Prof. Dr. L. Paditz 01/2018

Mathematik II für Chemieing.

Austauschverfahren zur Untersuchung von LGS

==

Das Programm **LinEqSys(X,i,j)** arbeitet mit

Spaltentilgung, d.h. die getauschte y-Spalte wird

gelöscht.

X ... erweiterte Matrix (Starttabelle) zum LGS

A*x-b=o(=y)

i,j ... Indexpaar (Pivotwahl)

matnew ... Ergebnistabelle

Aufg. 3.2.4

Auf "Null" gestelltes LGS in Starttabelle eingeben:

Pivotwahl $a_{11}=1$, um y_1 mit x_1 zu tauschen.

Die Zusatzbedingung wird bereits als 5. Zeile mit

aufgenommen

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & -13 \\ 2 & 1 & 5 & -4 & -6 \\ 2 & -4 & 6 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow ST$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & -13 \\ 2 & 1 & 5 & -4 & -6 \\ 2 & -4 & 6 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(ST, 1, 1)

done

neue Tabelle T1 mit Spaltenreduzierung: y_1 mit x_1
getauscht

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 & 3 \\ 5 & -1 & 0 & -10 \\ 5 & 1 & -10 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & 10 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

in T1 jetzt $a_{22}=-1$ als Pivot, um y_2 mit x_3 (y_1 getilgt)
zu tauschen

LinEqSys(T1, 2, 2)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix} -8 & -3 & 23 \\ 5 & 0 & -10 \\ 10 & -10 & -10 \\ 10 & -10 & -10 \\ -2 & -2 & 12 \end{bmatrix}$$

in T2 jetzt $a_{31}=1$ als Pivot, um y_3 mit x_2 (y_2 getilgt) zu tauschen

LinEqSys(T2,3,1)

done

matnew→T3

$$\begin{bmatrix} -11 & 15 \\ 5 & -5 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$$

T3=ET, da y_4 nicht mehr tauschbar.

Mehrdeutige Lösung für das LGS mit 4 Zeilen:

$$\begin{bmatrix} T3 & x_4=s & 1 \\ x_1 & -11 & 15 \\ x_3 & 5 & -5 \\ x_2 & 1 & 1 \\ y_4 & 0 & 0 \\ y_5 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

Lösung ablesen: mehrdeutig!

$x_1=-11s+15, x_2=s+1, x_3=5s-5, \; x_4=s, \; s\in\mathbf{R}$

5. Zeile widerspruchsfrei für s=2.5: $y_5=0$

stop

Rang der erweiterten Matrix ST=(A,b):

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & -13 \\ 2 & 1 & 5 & -4 & -6 \\ 2 & -4 & 6 & -4 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

3

Rang der Matrix A:

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 & -4 \end{bmatrix}\right)$$

3

Ranggleichheit, d.h. LGS lösbar!

Probe:

$$(-11s+15)*\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}+(s+1)*\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}+(5s-5)*\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}+s*\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 15-2\cdot(1+s)-2\cdot(5-5\cdot s)-8\cdot s \\ 10+3\cdot(1+s)-3\cdot s \\ 1-5\cdot(5-5\cdot s)+2\cdot(15-11\cdot s)-3\cdot s \\ -4\cdot(1+s)-6\cdot(5-5\cdot s)+2\cdot(15-11\cdot s)-4\cdot s \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

jetzt in 5.Zeile tauschen: y_5 mit x_4

LinEqSys(T3,5,1)

done

matnew➔ET

$$\begin{bmatrix} -12.5 \\ 7.5 \\ 3.5 \\ 0 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ET & 1 \\ x_1 & -12.5 \\ x_3 & 7.5 \\ x_2 & 3.5 \\ y_4 & 0 \\ x_4 & 2.5 \end{bmatrix}$$

spezielle Lösung: $x=\begin{bmatrix} -12.5 \\ 3.5 \\ 7.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$

inverse Matrix mit 1. bis 3. und 5. Zeile:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} -0.25 & -1 & -0.25 & 2.75 \\ -0.15 & 0.3 & 0.05 & -0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 & -1.25 \\ 0.15 & 0.2 & -0.05 & -0.25 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$-40$$

Rangbestimmung mit **AVRank(X, i, j)**, Zeilen- und Spaltentilgung:

Rang = Anzahl der möglichen Austauschschritte

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & -13 \\ 2 & 1 & 5 & -4 & -6 \\ 2 & -4 & 6 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow ST$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & -13 \\ 2 & 1 & 5 & -4 & -6 \\ 2 & -4 & 6 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

AVRank(ST,1,1)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & -10 \\ 5 & 1 & -10 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & 10 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

AVRank(T1,1,1)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix} 2 & -10 & 10 \\ 2 & -10 & 10 \\ -0.4 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

AVRank(T2,1,1)

done

matnew⇒T3

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$$

AVRank(T3,2,1)

done

matnew⇒T4

[0]

ohne Zusatzbedigung: r(A)=r(A,b)=3

mit Zusatzbedingung: r(A)=r(A,b)=4

Gauß–Algorithmus mit rref–Befehl:

$$\mathrm{rref}\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 13 \\ 2 & 1 & 5 & -4 & 6 \\ 2 & -4 & 6 & -4 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -12.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eindeutige Lösung mit Zusatzbedingung: $x=\begin{bmatrix} -12.5 \\ 3.5 \\ 7.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$

$$\mathrm{rref}\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 13 \\ 2 & 1 & 5 & -4 & 6 \\ 2 & -4 & 6 & -4 & -4 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mehrdeutige Lösung ohne Zusatzbedingung:

$$x=\begin{bmatrix}-11t+15\\ t+1\\ 5t-5\\ t\end{bmatrix},\ t\in\mathbf{R}$$

Probe:

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 5 & -4\\ 2 & -4 & 6 & -4\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}-11t+15\\ t+1\\ 5t-5\\ t\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}15-2\cdot(1+t)-2\cdot(5-5\cdot t)-8\cdot t\\ 10+3\cdot(1+t)-3\cdot t\\ 1-5\cdot(5-5\cdot t)+2\cdot(15-11\cdot t)-3\cdot t\\ -4\cdot(1+t)-6\cdot(5-5\cdot t)+2\cdot(15-11\cdot t)-4\cdot t\end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix}3\\ 13\\ 6\\ -4\end{bmatrix}$$

gleiche Lösungsdarstellung: s=t setzen

zuerst

$$(-11s+15)*\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 2\\ 2\end{bmatrix}+(s+1)*\begin{bmatrix}-2\\ 3\\ 1\\ -4\end{bmatrix}+(5s-5)*\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 5\\ 6\end{bmatrix}+s*\begin{bmatrix}3\\ 3\\ -4\\ -4\end{bmatrix}$$

Linearkombination für rechte Seite $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}3\\ 13\\ 6\\ -4\end{bmatrix}$

Cramersche Regel:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow b$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 3 \\ 13 & 3 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow D1$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 3 \\ 13 & 3 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 13 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow D2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 13 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 13 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow D3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 13 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 13 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow D4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 13 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \det(D1) \\ \det(D2) \\ \det(D3) \\ \det(D4) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -12.5 \\ 3.5 \\ 7.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

Prof. Dr. L. Paditz 01/2018

Mathematik II für Chemieing.

Austauschverfahren zur Untersuchung von LGS

==

Das Programm **LinEqSys(X,i,j)** arbeitet mit **Spaltentilgung**, d.h. die getauschte y-Spalte wird gelöscht.

X ... erweiterte Matrix (Starttabelle) zum LGS **A*x-b=o(=y)**

i,j ... Indexpaar (Pivotwahl in jedem Schritt per Hand festlegen)

matnew ... Ergebnistabelle

Aufg. 3.2.11c)

Auf "Null" gestelltes LGS in Starttabelle eingeben:

Pivotwahl a_{44}, um y_4 mit x_4 zu tauschen.

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 & 17 & 20 \\ 3 & 2 & 5 & 8 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow ST$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 & 17 & 20 \\ 3 & 2 & 5 & 8 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

LinEqSys(ST, 4, 4)

done

neue Tabelle T1 mit Spaltenreduzierung: y_4 mit x_4 getauscht (y_4-Spalte in T1 gelöscht)

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 42 & -48 \\ 3 & 2 & 21 & -24 \\ 3 & 2 & 21 & -24 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

in T1 jetzt a_{32} als Pivot, um y_3 mit x_2 zu tauschen

LinEqSys(T1, 3, 2)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1.5 & -10.5 & 12 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

T2=ET, da keine Pivotwahl mehr möglich ist.

$$\begin{bmatrix} ET & x_1=s & x_3=t & 1 \\ y_1 & 0 & 0 & 0 \\ y_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & -1.5 & -10.5 & 12 \\ x_4 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Lösung ablesen: mehrdeutig!

$x_1=s$, $x_2=-1.5s-10.5t+12$, $x_3=t$, $x_4=2t-4$, $s,t\in\mathbf{R}$

Rang der erweiterten Matrix ST=(A,b):

rank(ST)

2

Rang der Matrix A:

$$\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 & 17 \\ 3 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

2

Ranggleichheit, d.h. LGS lösbar!

Probe:

$$s*\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}+(-1.5s-10.5t+12)*\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}+t*\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}+(2t-4)*\begin{bmatrix} 17 \\ 8 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -17\cdot(4-2\cdot t)+4\cdot(12-10.5\cdot t-1.5\cdot s)+8\cdot t+6\cdot s \\ -8\cdot(4-2\cdot t)+2\cdot(12-10.5\cdot t-1.5\cdot s)+5\cdot t+3\cdot s \\ -7\cdot(4-2\cdot t)+2\cdot(12-10.5\cdot t-1.5\cdot s)+7\cdot t+3\cdot s \\ 4 \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} -20 \\ -8 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Zusatz: Die Anzahl der Austauschritte ist der Rang der untersuchten Matrix.

AVRank(X, i, j) arbeitet mit Zeilen- und Spaltentilgung.

ST

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 & 17 & 20 \\ 3 & 2 & 5 & 8 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

AVRank(ST, 1, 1)

done

matnew⇒T1

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -0.5 & -2 \\ 0 & 3 & -1.5 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

AVRank(T1, 1, 2)

done

matnew⇒T2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 Austauschritte möglich, d.h.

r(**ST**)=2=r(**A**)=r(**A, b**).

Zeilenstufenform (Gauß-Algorithmus):

ST

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 & 17 & 20 \\ 3 & 2 & 5 & 8 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 & 17 & -20 \\ 3 & 2 & 5 & 8 & -8 \\ 3 & 2 & 7 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow Ab$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 & 17 & -20 \\ 3 & 2 & 5 & 8 & -8 \\ 3 & 2 & 7 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Ausgangssystem:

$$\begin{bmatrix} \text{LGS} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & & b \\ Z1 & 6 & 4 & 8 & 17 & = & -20 \\ Z2 & 3 & 2 & 5 & 8 & = & -8 \\ Z3 & 3 & 2 & 7 & 7 & = & -4 \\ Z4 & 0 & 0 & 2 & -1 & = & 4 \end{bmatrix}$$

rref(Ab)

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ergebnis: äquivalentes LGS (kein Variablentausch)

$$\begin{bmatrix} \text{rref} & x_1 & x_2=s & x_3 & x_4=t & & b \\ Z1 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{7}{2} & = & -6 \\ Z2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & = & 2 \\ Z3 & 0 & 0 & 0 & 0 & = & 0 \\ Z4 & 0 & 0 & 0 & 0 & = & 0 \end{bmatrix}$$

Lösung ablesen: $x_4=t$, $x_3=0.5t+2$, $x_2=s$,

$x_1=-\frac{2}{3}s-3.5t-6$, $s,t\in\mathbf{R}$

Probe:

$$(-\frac{2}{3}s-3.5t-6)*\begin{bmatrix}6\\3\\3\\0\end{bmatrix}+s*\begin{bmatrix}4\\2\\2\\0\end{bmatrix}+(0.5t+2)*\begin{bmatrix}8\\5\\7\\2\end{bmatrix}+t*\begin{bmatrix}17\\8\\7\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}8\cdot\left(2+\frac{t}{2}\right)-6\cdot\left(6+\frac{7\cdot t}{2}+\frac{2\cdot s}{3}\right)+17\cdot t+4\cdot s\\5\cdot\left(2+\frac{t}{2}\right)-3\cdot\left(6+\frac{7\cdot t}{2}+\frac{2\cdot s}{3}\right)+8\cdot t+2\cdot s\\7\cdot\left(2+\frac{t}{2}\right)-3\cdot\left(6+\frac{7\cdot t}{2}+\frac{2\cdot s}{3}\right)+7\cdot t+2\cdot s\\2\cdot\left(2+\frac{t}{2}\right)-t\end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix}-20\\-8\\-4\\4\end{bmatrix}$$

Damit wurde eine andere Lösungsdarstellung gefunden:

zuerst:

$$s_1*\begin{bmatrix}6\\3\\3\\0\end{bmatrix}+(-1.5s_1-10.5t_1+12)*\begin{bmatrix}4\\2\\2\\0\end{bmatrix}+t_1*\begin{bmatrix}8\\5\\7\\2\end{bmatrix}+(2t_1-4)*\begin{bmatrix}17\\8\\7\\-1\end{bmatrix}$$

dann

$$\left(-\frac{2}{3}s_2-3.5t_2-6\right)*\begin{bmatrix}6\\3\\3\\0\end{bmatrix}+s_2*\begin{bmatrix}4\\2\\2\\0\end{bmatrix}+(0.5t_2+2)*\begin{bmatrix}8\\5\\7\\2\end{bmatrix}+t_2*\begin{bmatrix}17\\8\\7\\-1\end{bmatrix}$$

mit $s_1=-\frac{2}{3}s_2-3.5t_2-6$ und $t_1=0.5t_2+2$ gehen die Darstellungen ineinander über:

$-1.5s_1-10.5t_1+12|\{s_1=-\frac{2}{3}s_2-3.5t_2-6, t_1=0.5t_2+2\}$

$$12-\frac{21\cdot\left(2+\frac{t_2}{2}\right)}{2}+\frac{3\cdot\left(6+\frac{7\cdot t_2}{2}+\frac{2\cdot s_2}{3}\right)}{2}$$

simplify(ans)

$$s_2$$

$2t_1-4|\{s_1=-\frac{2}{3}s_2-3.5t_2-6, t_1=0.5t_2+2\}$

$$-4+2\cdot\left(2+\frac{t_2}{2}\right)$$

simplify(ans)

$$t_2$$

□