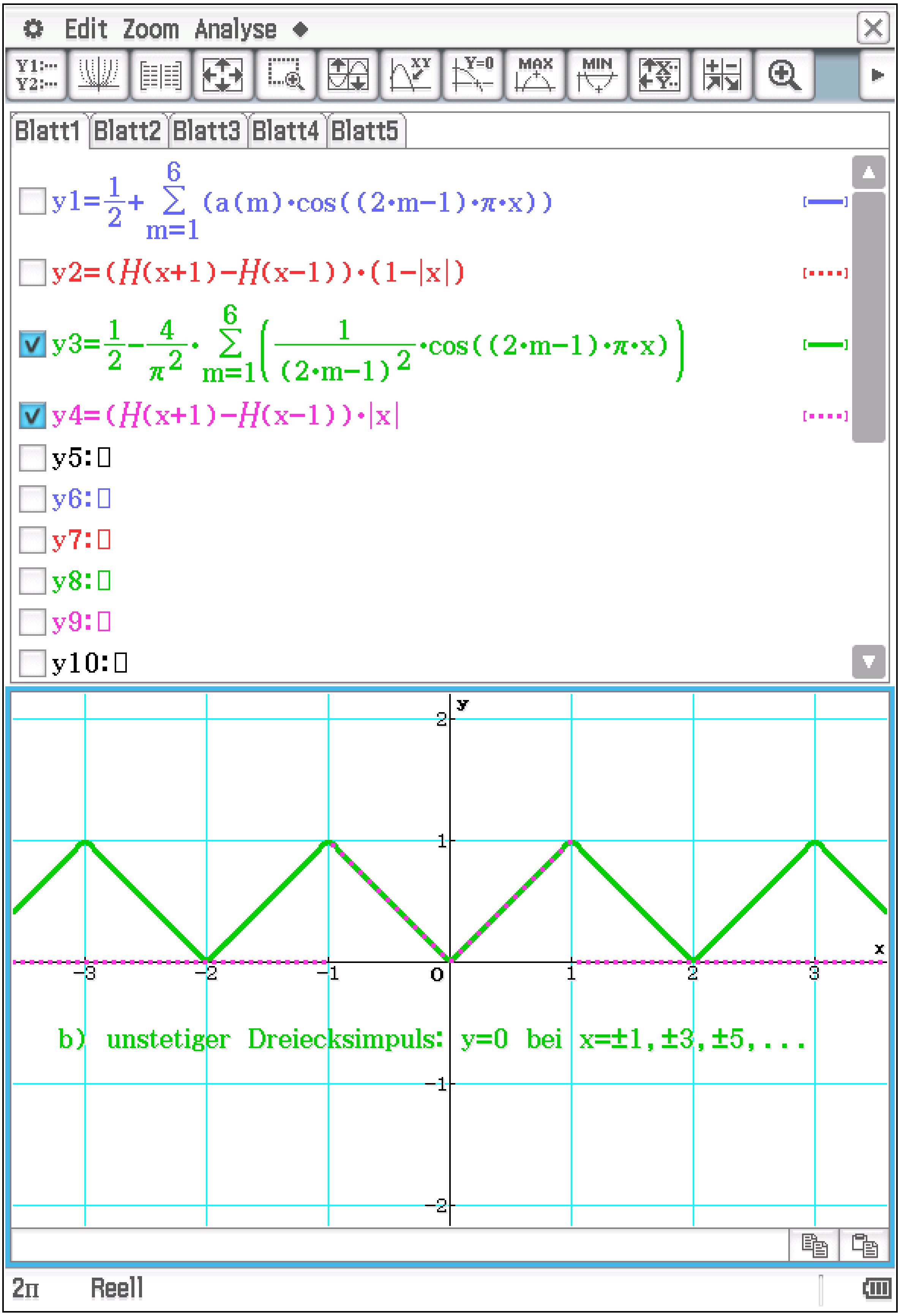
Aufg. 5.1.8b) zur Randpunktuntersuchung bei x=1



Aufg. 5.1.18a)


Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
y1=1/2+ Σ_{m=1}^{6} (a(m)·cos((2·m−1)·π·x))
y2=(H(x+1)−H(x−1))·(1−|x|)
y3=1/2−4/π^2· Σ_{m=1}^{6} (1/(2·m−1)^2 ·cos((2·m−1)·π·x))
y4=(H(x+1)−H(x−1))·|x|
y5:
y6:
y7:
y8:
y9:
y10:
a) stetiger Dreiecksimpuls
2π Reell

Aufg. 5.1. 18b) f(x)=0 für x=…,-5,-3,-1,1,1,5,… (Unstetigkeitsstellen)



Aufg. 5.2.9b)   Haupt- und Nebenwurzeln (gleicher Winkelabstand)