SS2018 – 2.Repetitorium – Prof.Paditz

Aufg. 4.1. 1i),3f),8,13d)

4.2. 10,24b),27b),32b),33a)

Aufg. 4.1. 1i)

Skizzieren Sie die Höhenlinien der folgenden Funktion

(Fläche): $z=f(x,y)=x^2+y$.

Lösung: Fläche 2.Ordnung

$z=\text{const.}=c$, d.h. $y=-x^2+c, c\in\mathbf{R}$.

Höhenlinien sind Parabeläste ("Rinne"; "schrägliegender" parabolischer Zylinder, um 45° geneigt)

c:={-3,-2,-1,0,1,2,3}

{-3,-2,-1,0,1,2,3}

Define y1(x)=$-x^2$+c

done

2D-Grafik

Define xst1(s,t)=s

done

Define yst1(s, t)=$-s^2+t$

done

Define zst1(s, t)=t

done

3D−Grafik

Aufg. 4.1. 3f)

Legen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der folgenden Funktion fest und bilden Sie alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung: $z=f(x,y)=\log_x(y)$.

Lösung: $D(f(x,y))=\{(x,y)\,|\,x>0 \wedge x\neq 1 \wedge y>0\}$

Basis x: x muss positiv und ≠1 sein, y muss positiv sein.

Define $f(x,y)=\log_x(y)$

done

$z_x:=\frac{d}{dx}(f(x,y))$

$$\frac{-\ln(y)}{x\cdot(\ln(x))^2}$$

$z_y:=\frac{d}{dy}(f(x,y))$

$$\frac{1}{y\cdot\ln(x)}$$

simplify(f(x, y))

$$\frac{\ln(y)}{\ln(x)}$$

judge(ans=f(x, y))

TRUE

$z_x:=\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(y)}{\ln(x)}\right)$

$$\frac{-\ln(y)}{x\cdot(\ln(x))^2}$$

$$z_y:=\frac{d}{dy}\left(\frac{\ln(y)}{\ln(x)}\right)$$

$$\frac{1}{y\cdot\ln(x)}$$

$$\text{solve}\left(z=\frac{\ln(y)}{\ln(x)},y\right)$$

$$\{y=x^z\}$$

Höhenlinien: z=const.=c, d.h. $y=x^c$

c:={−3,−2,−1,0,1,2,3}

{−3,−2,−1,0,1,2,3}

Define $y2(x)=(x|x>0)^c$

done

2D−Grafik Y1:⋯ Y2:⋯

Anmerkung: Satz von Schwarz $z_{yx}=z_{xy}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}(f(x,y))\right)$$

$$\frac{-1}{x\cdot y\cdot(\ln(x))^2}$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}(f(x,y))\right)$$

$$\frac{-1}{x\cdot y\cdot(\ln(x))^2}$$

Define xst1(s,t)=s|s>0

done

Define $yst1(s,t)=(s|s>0)^t$

done

Define zst1(s,t)=t

done

3D-Grafik

Aufg. 4.1.8

An welcher Stelle (x, y) zeigt der Normalenvektor der Fläche $z=x^4+y^4-32x+4y+10$ in Richtung der z-Achse?

Lösung: Fläche 4. Ordnung mit waagerechter Tangentialebene (= senkrechter Normalenvektor, d.h. grad(f)=**o**)

z.B. Kreuzprodukt aus zwei Tangentialvektoren bilden:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x^4+y^4-32x+4y+10 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x \end{bmatrix}, \quad \frac{d}{dy}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y \end{bmatrix}$$

DelVar x, y, z_x, z_y

done

$$\text{crossP}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normalenvektor = $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ in Richtung der z-Achse, d.h.

$z_x=z_y=0$, d.h. grad(f)=**o** (**waagerechte**

Tangentialebene)

$\frac{d}{dx}\left(x^4+y^4-32x+4y+10\right)=0$

$4\cdot x^3-32=0$

$\frac{d}{dy}\left(x^4+y^4-32x+4y+10\right)=0$

$4\cdot y^3+4=0$

solve($\{4\cdot x^3-32=0, 4\cdot y^3+4=0\}, \{x, y\}$)

$\{x=2, y=-1\}$

Zusatzüberlegung:

Define $z3(x,y)=x^4+y^4-32x+4y+10$

done

3D-Grafik

3D-Grafik: paraboloidförmige Oberfläche, nach oben geöffnet mit globalem Minimum (dort waagerechte Tangentialebene)

z3(2,-1)

-41

Minimum!

$$D:=\det\left(\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx^2}(z3(x,y)) & \frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}(z3(x,y))\right) \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}(z3(x,y))\right) & \frac{d^2}{dy^2}(z3(x,y)) \end{bmatrix}\right)$$

$144\cdot x^2\cdot y^2$

$(D|\{x=2, y=-1\})>0$

$576>0$

$\left(\frac{d^2}{dx^2}(z3(x,y))\ |\{x=2, y=-1\}\right)>0$

$48>0$

Aufg. 4.1. 13d)

Untersuchen Sie, ob die folgende Differentialform $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ ein vollständiges Differenzial ist und berechnen Sie gegebenenfalls das zugehörige Potenzial:

$2y*\sin(2x)dx-\cos(2x)dy.$

Define $P(x,y)=2y*\sin(2x)$

done

Define $Q(x,y)=-\cos(2x)$

done

$$P_y=\frac{d}{dy}(2y*\sin(2x))$$

$$P_y=2\cdot\sin(2\cdot x)$$

$$Q_x=\frac{d}{dx}(-\cos(2x))$$

$$Q_x=2\cdot\sin(2\cdot x)$$

Integabilitätsbedingung erfüllt!

$$\int_{\square}^{\square} P(x,y)dx$$

$$-y\cdot\cos(2\cdot x)$$

Define $F(x,y)=-y\cdot\cos(2\cdot x)+C(y)$

done

$$\frac{d}{dy}(F(x,y))=Q(x,y)$$

$$\frac{d}{dy}(C(y))-\cos(2\cdot x)=-\cos(2\cdot x)$$

$\frac{d}{dy}(C(y))=0$, somit $C(y)=\text{const.}=c$

Ergebnis: $F(x,y)=-y\cdot\cos(2\cdot x)+c$

Zusatz: Umformung der Differenzialform in eine sogen. "exakte" Differenzialgleichung (vgl. Skript S. 47):

$2y*\sin(2x)dx-\cos(2x)dy=0$ bedeutet

$2y*\sin(2x)-\cos(2x)*y'=0$ oder

$y'=2y*\tan(2x)$

Lösung der Differenzialgleichung im Kplx-Modus

dSolve(y'=2y*tan(2x),x,y)

$$\left\{y=\frac{\left((\tan(x))^2+1\right)\cdot\mathrm{const}(1)}{(\tan(x)+1)\cdot(\tan(x)-1)}\right\}$$

simplify(ans)

$$\left\{y=\frac{-\mathrm{const}(1)}{\cos(2\cdot x)}\right\}$$

hieraus: $-y*\cos(2\cdot x)=\mathrm{const.}$ und

damit ist $F(x,y)=-y*\cos(2\cdot x)+c$ eine Stammfunktion.

Aufg. 4.2.10

Für eine adiabatische Zustandsänderung gilt die Beziehung $\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$. Es gelte $\kappa=1,4$ (zweiatomiges Gas). Außerdem wurden gemessen: $T_1=(293\pm1)\,°K$, $T_2=(373\pm5)\,°K$ und $p_1=(1000\pm10)$ mbar. Man berechne daraus den Druck p_2 und dessen absoluten und relativen Fehler.

Lösung:

$T_1:=293$

293

$T_2:=373$

$$373$$

$p_1:=1000$

$$1000$$

$\kappa:=1.4$

$$\frac{7}{5}$$

$$\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

$$\frac{293}{373}=1000000^{\frac{1}{7}}\cdot\left(\frac{1}{p_2}\right)^{\frac{2}{7}}$$

$\mathrm{solve}(\mathrm{ans}, p_2)$

$$\left\{p_2=\frac{51895117000\cdot\sqrt{109289}}{7370050801}\right\}$$

$\mathrm{approx}(\mathrm{ans})$

$$\{p_2=2327.792369\}$$

$p_2\approx 2327.79$

DelVar T_1, T_2, p_1, κ

done

$$\mathrm{solve}\left(\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}, p_2\right)$$

$$\left\{p_2=\frac{p_1}{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}\right\}$$

Define $p_2(T_1, T_2, p_1)=\dfrac{p_1}{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}\,|\,\kappa=1.4$

done

$$\frac{d}{dT_1}(p_2(T_1, T_2, p_1))$$

$$\frac{-7 \cdot p_1}{2 \cdot T_2 \cdot \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{9}{2}}}$$

ans | {T_1=293, T_2=373, p_1=1000, κ=1.4}

$$\frac{-181632909500 \cdot \sqrt{109289}}{2159424884693}$$

approx(|ans|*1)

27.80639348

$$\frac{d}{dT_2}(p_2(T_1, T_2, p_1))$$

$$\frac{7 \cdot T_1 \cdot p_1}{2 \cdot T_2^{2} \cdot \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{9}{2}}}$$

ans | {T_1=293, T_2=373, p_1=1000, κ=1.4}

$$\frac{486951500 \cdot \sqrt{109289}}{7370050801}$$

approx(|ans|*5)

109.2127787

$$\frac{d}{dp_1}(p_2(T_1, T_2, p_1))$$

$$\frac{1}{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{7}{2}}}$$

ans | {T_1=293, T_2=373, p_1=1000, κ=1.4}

$$\frac{51895117 \cdot \sqrt{109289}}{7370050801}$$

approx(|ans|*10)

23.27792369

approx(27.80639348+109.2127787+23.27792369)

160.2970959

p_2=(2327.79±160,30)mbar

approx($\frac{160.2970959}{2327.792369}$*100)

6.886228258

rel. Fehler: 0.069=6.9%

Aufg. 4.2.24b)

Entwickeln Sie die folgende Funktion

$z=f(x,y)=\exp(x^2+y^2)$ in ein Taylor-Polynom zweiter Ordnung um den Punkt $(x_0,y_0)=(0,0)$.

Lösung:

Define $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$

done

f(0,0)

1

$\begin{bmatrix} \text{diff}(f(x,y),x) \\ \text{diff}(f(x,y),y) \end{bmatrix} | \{x=0,y=0\}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

dotP(ans, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$)

0

$\frac{1}{2}*\begin{bmatrix} \text{diff}(f(x,y),x,2) \\ 2*\text{diff}(\text{diff}(f(x,y),x),y) \\ \text{diff}(f(x,y),y,2) \end{bmatrix} | \{x=0,y=0\}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\mathrm{dotP}\left(ans, \begin{bmatrix} x^2 \\ x*y \\ y^2 \end{bmatrix}\right)$$

$$x^2+y^2$$

$f(x,y)=f(0,0)+ans$

$$e^{x^2+y^2}=x^2+y^2+1$$

$z=f(x,y)\approx x^2+y^2+1$

Die berührende Fläche 2. Ordnung an der Stelle (0,0,1) ist ein Rotationsparaboloid.

Aufg. 4.2. 27b)

Man bestimme die Richtung, in welcher die durch $z=f(x,y)$ gegebene Fläche im Punkt $P=(x_0,y_0)$ am stärksten ansteigt. Welchen Winkel α[Grad] bildet diese Richtung mit der x-Achse und wie groß ist der Anstieg?

$z=2x^2-3x*y+y^2+(1+\sqrt{3})y-\sqrt{3}$, $P=(-1,0)$

Lösung: Gradient

Define $z(x,y)=2x^2-3x*y+y^2+(1+\sqrt{3})y-\sqrt{3}$

done

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx}(z(x,y)) \\ \frac{d}{dy}(z(x,y)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4\cdot x-3\cdot y \\ -3\cdot x+2\cdot y+\sqrt{3}+1 \end{bmatrix}$$

$ans|\{x=-1,y=0\}$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ \sqrt{3}+4 \end{bmatrix}$$

norm(ans)

$$\sqrt{8\cdot\sqrt{3}+35}$$

tan(γ)=approx(ans)

$$\tan(\gamma)=6.989735793$$

$\gamma=\text{approx}\left(\tan^{-1}\left(\sqrt{8\cdot\sqrt{3}+35}\right)*\frac{180}{\pi}\right)$

$$\gamma=81.85811881$$

räumlicher Maximalanstieg ≈ 6.99 ($\gamma\approx 81.86°$)

$\tan(\alpha)=\frac{\sqrt{3}+4}{-4}$

$$\tan(\alpha)=\frac{-(\sqrt{3}+4)}{4}$$

solve(ans, α)

$$\left\{\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{4\cdot(-\sqrt{3}+4)}{13}\right)+\pi\cdot\text{constn}(1)-\frac{\pi}{2}\right\}$$

$\alpha=\left(\tan^{-1}\left(\frac{-(\sqrt{3}+4)}{4}\right)+\pi\right)*\frac{180}{\pi}$

$$\alpha=\frac{180\cdot\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{4}+1}\right)+\frac{\pi}{2}\right)}{\pi}$$

approx(ans)

$$\alpha=124.908511$$

α≈124.91° (Richtungswinkel des Gradienten in der x-y-Ebene)

Aufg. 4.2.32b)

Berechnen Sie die Rotation für folgendes Vektorfeld

$\mathbf{a}=\mathbf{a}(x,y,z)=(2x,0,0)^T$. Ist das Vektorfelder konservativ? Was bedeutet das physikalisch?

Lösung: $\mathrm{rot}(\mathbf{a})=\nabla \times \mathbf{a}$ berechnen

$$\left|\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{d}{dx}(\square) & \frac{d}{dy}(\square) & \frac{d}{dz}(\square) \\ 2x & 0 & 0 \end{bmatrix}\right| = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

d.h. das Vektorfeld ist konservativ (wirbelfrei).

Aufg. 4.2. 33a)

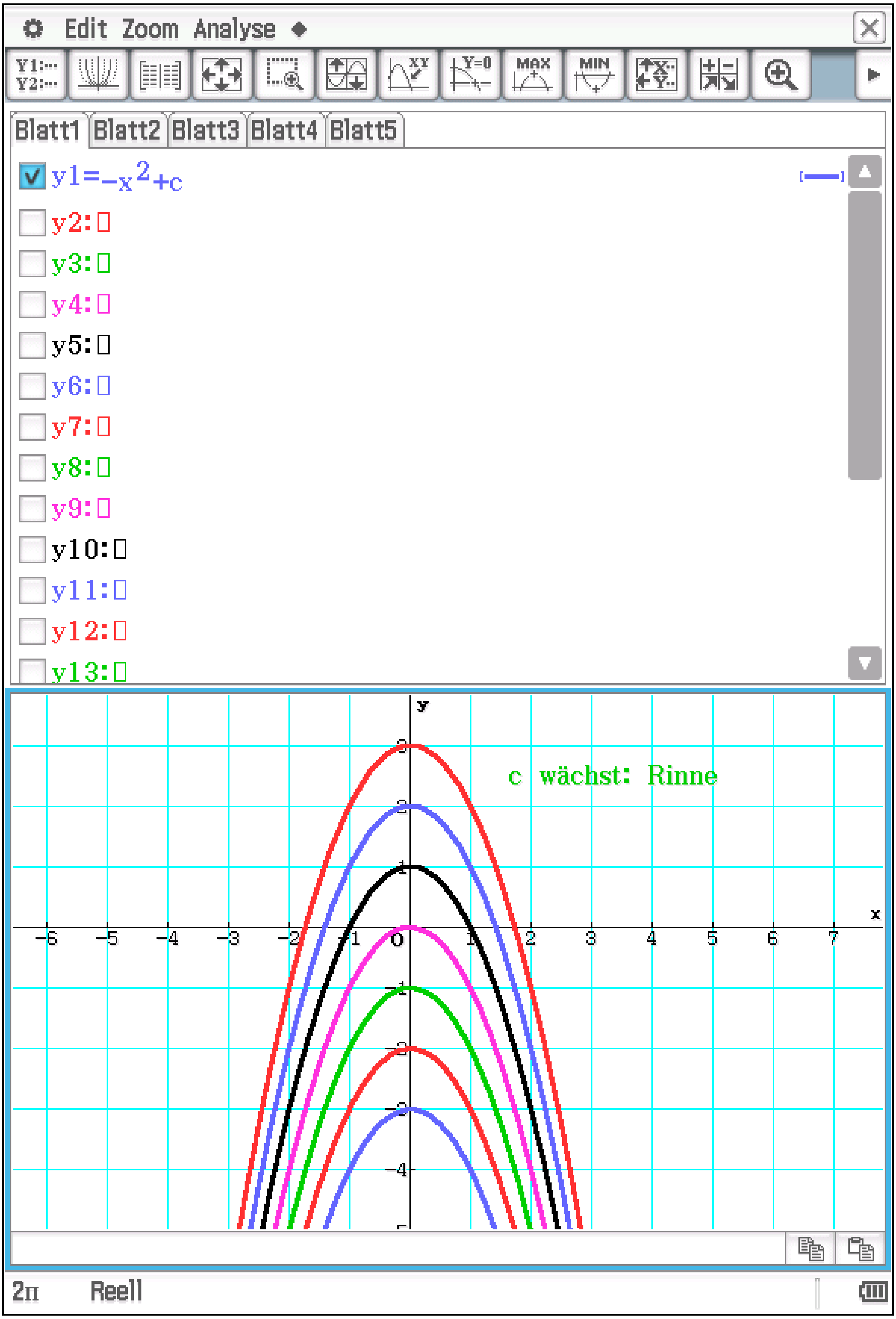
Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes

$\mathbf{a}=\mathbf{a}(x,y,z)=(x^2y, x^2+z*x+y, x*y+y^2+z^2)^T$.

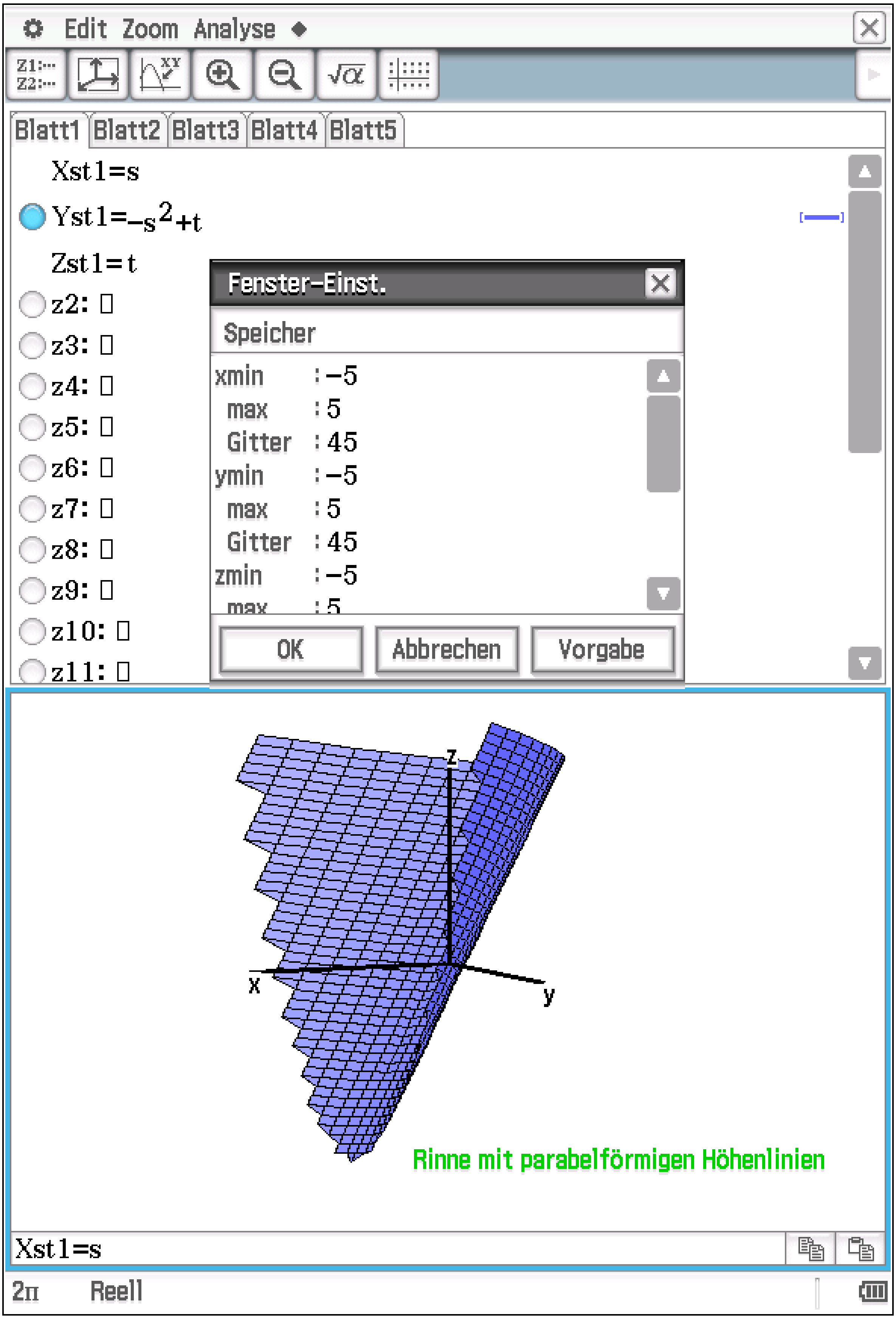
Lösung: $\mathrm{div}(a)=\nabla\circ\mathbf{a}$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx}(\square) \\ \frac{d}{dy}(\square) \\ \frac{d}{dz}(\square) \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x^2y \\ x^2+z*x+y \\ x*y+y^2+z^2 \end{bmatrix} = 2x*y+1+2z$$

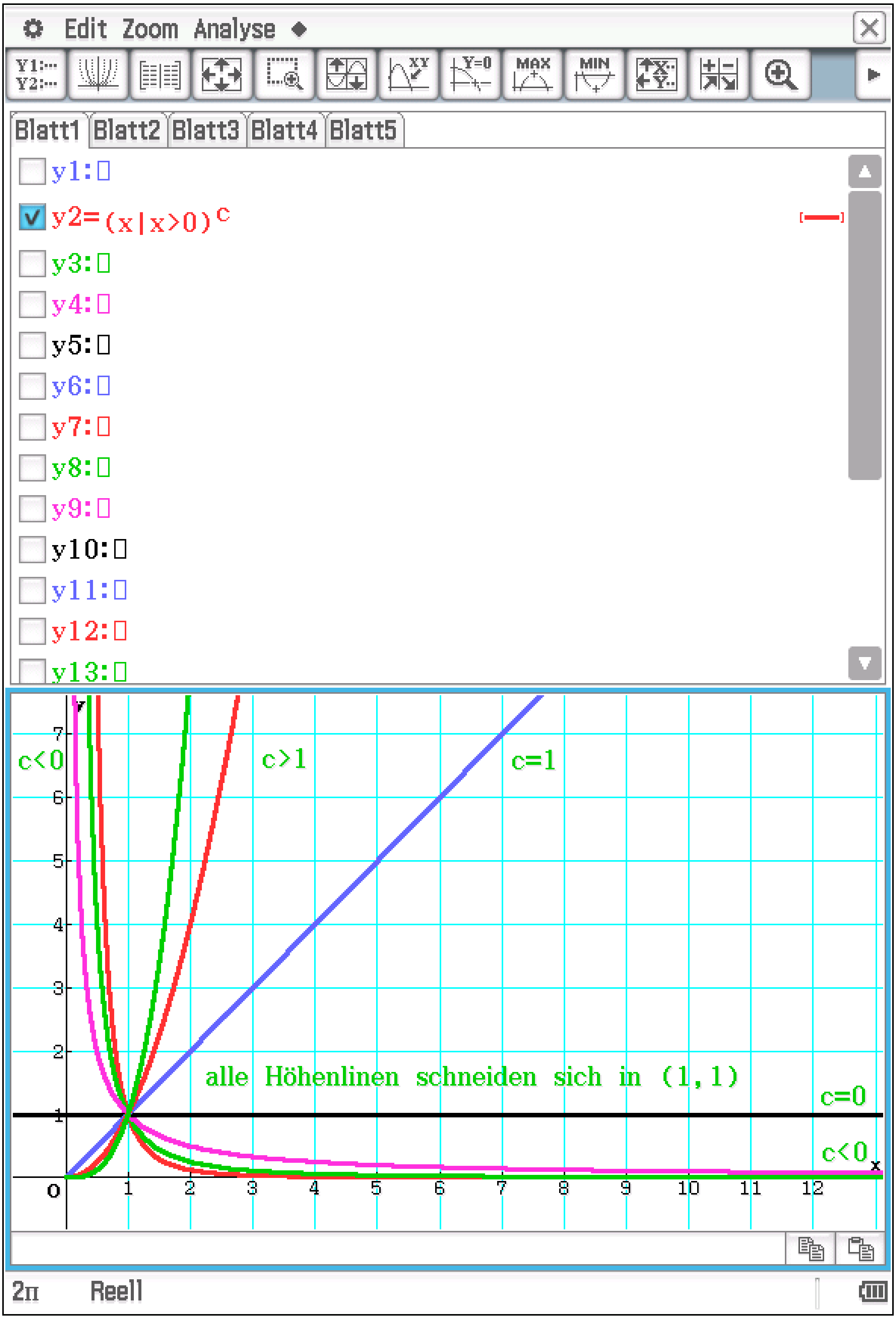
Aufg. 4.1.1i)

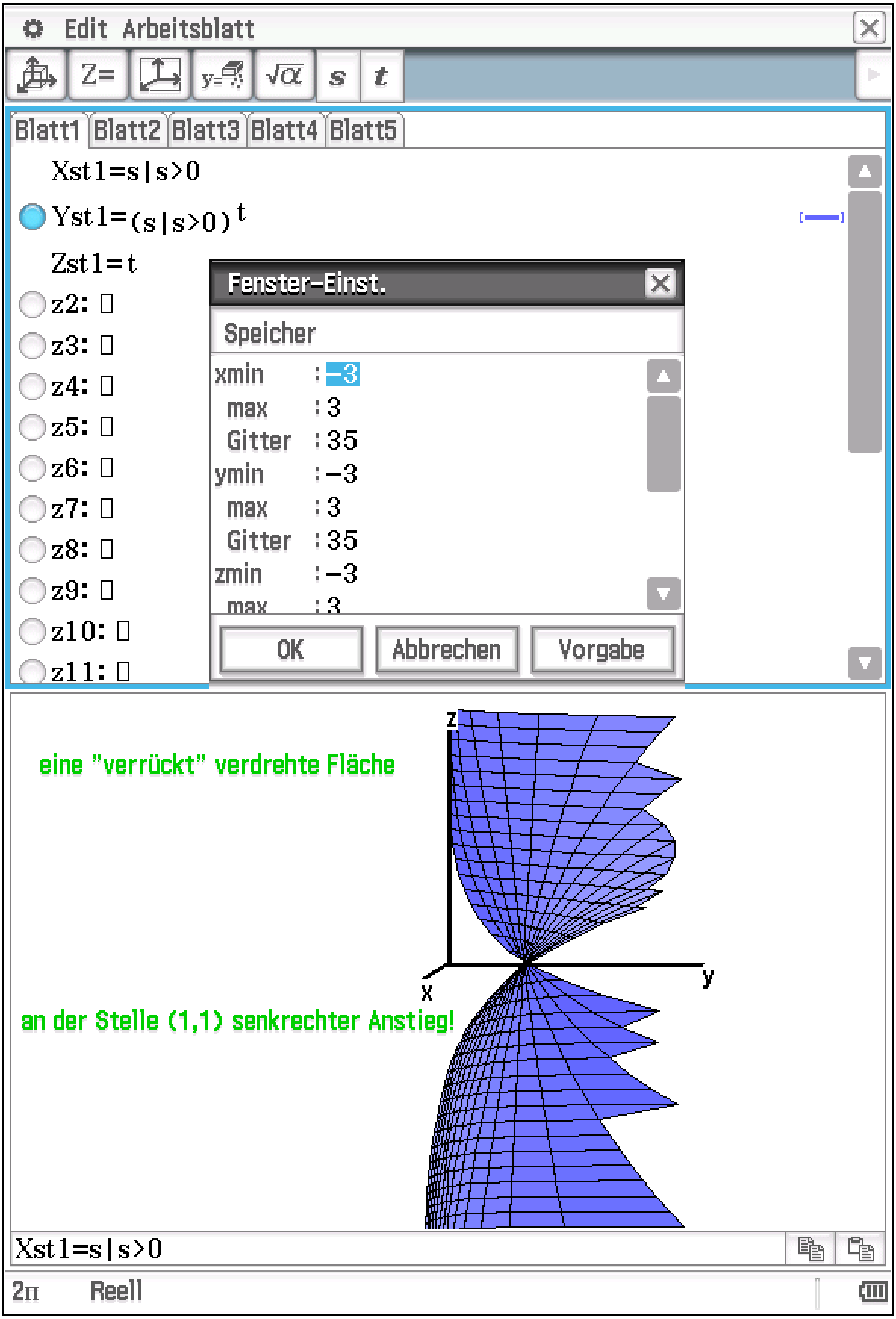


Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
y1=-x^2+c
y2:
y3:
y4:
y5:
y6:
y7:
y8:
y9:
y10:
y11:
y12:
y13:
c wächst: Rinne
2π Reell


Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
Xst1=s
Yst1=−s^2+t
Zst1=t
z2:
z3:
z4:
z5:
z6:
z7:
z8:
z9:
z10:
z11:
Fenster-Einst.
Speicher
xmin : −5
max : 5
Gitter : 45
ymin : −5
max : 5
Gitter : 45
zmin : −5
max : 5
OK
Abbrechen
Vorgabe
z
x
y
Rinne mit parabelförmigen Höhenlinien
Xst1=s
2π
Reell

Aufg. 4.1.3f)


Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
y1:
y2=(x|x>0)^c
y3:
y4:
y5:
y6:
y7:
y8:
y9:
y10:
y11:
y12:
y13:
c<0
c>1
c=1
alle Höhenlinen schneiden sich in (1,1)
c=0
c<0
2π Reell


Edit Arbeitsblatt
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
Xst1=s|s>0
Yst1=(s|s>0)^t
Zst1=t
z2:
z3:
z4:
z5:
z6:
z7:
z8:
z9:
z10:
z11:
Fenster-Einst.
Speicher
xmin : -3
max : 3
Gitter : 35
ymin : -3
max : 3
Gitter : 35
zmin : -3
max : 3
OK
Abbrechen
Vorgabe
eine "verrückt" verdrehte Fläche
an der Stelle (1,1) senkrechter Anstieg!
z
x
y
Xst1=s|s>0
2π
Reell

Aufg. 4.1.8 Paraboloidförmige Fläche nach oben geöffnet