SS2018 - 2.Übung - Prof.Paditz

Aufg.

vom 1.Repetitorium:

3.1. 3e),3f), 7b),9,12 sowie **3.2.** 3,9,12b),27

Aufg. 3.1. 3e) 3f)

Gegeben sind die Matrizen

$$B:=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 3\\ -1 & 4 & 7\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-4 & 0 & 3\\ -1 & 4 & 7\end{bmatrix}$$

$$C:=\begin{bmatrix}1 & 0 & -4\\ 3 & 2 & 0\\ 6 & -2 & 5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -4\\ 3 & 2 & 0\\ 6 & -2 & 5\end{bmatrix}$$

Berechnen Sie folgende Matrizen, falls diese existieren:

e) C•B existiert nicht (B,C nicht "verkettet")

f) $C\cdot B^T$

C*trn(B)

$$\begin{bmatrix}-16 & -29\\ -12 & 5\\ -9 & 21\end{bmatrix}$$

Aufg. 3.1.7b)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt die folgende Beziehung?

$$\det\left(\begin{bmatrix} -1 & x & x \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\right)=27$$

$$12 \cdot x+3=27$$

solve(ans, x)

$$\{x=2\}$$

Aufg. 3.1.9

Berechnen Sie folgende Determinante

$$\det\left(\begin{bmatrix} \sin(\alpha)\cos(\beta) & \sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha) \\ r \cdot \cos(\alpha)\cos(\beta) & r \cdot \cos(\alpha)\sin(\beta) & -r \cdot \sin(\alpha) \\ -r \cdot \sin(\alpha)\sin(\beta) & r \cdot \sin(\alpha)\cos(\beta) & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$r^2 \cdot (\sin(\alpha))^3 \cdot (\cos(\beta))^2 + r^2 \cdot (\sin(\alpha))^3 \cdot (\sin(\beta))^2 + r^2 \cdot$$

simplify(ans)

$$r^2 \cdot \sin(\alpha)$$

Anmerkung:

Es handelt sich hier um eine sogen.

Funktionaldeterminante zum Vektor

$$v := \begin{bmatrix} r \cdot \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ r \cdot \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ r \cdot \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \\ r \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ r \cdot \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

v beschreibt hierbei einen Raumpunkt **P=(x, y, z)** in

Kugelkoordinaten (vgl. Skript S. 17: $\varphi=\beta$, $\theta=\alpha$).

$$\frac{d}{dr}(v) = \begin{bmatrix} \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{d\alpha}(v)=\begin{bmatrix} r\cdot\cos(\alpha)\cos(\beta) \\ r\cdot\cos(\alpha)\sin(\beta) \\ -r\cdot\sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{d\beta}(v)=\begin{bmatrix} -r\cdot\sin(\alpha)\sin(\beta) \\ r\cdot\sin(\alpha)\cos(\beta) \\ -r\cdot\sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

$\frac{d}{dr}(v)$, $\frac{d}{d\alpha}(v)$, $\frac{d}{d\beta}(v)$ bilden die Zeilen in der Determinante.

Aufg. 3.1.12

In einem Unternehmen werden zwei verschiedene Typen von Endprodukten E_1, E_2 aus drei verschiedenen Typen von Zwischenprodukten Z_1, Z_2, Z_3 gefertigt, die jeweils wiederum aus 4 verschiedenen Rohstoffen R_1, R_2, R_3, R_4 hergestellt werden. Die Mengen der Rohstoffe R_i zur Herstellung je einer Einheit der Zwischenprodukte Z_j bzw. der Zwischenprodukte Z_j zur Herstellung je einer Einheit der Endprodukte E_k sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt:

$$\begin{bmatrix} & Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ R_1 & 4 & 3 & 3 \\ R_2 & 2 & 4 & 6 \\ R_3 & 1 & 7 & 4 \\ R_4 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} & E_1 & E_2 \\ Z_1 & 6 & 5 \\ Z_2 & 4 & 3 \\ Z_3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Stellen Sie eine Matrizengleichung zur Bestimmung der Anzahl der benötigten Rohstoffe bei vorgegebenem Produktionsvektor $e=(e_1, e_2)^T$ der zwei Endprodukte E_1, E_2 auf.

b) Wieviel Rohstoffeinheiten werden benötigt zur

Herstellung von 200 Einheiten E_1 und 300 Einheiten E_2?

Lösung:

a)

$$A:=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B:=\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix}=A\cdot\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}=B\cdot\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix}=A\cdot B\cdot\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}=C\cdot\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

$C:=A\cdot B$

$$\begin{bmatrix} 39 & 35 \\ 34 & 34 \\ 38 & 34 \\ 30 & 24 \end{bmatrix}$$

b)

$$C\cdot\begin{bmatrix}200\\300\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}18300\\17000\\17800\\13200\end{bmatrix}$$

Aufg. 3.2.3

Zeigen Sie, dass das folgende Gleichungssystem keine Lösung besitzt:

$$x_1\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\5\\2\end{bmatrix}+x_2\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\6\end{bmatrix}+x_3\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\\2\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-2\\4\\5\end{bmatrix}.$$

Lösung:

$$A:=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-2&0&1\\5&-1&2\\2&6&-3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&-1\\-2&0&1\\5&-1&2\\2&6&-3\end{bmatrix}$$

rank(A)

3

$$Ab:=\begin{bmatrix}1&1&-1&2\\-2&0&1&-2\\5&-1&2&4\\2&6&-3&5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

rank(Ab)

$$4$$

Rangerhöhung, d. h. keine Linearkombination

$x_1\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}+x_2\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}+x_3\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ erreicht die rechte Seite

$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Austauschverfahren:

$$ST:=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(ST, 1, 1)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -6 & 7 & 6 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(T1, 2, 1)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(T2,3,1)

done

matnew⇒T3

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Widerspruch in Zeile 4: $y_4 \neq 0$.

3 Austauschschritte in A, d.h. r(A)=3

formal 4. Austauschschritt in Zeile4 mit 1-Spalte

möglich: r(Ab)=4.

alternativ:

rref(Ab)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Widerspruch in Zeile 4

Aufg. 3.2.9

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$x_1 - 2*x_2 + 3*x_3 + 4 = 0$$
$$2*x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0$$
$$x_1 + ax_2 + 2*x_3 + b = 0$$

a) Für welche $a, b \in \mathbf{R}$ hat dieses Gleichungssystem

α) genau eine Lösung,

β) keine Lösung,

γ) unendlich viele Lösungen.

b) Wie lautet die Lösung für a=1, b=4?

c) Geben Sie für den Fall γ) die Lösung an.
Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

zu a)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -b \end{bmatrix} \Rightarrow r$$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -b \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 0$$

$$5 \cdot a + 5 = 0$$

solve(ans, a)

$$\{a=-1\}$$

α) Für $a\neq-1$ (b bel. reell) ist die Lösung eindeutig:

$x:=A^{-1}*r$

$$\begin{bmatrix} \frac{2\cdot(3\cdot a+4)}{5\cdot a+5}+\frac{4\cdot(a-2)}{5\cdot a+5}+\frac{5\cdot b}{5\cdot a+5} \\ \frac{-5\cdot b}{5\cdot a+5}+\frac{10}{5\cdot a+5} \\ \frac{-2\cdot(a+2)}{5\cdot a+5}-\frac{4\cdot(2\cdot a-1)}{5\cdot a+5}-\frac{5\cdot b}{5\cdot a+5} \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} \frac{2\cdot a+b}{a+1} \\ \frac{-(b-2)}{a+1} \\ \frac{-(2\cdot a+b)}{a+1} \end{bmatrix}$$

zu b)

ans|{a=1, b=4}

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Define z1(x, y)=(-x+2y-4)/3

done

Define z2(x, y)=-2x-y+2

done

Define z3(x, y)=(-x-y-4)/2

done

3D-Grafik	Z1:… Z2:…

stop

weiter in a)

rank(A|a=-1)

$$2$$

augment(A,r)→Ar

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 & -b \end{bmatrix}$$

Ar|a=-1

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -b \end{bmatrix}$$

Der rank-Befehl trifft bzgl. b keine Fallunterscheidung!

rank(Ar|a=-1)

$$3$$

rank(Ar|{a=-1,b=2})

$$2$$

Offensichtlich ist Spalte 4 das Doppelte von Spalte 2

***β*)** keine Lösung für a=-1 und b≠2 wegen Rangerhöhung rank(A)=2<rank(Ar)=3

***γ*)** unendl. viele Lösungen für a=-1 und b=2

zu c)

Ar

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 & -b \end{bmatrix}$$

rref(Ar|{a=-1,b=2})

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_3=t$, $x_2=2+t$, $x_1=-t$, d.h. Geradengleichung im Raum.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}+t*\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t\in\mathbf{R}.$$

Probe:

$$A*(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}+t*\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix})$$

$$\begin{bmatrix} -2\cdot(t+2)+2\cdot t \\ 2 \\ a\cdot(t+2)+t \end{bmatrix}$$

simplify(ans|a=-1)

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

r|b=2

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

stop

Austauschverfahren:

=================

Starttabelle:

augment(A,-r)⇒ST

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & a & 2 & b \end{bmatrix}$$

1. Austauschschritt Pivot=a_{11}

(x_1 nach Zeile1)

LinEqSys(ST,1,1)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 5 & -5 & -10 \\ a+2 & -1 & b-4 \end{bmatrix}$$

2. Austauschschritt Pivot=a_{21}

(x_2 nach Zeile2)

LinEqSys(T1,2,1)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ a+1 & 2\cdot a+b \end{bmatrix}$$

3. Austauschschritt Pivot=a_{31}, falls $a \neq -1$

(x_3 nach Zeile3)

LinEqSys(T2,3,1)

done

matnew⇒T3

$$\begin{bmatrix} \frac{2\cdot a+b}{a+1} \\ \frac{-(b-2)}{a+1} \\ \frac{-(2\cdot a+b)}{a+1} \end{bmatrix}$$

α) eindeutige Lösung, falls **$a \neq -1$** (b bel. reell), rank(A)=rank(Ar)=3

β) keine Lösung, falls **a=−1** und **b≠2,**

rank(A)=2<rank(Ar)=3

γ) unendl. viele Lösungen, falls **a=−1** und **b=2,**

rank(A)=rank(Ar)=2

stop

Aufg. 3.2.12b)

Bestimmen Sie für die folgende Reaktion die stöchiometrischen Koeffzienten a, b, . . . :

$a*C_2H_5OH + b*PCl_3 \Leftrightarrow c*C_2H_5Cl + d*P(OH)_3$.

Lösung: Einzelbilanzen

C: 2a=2c

H: 5a=5c

OH: a=3d

P: b=d

Cl: 3b=c

homogenes LGS: **A*x=o**

x=(a, b, c, d)^T, **o**=(0, 0, 0, 0, 0)^T

fill(0, 5, 4)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A:=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Austauschverfahren ohne 1-Spalte **(=o)**

a geht in Zeile 1:

LinEqSys(A, 1, 1)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

b geht in Zeile 4:

LinEqSys(T1, 4, 1)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

c geht in Zeile 3:

LinEqSys(T2, 3, 1)

done

matnew⇒T3

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d nicht getauscht:

$$\begin{bmatrix} a \\ y_2 \\ c \\ b \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} * d$$

d=1 setzen (positive ganzzahlige Lösungen):

a=3, b=1, c=3.

alternativ:

rref(A)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d & =0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{(äquivalentes LGS)}$$

Aufg. 3. 2. 27

Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Ist die Matrix **A** regulär?

b) Man berechne die inverse Matrix.

c) Welche Matrix **X** löst die Gleichung

$$\mathbf{A*X} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \ ?$$

Lösung:

zu a)

det(A)

1

Ja, Matrix regulär, da det(A)≠0 (voller Rang: 3)

rank(A)

3

zu b)

A^{-1}

$$\begin{bmatrix} 10 & 9 & -7 \\ 4 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Berechnung über die Adjunktenmatrix (transponiert)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} * \begin{bmatrix} 10 & 9 & -7 \\ 4 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Adjunktenmatrix (transponiert):

vorzeichenbehaftete (Schachbrettregel)

Unterdeterminanten

$\det(A)*A^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 10 & 9 & -7 \\ 4 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} +\det() & -\det() & +\det() \\ -\det() & +\det() & -\det() \\ +\det() & -\det() & +\det() \end{bmatrix}$, z.B. folgende Adjunkten

$\alpha_{11}=\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right)$

$$\alpha_{11}=10$$

$\alpha_{21}=-\det\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right)$

$$\alpha_{21}=9$$

$\alpha_{12}=-\det\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right)$

$$\alpha_{12}=4$$

usw.

oder das Austauschverfahren (ohne Spaltentilgung)

A

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(A,1,1)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

1. Spalte wieder einfügen:

$$A1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(A1,2,2)

done

matnew→T2

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Spalte wieder einfügen:

$$A2 := \begin{bmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(A2,3,3)

done

matnew→T3

$$\begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Spalte wieder einfügen:

$$A3:=\begin{bmatrix}10 & 9 & -7\\ 4 & 4 & -3\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}10 & 9 & -7\\ 4 & 4 & -3\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}$$

$$\begin{bmatrix}10 & 9 & -7\\ 4 & 4 & -3\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

zu c)

$$X:=A^{-1}*\begin{bmatrix}4 & 0 & -3 & 1\\ 1 & 5 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}49 & 38 & -5 & -13\\ 20 & 17 & -1 & -6\\ -5 & -4 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

Schnitt dreier Ebenen in einem Punkt: Aufg. 3.2.9