SS2018 - 3. Repetitorium - Prof. Paditz

Aufg. 4.3. 1e), 4c), 13a), 19b), 24

4.4. 6, 15c), 19c)

Aufg. 4.3. 1e)

Bestimmen Sie die Lage und Art aller relativen Extrema

der Funktion und geben Sie die zugehörigen

Funktionswerte an:

$z=f(x,y)=(x^3-3x)(y+3)+y(y+6).$

Lösung: Fläche 4. Ordnung

DelVar x, y, c

done

Define $f(x,y)=(x^3-3x)(y+3)+y*(y+6)$

done

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(f(x,y))=0 \\ \frac{d}{dy}(f(x,y))=0 \end{cases}\Bigg|_{x,y}$$

$\{\{x=-1,y=-4\},\{x=0,y=-3\},\{x=1,y=-2\},\{x=-\sqrt{3},y=-$ ▶

$$\text{Define } D(x,y)=\det\left(\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx^2}(f(x,y)) & \frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}(f(x,y))\right. \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}(f(x,y))\right) & \frac{d^2}{dy^2}(f(x,y)) \end{bmatrix}\right.$$

done

$D(x,y)|\{x=-1,y=-4\}$

12

$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))|\{x=-1,y=-4\}$

6

$f(x,y)|\{x=-1,y=-4\}$

-10

Min(x=-1, y=-4, z=-10)

==================

$D(x,y)|\{x=0,y=-3\}$

-9

$f(x,y)|\{x=0,y=-3\}$

-9

Sattelpunkt(x=0, y=-3, z=-9)

==================

$D(x,y)|\{x=1,y=-2\}$

12

$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))|\{x=1,y=-2\}$

6

$f(x,y)|\{x=1,y=-2\}$

-10

Min(x=1, y=-2, z=-10)

==================

$D(x,y)|\{x=-\sqrt{3}, y=-3\}$

$$-36$$

$f(x,y)|\{x=-\sqrt{3}, y=-3\}$

$$-9$$

Sattelpunkt $(x=-\sqrt{3}, y=-3, z=-9)$

==================

$D(x,y)|\{x=\sqrt{3}, y=-3\}$

$$-36$$

$f(x,y)|\{x=\sqrt{3}, y=-3\}$

$$-9$$

Sattelpunkt $(x=\sqrt{3}, y=-3, z=-9)$

==================

Karte(Höhenlinien)

$f(x,y)=c$

$$\left(x^3-3\cdot x\right)\cdot(y+3)+y\cdot(y+6)=c$$

solve(ans, y)

$$\left\{y=\frac{-\left(x^3-\sqrt{x^6-6\cdot x^4+9\cdot x^2+4\cdot c+36}-3\cdot x+6\right)}{2}, y=\frac{-\left(x^3+\sqrt{x\right.}}{}\right.$$

seq(c, c, −10, 10, 1)⇒c

$$\{-10,-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6$$

Define $y1(x)=\frac{-\left(x^3-\sqrt{x^6-6\cdot x^4+9\cdot x^2+4\cdot c+36}-3\cdot x+6\right)}{2}$

done

Define $y2(x)=\frac{-\left(x^3+\sqrt{x^6-6\cdot x^4+9\cdot x^2+4\cdot c+36}-3\cdot x+6\right)}{2}$

done

2D−Grafik (Karte)

Define z1(x,y)=f(x,y)

done

3D−Grafik

stop

Aufg. 4.3.4c)

Nach der Multiplikatorenregel von Lagrange bestimme man alle Punkte, die als Extremstellen für die gegebene Funktion $z=f(x,y)=3x^2y$ unter der Nebenbedingung $4x^2+9y^2=36$ in Frage kommen.

Lösung: Fläche 3.Ordnung mit NB: elliptischer Zylinder

Define $F(x,y,\lambda)=3x^2y+\lambda*(4x^2+9y^2-36)$

done

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{d}{dx}(F(x,y,\lambda))=0\\ \frac{d}{dy}(F(x,y,\lambda))=0\\ \frac{d}{d\lambda}(F(x,y,\lambda))=0\end{array}\right|_{x,y,\lambda}$$

$$\left\{\{x=0,y=-2,\lambda=0\},\{x=0,y=2,\lambda=0\},\left\{x=-\sqrt{6},y=\frac{-2\cdot\sqrt{3}}{3},\right.\right.$$

Es gibt 6 extremwertverdächtige Stellen:

$\{x=0,y=-2,\lambda=0\}$, $z=0$

$\{x=0,y=2,\lambda=0\}$, $z=0$

$\left\{x=-\sqrt{6},y=\frac{-2\cdot\sqrt{3}}{3},\lambda=\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, $z=-12\cdot\sqrt{3}$

$$\left\{x=-\sqrt{6}, y=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}, \lambda=\frac{-\sqrt{3}}{2}\right\}, \quad z=12\cdot\sqrt{3}$$

$$\left\{x=\sqrt{6}, y=\frac{-2\cdot\sqrt{3}}{3}, \lambda=\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}, \quad z=-12\cdot\sqrt{3}$$

$$\left\{x=\sqrt{6}, y=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}, \lambda=\frac{-\sqrt{3}}{2}\right\}, \quad z=12\cdot\sqrt{3}$$

Define $f(x,y)=3x^2y$

done

$$f(x,y) \mid \left\{x=-\sqrt{6}, y=\frac{-2\cdot\sqrt{3}}{3}\right\}$$

$-12\cdot\sqrt{3}$

$$f(x,y) \mid \left\{x=-\sqrt{6}, y=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right\}$$

$12\cdot\sqrt{3}$

NB: $4x^2+9y^2=36$

Define xst1(s,t)=3cos(t)

done

Define yst1(s,t)=2sin(t)

done

Define zst1(s,t)=s−30

done

Zielfunktion: $z=3x^2y$ mit $0\le s\le 60$, $-\pi\le t\le\pi$.

Define xst2(s,t)=s*cos(t)

done

Define yst2(s,t)=s*sin(t)

done

Define $zst2(s,t)=3s^3*(\cos(t))^2*\sin(t)$

done

3D-Grafik Fläche mit NB	Z1:… Z2:…

Abtasten der Schnittkurve:

$0.99 \le s \le 1.01, \ -\pi \le t \le \pi$:

Define $xst3(s,t)=3s*\cos(t)$

done

Define $yst3(s,t)=2s*\sin(t)$

done

Define $zst3(s,t)=3s^3*(3\cos(t))^2*2\sin(t)$

done

3D-Grafik Schnittkurve	Z1:… Z2:…

Aufg. 4.3.13a)

Die absoluten Extrema von $z=f(x,y)=x^2+xy+y^2-2x-\frac{5}{2}y$

sind in folgendem Dreieck zu bestimmen:

$C=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid -1\le x<1 \text{ und } 0<y<x+1\}$

Lösung: Eckpunkte des Dreicks

$A(-1,0), \ B(1,0), \ C(1,2)$

Define $f(x,y)=x^2+x*y+y^2-2x-\frac{5}{2}y$

done

Parameterdarstellung des Dreiecks:

$-1\le s<1, \ 0<t<s+1<2$

Define $xst2(s,t)=s$

done

Define $yst2(s,t)=\frac{t\cdot(\text{signum}(s+1-t)+1)}{2}$

done

Define zst2(s, t)=0

done

Die Fläche über dem Dreieck:

Define xst1(s, t)=s

done

$$\text{Define yst1}(s,t)=\frac{t\cdot(\text{signum}(s+1-t)+1)}{2}$$

done

$$\text{Define zst1}(s,t)=f\left(s,\frac{t\cdot(\text{signum}(s+1-t)+1)}{2}\right)$$

done

3D−Grafik Z1:… Z2:…

Randmaximum in A(−1, 0) entfällt wegen y>0

f(−1, 0)

3

Randmaximum in C(1, 2) entfällt wegen y<2

f(1, 2)

0

in B offenbar kein lokaler Extremwert (vgl. Skizze)

globales Minimum innerhalb des Dreiecks:

$$\textbf{Min}\left(x=\frac{1}{2}, y=1, z=-\frac{7}{4}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{d}{dx}(f(x,y))=0\\ \frac{d}{dy}(f(x,y))=0\end{array}\right|_{x,y}$$

$$\left\{x=\frac{1}{2}, y=1\right\}$$

$$f(x,y)\mid\left\{x=\frac{1}{2}, y=1\right\}$$

$$-\frac{7}{4}$$

Define $D(x,y)=\det\left(\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx^2}(f(x,y)) & \frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}(f(x,y))\right) \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}(f(x,y))\right) & \frac{d^2}{dy^2}(f(x,y)) \end{bmatrix}\right.$ ▶

done

$D(x,y)\mid\left\{x=\frac{1}{2},y=1\right\}$

3

$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))\mid\left\{x=\frac{1}{2},y=1\right\}$

2

stop

Aufg. 4.3.19b), vgl. 5.Übung

Aufg. 4.3.24

Es soll die Dichte ρ einer Substanz ermittelt werden. Dazu wurden zu verschiedenen Volumen die zugehörigen Massen gemessen und folgende Tabelle erhalten:

m[g]	10	12	14	16	18	20
V[cm^3]	2,0	2,3	2,9	3,2	3,5	4,1

Mit der Methode der kleinsten Quadrate bestimme man hieraus ρ (2 Dezimalen).

Lösung:

m=m(ρ, V)

seq(m, m, 10, 20, 2)⇒mliste

{10, 12, 14, 16, 18, 20}

approx({2, 2.3, 2.9, 3.2, 3.5, 4.1})⇒Vliste

{2, 2.3, 2.9, 3.2, 3.5, 4.1}

approx(mliste/Vliste)⇒ρliste

{5, 5.217391304, 4.827586207, 5, 5.142857143, 4.87▶

sum((mliste−ρ*Vliste)^2)

$$\left(\frac{41\cdot\rho}{10}-20\right)^2+\left(\frac{7\cdot\rho}{2}-18\right)^2+\left(\frac{16\cdot\rho}{5}-16\right)^2+\left(\frac{29\cdot\rho}{10}-14\right)^2+\left(\right.$$ ▶

Define $F(\rho)=\left(\frac{41\cdot\rho}{10}-20\right)^2+\left(\frac{7\cdot\rho}{2}-18\right)^2+\left(\frac{16\cdot\rho}{5}-16\right)^2+\left(\right.$ ▶

done

$\frac{d}{d\rho}(F(\rho))=0$

$$\frac{570\cdot\rho-2844}{5}=0$$

solve(ans, ρ)

$$\left\{\rho=\frac{474}{95}\right\}$$

approx(ans)

{ρ=4.989473684}

optimale Parameterschätzung ρ≈4.99

zum Vergleich die Mittelwertschätzung:

approx(mean(ρliste))

5.010980572

Aufg. 4.4.6

Berechnen Sie mittels Doppelintegral das Volumen des Körpers, der durch die folgenden Flächen begrenzt wird:

$z=0;\ z=1;\ x^2+y^2=4.$

Um welche Art Körper handelt es sich?

Lösung: Kreiszylinder (Radius r=2, Höhe h=1)

elementar $V=\pi r^2 h=4\pi$

in Polarkoordinaten:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{2} 1*r\,dr\,d\varphi$$

$$V=4\cdot\pi$$

in kartes. Koordinaten:

$$V=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 1\,dy\,dx$$

$$V=4\cdot\pi$$

Aufg. 4.4. 15c)

Man berechne das Linienintegral $\int_C (xydx+y^2dy)$ für

folgende Kurve C:

die direkte Verbindungsstrecke von den Punkten

A=(0,1) nach B=(1,0).

Lösung: C: $y=1-x$, $0\le x\le 1$.

$$\int_C (xydx+y^2dy)=\int_C (x(t)y(t)dx/dt+y(t)^2dy/dt)dt$$

Define x(t)=t

done

Define y(t)=1−t

done

$$\int_0^1 (x(t)*y(t)*\frac{d}{dt}(x(t))+(y(t))^2*\frac{d}{dt}(y(t)))dt$$

$$-\frac{1}{6}$$

Bem.: kein vollst. Differenzial

DelVar x,y

done

$$\frac{d}{dy}(x*y)\neq\frac{d}{dx}(y^2)$$

$$x\neq 0$$

Aufg. 4.4.19c)

Ein Massenpunkt bewege sich entlang der Kurve:

x=sin(t); y=1−cos(t); $0\leq t\leq \pi/2$ in dem ebenen Kraftfeld

F$=2xy\mathbf{e}_1+x^2\mathbf{e}_2$.

Man berechne die verrichtete Arbeit bei der Verschiebung eines Massenpunktes von $P_1=(0,0)$ nach $P_2=(1,1)$ auf einem (beliebigen) Verbindungsweg.

Lösung: vollständiges Differenzial

$$\frac{d}{dy}(2x*y)=\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$2\cdot x=2\cdot x$$

Stammfunktion (Potenzial):

$$\int 2x*y dx+C(y)$$

$$C(y)+x^2\cdot y$$

$$\frac{d}{dy}(ans)=x^2$$

$$\frac{d}{dy}(C(y))+x^2=x^2$$

Somit $\frac{d}{dy}(C(y))=0$

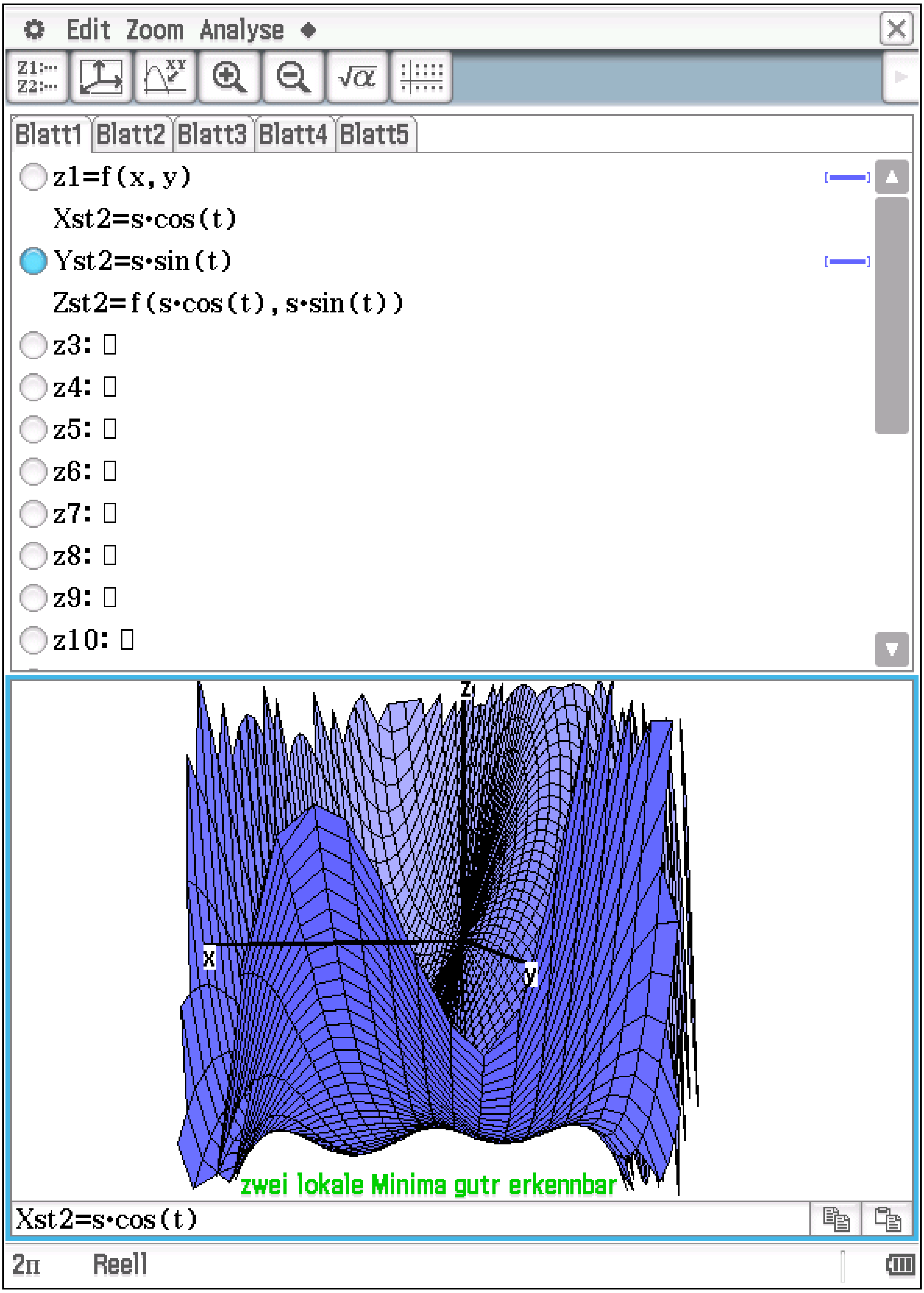
Define $F(x,y)=x^2\cdot y+C$

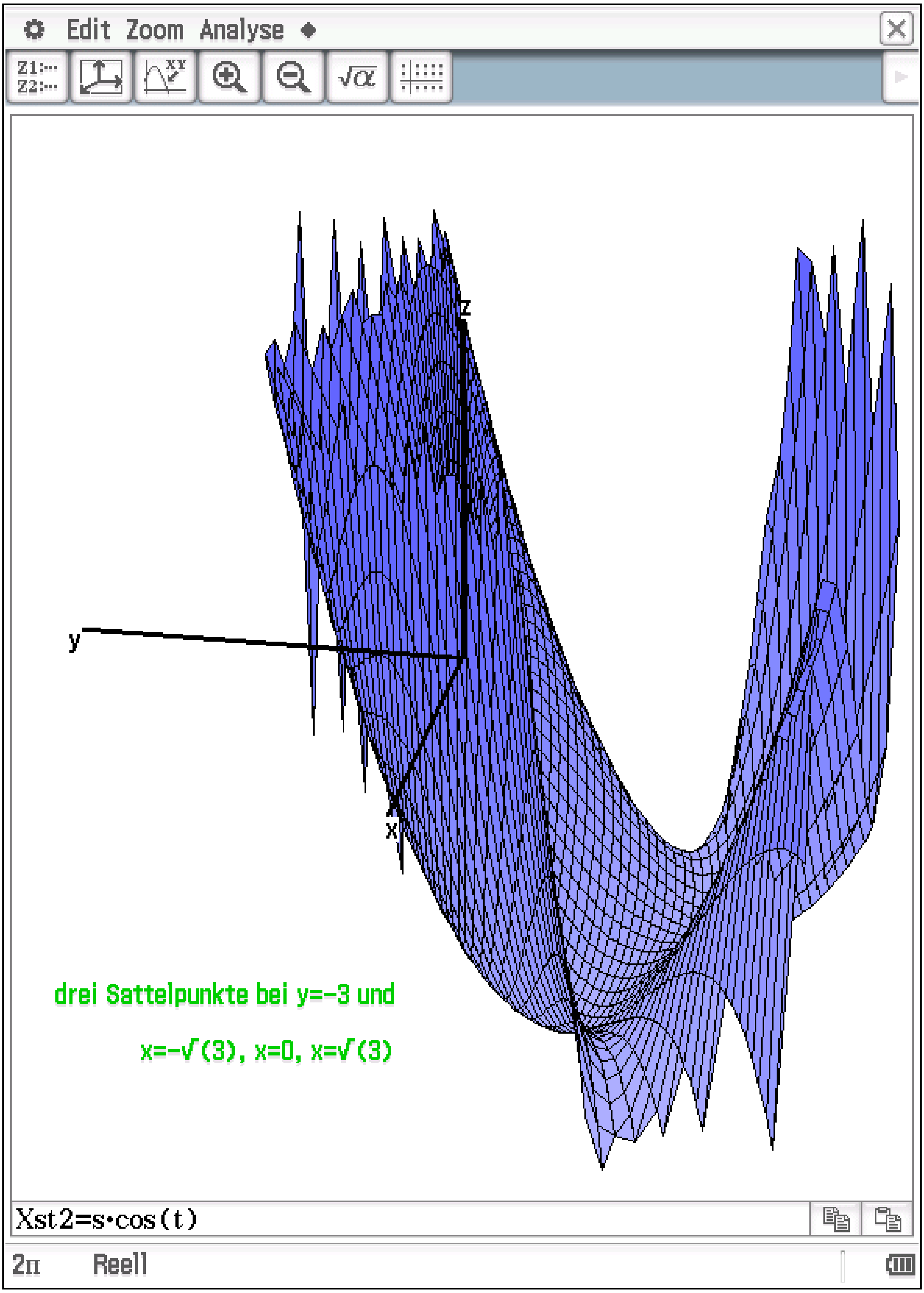
done

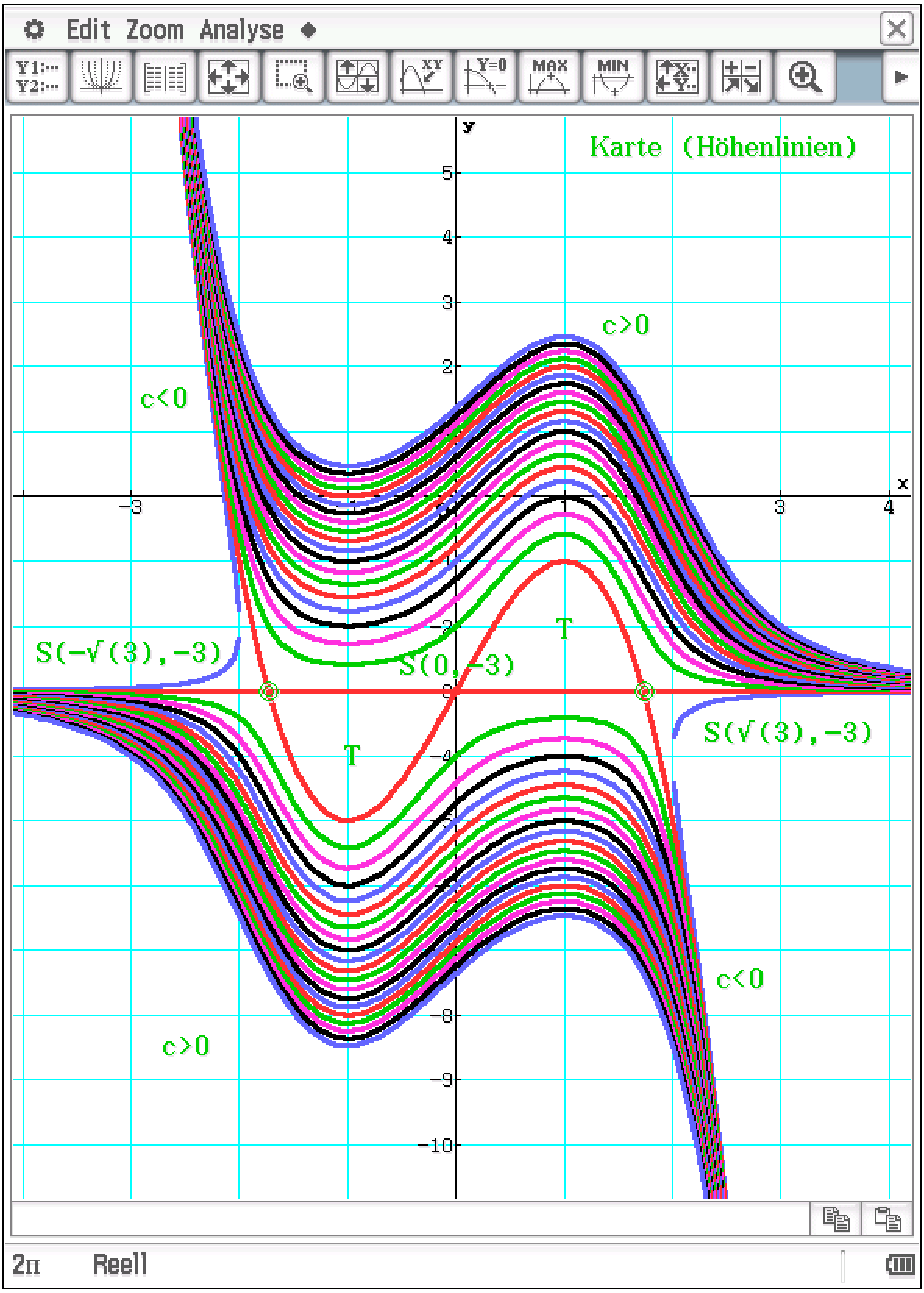
$F(1,1)-F(0,0)$

1

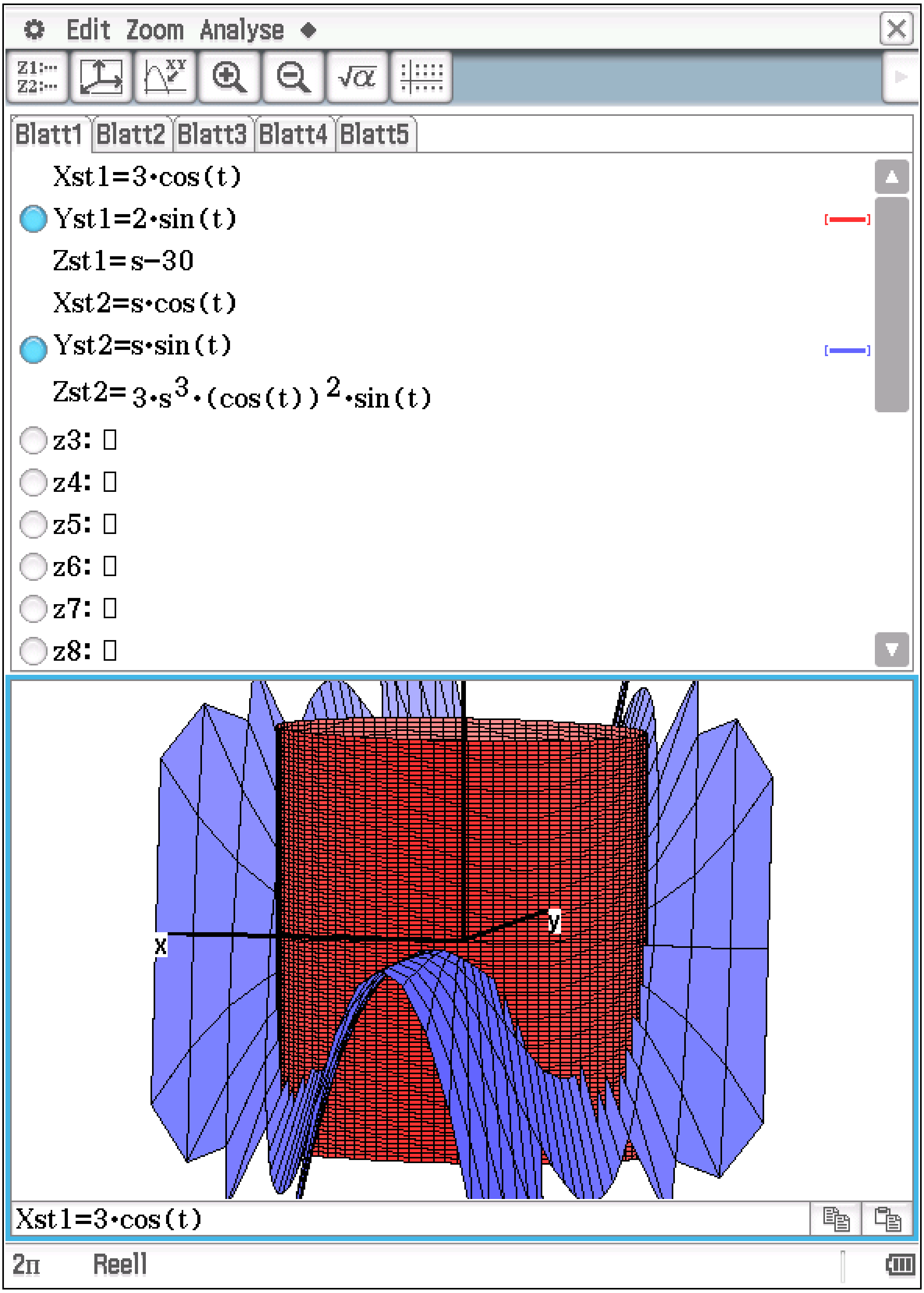
Aufg. 4.3.1e)

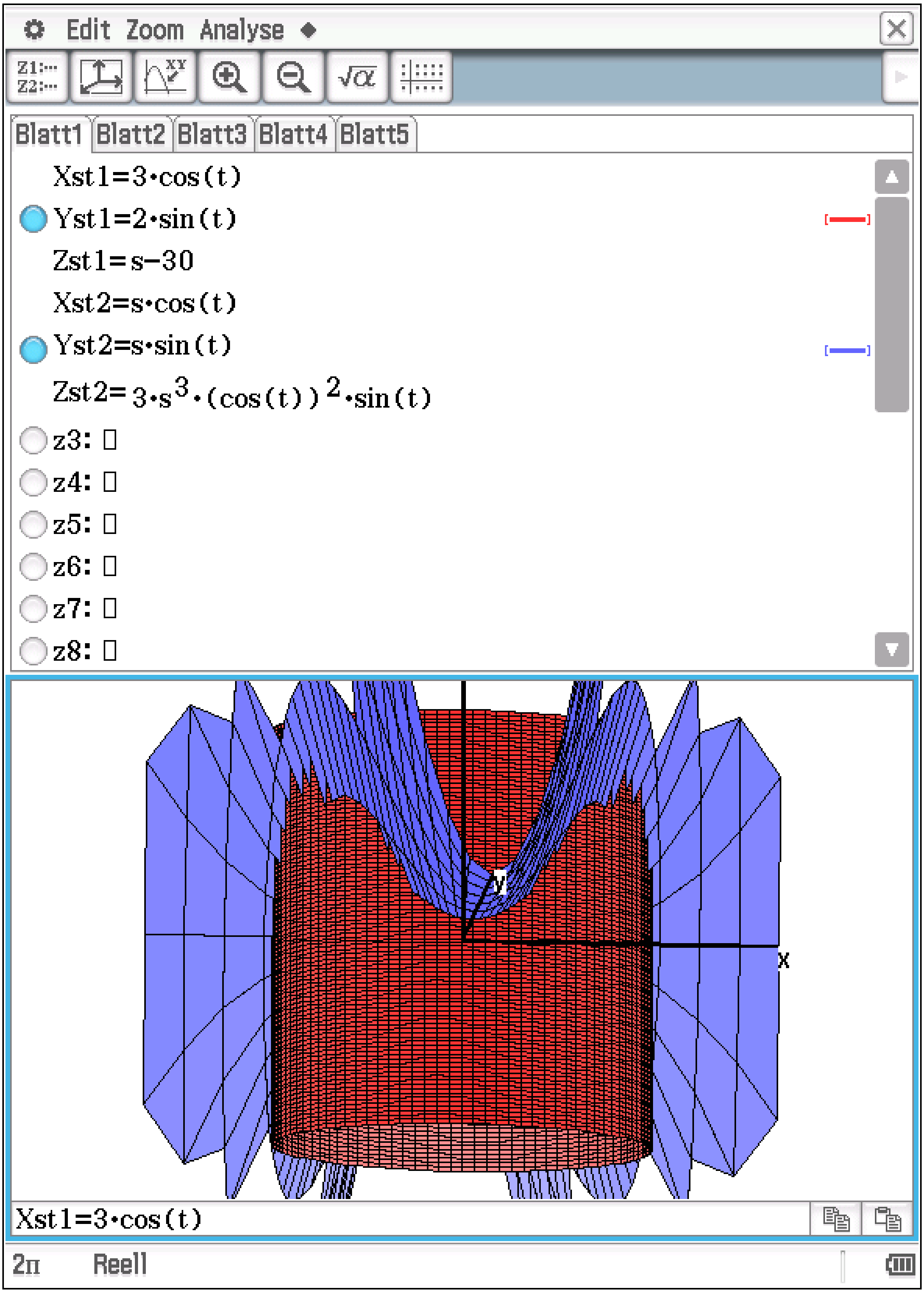

Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
z1=f(x,y)
Xst2=s·cos(t)
Yst2=s·sin(t)
Zst2=f(s·cos(t),s·sin(t))
z3:
z4:
z5:
z6:
z7:
z8:
z9:
z10:
z
x
y
zwei lokale Minima gutr erkennbar
Xst2=s·cos(t)
2π Reell

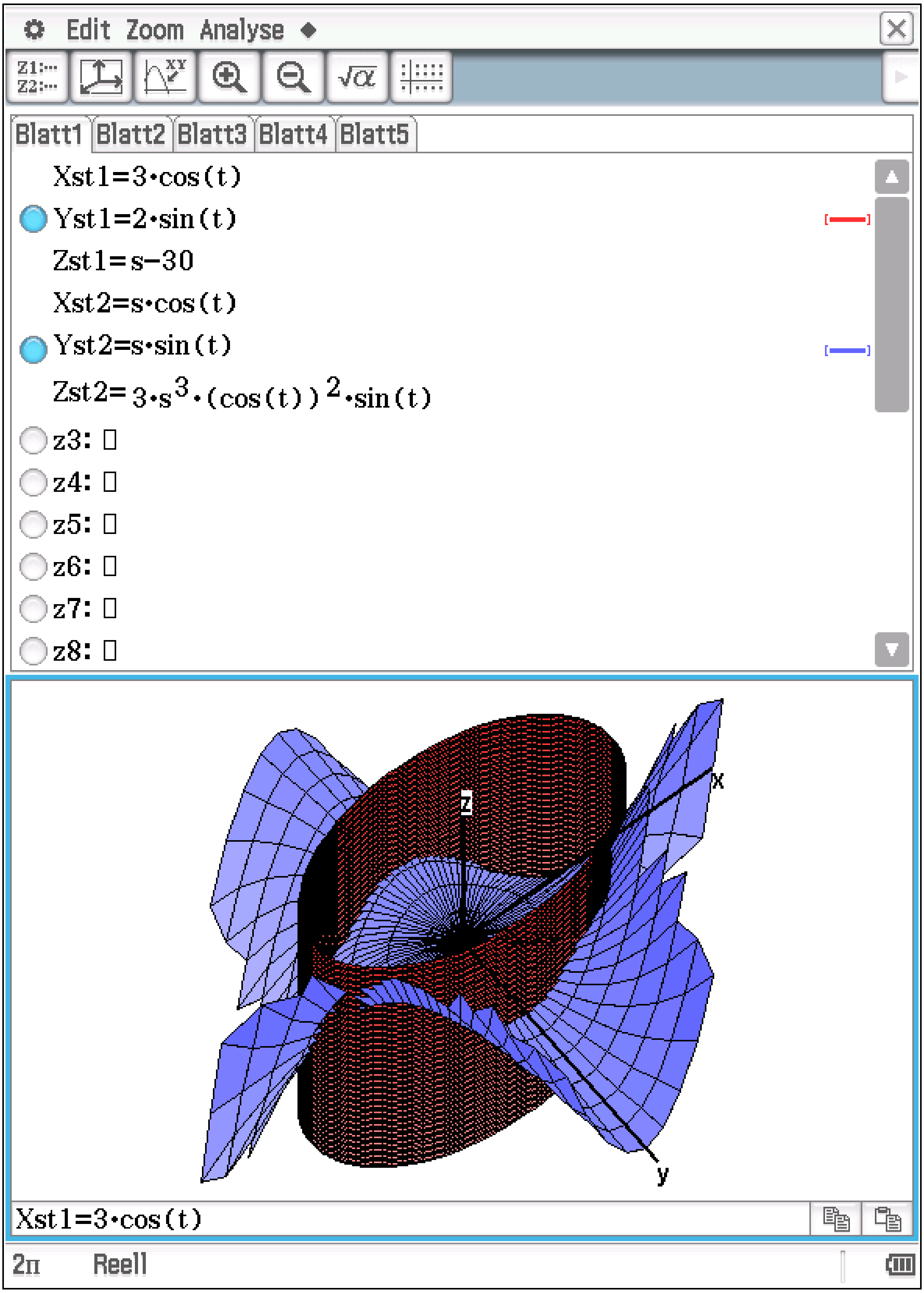

Edit Zoom Analyse
y
z
x
drei Sattelpunkte bei y=-3 und
x=-√(3), x=0, x=√(3)
Xst2=s·cos(t)
2π Reell

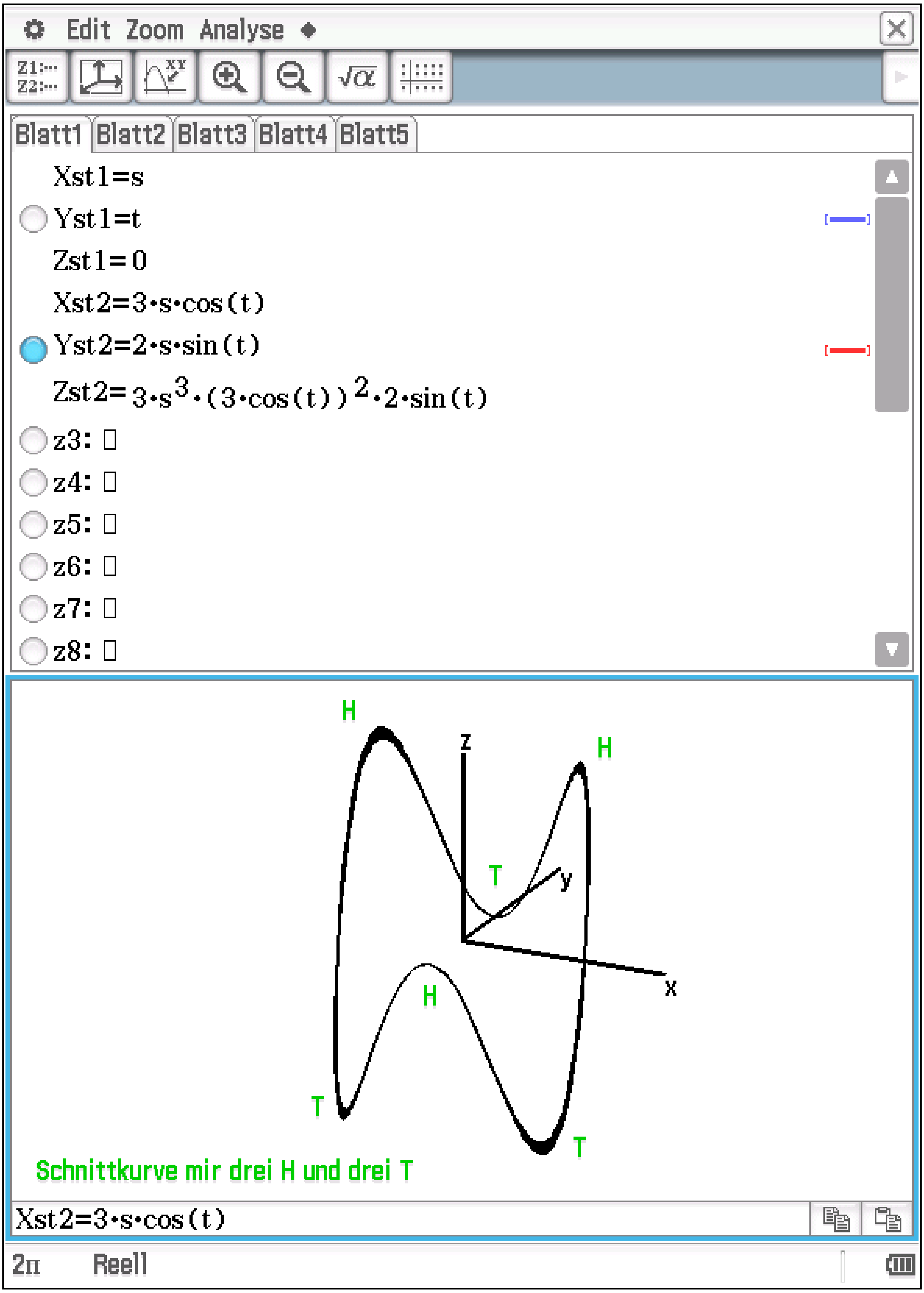

Edit Zoom Analyse
Karte (Höhenlinien)
c>0
c<0
S(−√(3),−3)
S(0,−3)
S(√(3),−3)
T
T
c<0
c>0
2π
Reell

Aufg. 4.3.4c) 3D-Grafik Fläche mit NB (elliptischer Zylinder)



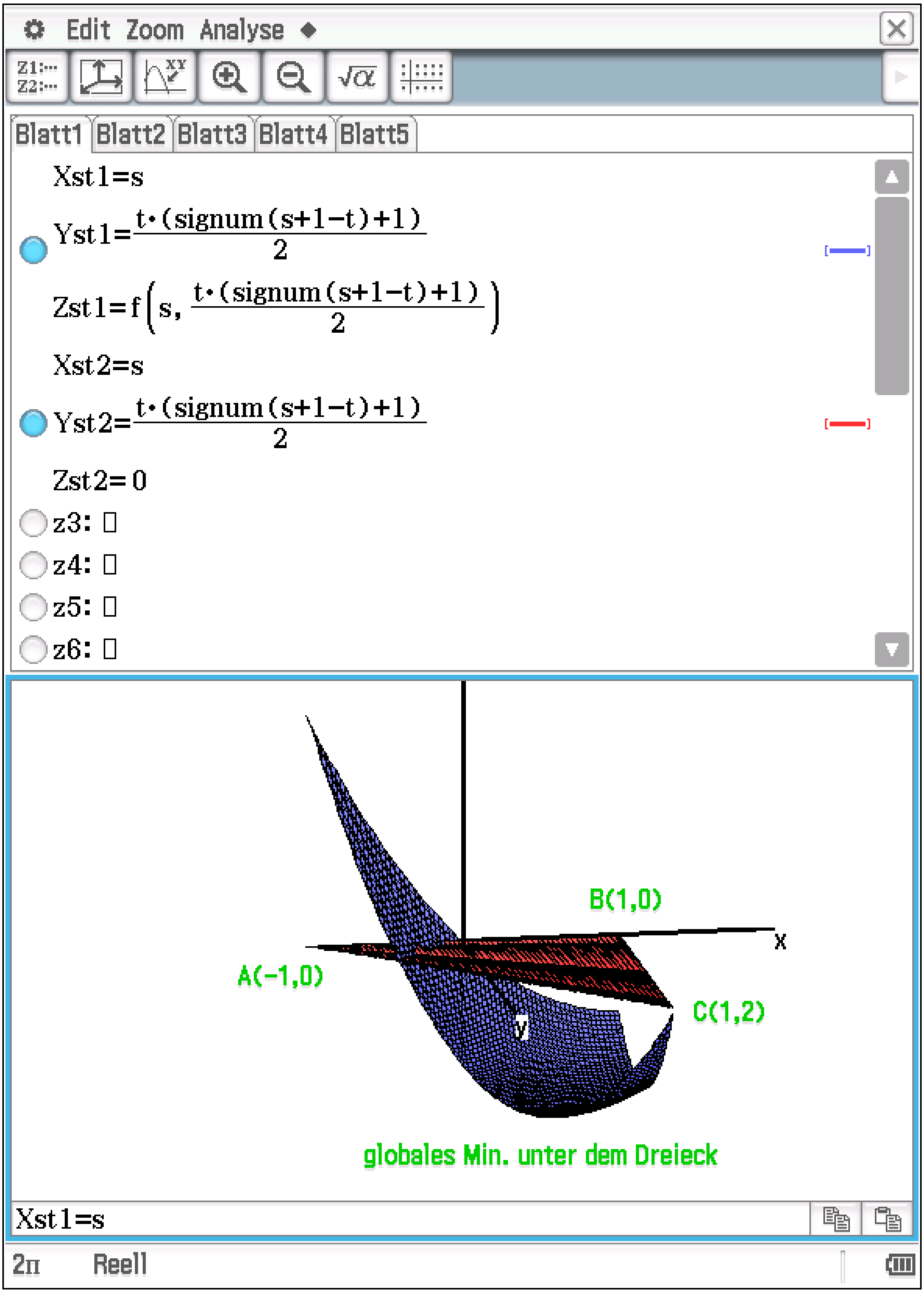

Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
Xst1=3·cos(t)
Yst1=2·sin(t)
Zst1=s−30
Xst2=s·cos(t)
Yst2=s·sin(t)
Zst2=3·s^3·(cos(t))^2·sin(t)
z3:
z4:
z5:
z6:
z7:
z8:
y
x
Xst1=3·cos(t)
2π Reell


Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
Xst1=3•cos(t)
Yst1=2•sin(t)
Zst1=s−30
Xst2=s•cos(t)
Yst2=s•sin(t)
Zst2=3•s^3•(cos(t))^2•sin(t)
z3:
z4:
z5:
z6:
z7:
z8:
z
x
y
Xst1=3•cos(t)
2π Reell



Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
Xst1=s
Yst1=t
Zst1=0
Xst2=3•s•cos(t)
Yst2=2•s•sin(t)
Zst2=3•s^3•(3•cos(t))^2•2•sin(t)
z3:
z4:
z5:
z6:
z7:
z8:
H
z
H
T
y
H
x
T
T
Schnittkurve mir drei H und drei T
Xst2=3•s•cos(t)
2π Reell

Aufg. 4.3.13a)


Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
Xst1=s
Yst1=t·(signum(s+1−t)+1)/2
Zst1=f(s, t·(signum(s+1−t)+1)/2)
Xst2=s
Yst2=t·(signum(s+1−t)+1)/2
Zst2=0
z3:
z4:
z5:
z6:
B(1,0)
x
A(−1,0)
C(1,2)
y
globales Min. unter dem Dreieck
Xst1=s
2π Reell