Prof. Dr. Ludwig Paditz, 6.Mathe-Intensivkurs 2015

Einführung in die CAS-Software (ClassPad)
==
Kurs Prof. Scholz:

Logarithmen: im CAS werden alle Logarithmen über den natürlichen Logarithmus ln(...) dargestellt.

Hinweis: im CAS werden Argumente von Funktionen **stets in Klammern** gesetzt,
z.B. ln(x) statt ln x oder ln$x$
Dann kann es nicht zu Irritationen kommen, was z.B. lnxy bedeutet: ln(xy) oder ln(x)y=y*ln(x)=ln(x^y)

Beispiele:

1) Termumformung mit $16=2^4$

$\log_2(16)=4$

$$4=4$$

2^{ans}

$$16=16$$

2) Termumformung für x∈R

$\log_{1/2}(4)=x$

$$-2=x$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{ans}$

$$4=\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

solve(ans, x)

$$\{x=-2\}$$

3) Gleichungsumformung für x>0

$\log_3(x)=4$

$$\frac{\ln(x)}{\ln(3)}=4$$

$3^{\log_3(x)}=3^4$

$$3^{\frac{\ln(x)}{\ln(3)}}=81$$

simplify($3^{\log_3(x)}$)

$$x$$

solve($\log_3(x)=4$, x)

$$\{x=81\}$$

4) Gleichungsumformung für x>0 und x≠1

$\log_x(27)=3$

$$\frac{3\cdot\ln(3)}{\ln(x)}=3$$

$x^{\log_x(27)}=x^3$

$$x^{\frac{3\cdot\ln(3)}{\ln(x)}}=x^3$$

simplify(ans)

$$27=x^3$$

solve($\log_x(27)=3$, x)

$$\{x=3\}$$

5) Termumformung für $b>0$ und $\frac{a}{c+d}>0$

Hinw.: log bezeichnet im TR den dekadischen Logarithmus

$judge(\log(\frac{a\times\sqrt{b}}{c+d})=\log_{10}\left(\frac{a\times\sqrt{b}}{c+d}\right))$

TRUE

$\log(\frac{a\times\sqrt{b}}{c+d})$

$\log\left(\frac{a\cdot\sqrt{b}}{c+d}\right)$

expand(ans)

$\log\left(\frac{a\cdot\sqrt{b}}{c+d}\right)$

Im CAS erfolgte keine Zerlegung von $\log(\frac{a\times\sqrt{b}}{c+d})$, da dem CAS die Vorzeichen von a, b, c, d unbekannt sind.

$expand(\log(\frac{a\times\sqrt{b}}{c+d})\,|\,\{a>0, b>0, c>0, d>0\})$

$\log(a)+\frac{\log(b)}{2}-\log(c+d)$

Zerlegung erfolgt im CAS unter der Vorgabe
$a>0, b>0, c>0, d>0$.

6) für $a>0$, $b>0$, $c>0$

$\ln(2a)+2\ln(b)-2\ln(2c)$

$\ln(a)+2\cdot\ln(b)-2\cdot(\ln(c)+\ln(2))+\ln(2)$

simplify(ans)

$2\cdot\ln(b)-2\cdot\ln(c)+\ln\left(\frac{a}{2}\right)$

combine(ans)

$$2\cdot\ln(b)-2\cdot\ln(c)+\ln\left(\frac{a}{2}\right)$$

combine(ans|{a>0, b>0, c>0})

$$\ln\left(\frac{a\cdot b^2}{2\cdot c^2}\right)$$

Zusammenfassung erfolgt im CAS unter der Vorgabe a>0, b>0, c>0.

$$\text{judge}\left(\ln\left(\frac{2a\times b^2}{(2c)^2}\right)=\ln(2a)+2\ln(b)-2\ln(2c)\right)$$

Undefined

$$\text{judge}\left(\ln\left(\frac{2a\times b^2}{(2c)^2}\right)=\ln(2a)+2\ln(b)-2\ln(2c)\,|\,\{a>0, b>0, c>0\}\right)$$

TRUE

Bem.: Termumformungen sind an Vorzeichenbedingungen gebunden.

7) Zusammenfassung

$$\frac{1}{2}\log_2(x\hat{}2-x\times y+y\hat{}2)+\frac{1}{2}\log_2(x+y)$$

$$\frac{\ln\left(x^2+y^2-x\cdot y\right)}{2\cdot\ln(2)}+\frac{\ln(x+y)}{2\cdot\ln(2)}$$

simplify(ans)

$$\frac{\ln\left(x^2+y^2-x\cdot y\right)+\ln(x+y)}{2\cdot\ln(2)}$$

simplify(ans|{x>0, y>0})

$$\frac{\ln\left(x^3+y^3\right)}{2\cdot\ln(2)}$$

Bem.: Zurückführung auf die ln−Funktion (Basis ***e***)

$$\text{judge}\left(\frac{\ln\left(x^2+y^2-x\cdot y\right)+\ln(x+y)}{2\cdot\ln(2)}=\frac{\ln\left(\left(x^2+y^2-x\cdot y\right)(x+y)\right)}{2\cdot\ln(2)}\right)$$

Undefined

$$\text{judge}\left(\frac{\ln\left(x^2+y^2-x\cdot y\right)+\ln(x+y)}{2\cdot\ln(2)}=\frac{\ln\left(\left(x^2+y^2-x\cdot y\right)(x+y)\right)}{2\cdot\ln(2)}\,|x>0\ \text{a}\right.$$

TRUE

Bem.: ohne Vorzeichenbedingung ist Gleichheit nicht überprüfbar!

$$\text{simplify}\left(\left(x^2+y^2-x\cdot y\right)(x+y)\right)$$

$$x^3+y^3$$

$$\text{judge}\left(\frac{\ln\left(x^2+y^2-x\cdot y\right)+\ln(x+y)}{2\cdot\ln(2)}=\frac{\ln\left(x^3+y^3\right)}{2\cdot\ln(2)}\right)$$

Undefined

$$\text{judge}\left(\frac{\ln\left(x^2+y^2-x\cdot y\right)+\ln(x+y)}{2\cdot\ln(2)}=\frac{\ln\left(x^3+y^3\right)}{2\cdot\ln(2)}\,|x>0\ \text{and}\ y>0\right)$$

TRUE

$$\text{judge}\left(\frac{\ln\left(x^2+y^2-x\cdot y\right)+\ln(x+y)}{2\cdot\ln(2)}=\frac{1}{2}\log_2\left(x^3+y^3\right)\right)$$

Undefined

$$\text{judge}\left(\frac{\ln\left(x^2+y^2-x\cdot y\right)+\ln(x+y)}{2\cdot\ln(2)}=\frac{1}{2}\log_2\left(x^3+y^3\right)\,|x>0\ \text{and}\ y>0\right)$$

TRUE

$$\log_2\left(\sqrt{x^3+y^3}\right)$$

$$\frac{\ln\left(x^3+y^3\right)}{2\cdot\ln(2)}$$

$\text{judge}\left(\frac{1}{2}\log_2(x\hat{}2-x\cdot y+y\hat{}2)+\frac{1}{2}\log_2(x+y)=\log_2\left(\sqrt{x^3+y^3}\right)\right)$

Undefined

$\text{judge}\left(\frac{1}{2}\log_2(x\hat{}2-x\times y+y\hat{}2)+\frac{1}{2}\log_2(x+y)=\log_2\left(\sqrt{x^3+y^3}\right) \mid x>0\right.$ ▶

TRUE

8) Bestimmungsgleichung für x∈R

$\log(2^x)+\log(3^x)+\log(5^x)=4$

$x\cdot\log(5)+x\cdot\log(3)+x\cdot\log(2)=4$

factor(ans)

$x\cdot\log(30)=2^2$

solve(ans, x)

$\left\{x=\frac{4}{\log(3)+1}\right\}$

Bem.: eine kurze Lösungsdarstellung ist $x=\frac{4}{\log(30)}$

9) Bestimmungsgleichung für x∈R mit a>0 und b>0

$a^{5-x}=(3b)^{x+1}$

$a^{-x+5}=(3\cdot b)^{x+1}$

$\text{solve}(a^{5-x}=(3b)^{x+1}, x)$

$\left\{-(3\cdot b)^{x+1}+a^{-x+5}=0\right\}$

$\text{solve}\left(\ln\left(a^{5-x}=(3b)^{x+1}\right), x\right)$

$\left\{-3\cdot a^x\cdot b\cdot(3\cdot b)^x+a^5=0\right\}$

$\text{solve}\left(\ln\left(a^{5-x}=(3b)^{x+1}\right) \mid a>0 \text{ and } b>0, x\right)$

$\left\{x=\frac{5\cdot\ln(a)}{\ln(a)+\ln(b)+\ln(3)}-\frac{\ln(b)}{\ln(a)+\ln(b)+\ln(3)}-\frac{\ln(3)}{\ln(a)+\ln(b)+\ln(3)}\right\}$

simplify(ans|a>0 and b>0)

$$\left\{x=\frac{\ln\left(\frac{a^5}{3\cdot b}\right)}{\ln(3\cdot a\cdot b)}\right\}$$

Bem.: die logarithmierte Gl. ist leichter lösbar

Bem.: kompakte Lösungsdarstellung $\frac{1}{\ln(3a\cdot b)}\ln\left(\frac{a^5}{3\cdot b}\right)$

$$\text{judge}\left(\frac{5-\log_a(3)-\log_a(b)}{1+\log_a(3)+\log_a(b)}=\frac{1}{\ln(3a\cdot b)}\ln\left(\frac{a^5}{3\cdot b}\right)\right)$$

Undefined

$$\text{judge}\left(\frac{5-\log_a(3)-\log_a(b)}{1+\log_a(3)+\log_a(b)}=\frac{1}{\ln(3a\cdot b)}\ln\left(\frac{a^5}{3\cdot b}\right)\mid a>0 \text{ and } b>0\right)$$

TRUE

Bem.: für a=b=0 erhält man die mehrdeutige Lösung: **$-1<x<5$**

$a^{5-x}=(3b)^{x+1}\mid a=0$ and $b=0$

$$0^{-x+5}=0^{x+1}$$

solve(ans, x)

No Solution

solve($0^{-x+5}=0^{x+1}\mid x>-1$ and $x<5$, x)

No Solution

solve($0^{-x+5}=0^{x+1}$, x, 2, −1, 5)

{x=1.9, x=1.95, x=1.975, x=1.987460691, x=2, x=2.0062402

Warnhinweis vom System: weitere Lösungen können existieren!

$0^{-x+5}=0^{x+1}\mid x=2$

$0=0$

$0^{-x+5}=0^{x+1} \mid x=1.95$

$0=0$

10) Termumformung für a>0, a≠1, und b>0, b≠1,

$\log_a(b)\left(\log_a(a\cdot b)\log_b(a)-1\right)$

$$\frac{\left(\frac{\ln(a\cdot b)}{\ln(b)}-1\right)\cdot\ln(b)}{\ln(a)}$$

simplify(ans)

$$\frac{\ln(a\cdot b)-\ln(b)}{\ln(a)}$$

simplify(ans|a>0 and b>0)

1

11) Bestimmungsgleichung für x∈R mit Logarithmen

$\log_a\left(\log_b\left(\log_c(x)+1\right)+1\right)=0$

$$\frac{\ln\left(\frac{\ln\left(\frac{\ln(x)}{\ln(c)}+1\right)}{\ln(b)}+1\right)}{\ln(a)}=0$$

solve(ans, x)

$\{x=1\}$

Ergebnis: für alle a, b, c>0 und a, b, c≠1 gilt x=1

Beispiel:

$\log_a\left(\log_b\left(\log_c(x)+1\right)+1\right)=0 \mid \{a=5, b=3, c=40\}$

$$\frac{\ln\left(\frac{\ln\left(\frac{\ln(x)}{\ln(5)+3\cdot\ln(2)}+1\right)}{\ln(3)}+1\right)}{\ln(5)}=0$$

solve(ans, x)

$$\{x=1\}$$

Aufgaben

==========

1. Vereinfachen

a) für a, x, y>0 und a≠1

$$\frac{1}{2}\log_a(x)+\frac{1}{2}\log_a(x\cdot y)-\log_a(y)$$

$$\frac{\ln(x\cdot y)}{2\cdot\ln(a)}+\frac{\ln(x)}{2\cdot\ln(a)}-\frac{\ln(y)}{\ln(a)}$$

simplify(ans)

$$\frac{\ln(x\cdot y)+\ln(x)-2\cdot\ln(y)}{2\cdot\ln(a)}$$

simplify(ans|x>0 and y>0)

$$\frac{\ln\left(\frac{x^2}{y}\right)}{2\cdot\ln(a)}$$

$$\text{judge}\left(\frac{\ln\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)}{\ln(a)}=\frac{1}{2}\log_a(x)+\frac{1}{2}\log_a(x\cdot y)-\log_a(y)\right)$$

FALSE

Bem.: ohne Vorzeichenbedingungen wird die Gleichung als unkorrekt beurteilt.

Besser wäre die Antwort **Undefined** statt **FALSE.**

==

Beispiel mit negativen Zahlen führt auf komplexe Zahlen:

$$\frac{\ln\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)}{\ln(a)} \mid a=e \text{ and } x=-3 \text{ and } y=-3$$

$$\frac{\ln(3)}{2}+\frac{\pi\cdot j}{2}$$

simplify(ans)

$$\frac{\ln(3)+\pi\cdot j}{2}$$

$$\frac{1}{2}\log_a(x)+\frac{1}{2}\log_a(x\cdot y)-\log_a(y) \mid a=e \text{ and } x=-3 \text{ and } y=-3$$

$$-\pi\cdot j+\frac{\ln(3)+\pi\cdot j}{2}$$

simplify(ans)

$$\frac{\ln(3)-\pi\cdot j}{2}$$

==

$$\text{judge}\left(\frac{\ln\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)}{\ln(a)}=\frac{1}{2}\log_a(x)+\frac{1}{2}\log_a(x\cdot y)-\log_a(y) \mid \{x>0, y>0, a>0\right.$$

TRUE

$$\text{judge}\left(\log_a\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)=\frac{\ln\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)}{\ln(a)}\right)$$

TRUE

b) für a, b, x, y>0 und a, b≠1

$$\frac{\log_a\left(\frac{a^x}{y}\right)\log_b(y\times a^x)}{\log_b(a)}$$

$$\frac{\ln\left(\frac{a^x}{y}\right)\cdot\ln(a^x\cdot y)}{(\ln(a))^2}$$

simplify(ans)

$$\frac{\ln\left(\frac{a^x}{y}\right)\cdot\ln\left(a^x\cdot y\right)}{(\ln(a))^2}$$

simplify(ans|{a>0, y>0})

$$x^2-\frac{(\ln(y))^2}{(\ln(a))^2}$$

$$\text{judge}\left(\frac{\log_a\left(\frac{a^x}{y}\right)\log_b\left(y\times a^x\right)}{\log_b(a)}=x^2-\left(\frac{\ln(y)}{\ln(a)}\right)^2\right)$$

Undefined

$$\text{judge}\left(\frac{\log_a\left(\frac{a^x}{y}\right)\log_b\left(y\times a^x\right)}{\log_b(a)}=x^2-\left(\frac{\ln(y)}{\ln(a)}\right)^2 \,\middle|\, \{a>0, b>0, y>0\}\right)$$

TRUE

2. Bestimmungsgleichungen für x (ohne zusätzliche Parameter a, b, ...)

a)

solve(3^x=27)

{x=3}

b)

solve(10^x=0.001, x)

{x=−3}

c)

solve(8^x=4, x)

$$\left\{x=\frac{2}{3}\right\}$$

d)

$\text{solve}(\log_x\left(\frac{1}{32}\right)=-5, x)$

$\{x=2\}$

e)

$\text{solve}(\log_x\left(\frac{1}{5}\right)=-1, x)$

$\{x=5\}$

f)

$\text{solve}(\log_{\frac{1}{5}}(x)=-2, x)$

$\{x=25\}$

g)

$\text{simplify}(\log(10)=x)$

$1=x$

h)

$\text{simplify}(\log_7(49)=x)$

$2=x$

i)

$\text{simplify}(\log_6\left(\sqrt[5]{36}\right)=x)$

$\frac{2}{5}=x$

3. Bestimmungsgleichungen für x

a)

$\text{solve}(2^{6x-2}=4^{2x+3}, x)$

$\{x=4\}$

b)

$\text{solve}(\log_3\left(4\cdot 3^{x-1}-1\right)=2x-1, x)$

$\{x=0, x=1\}$

Warnhinweis vom System: weitere Lösungen können existieren!

$\log_3(4\cdot 3^{x-1}-1)=2x-1$

$$\frac{\ln(4\cdot 3^{x-1}-1)}{\ln(3)}=2\cdot x-1$$

$3^{\log_3(4\cdot 3^{x-1}-1)}=2x-1$

$$3^{\frac{\ln(4\cdot 3^{x-1}-1)}{\ln(3)}}=3^{2\cdot x-1}$$

simplify(ans)

$$\frac{4\cdot 3^x}{3}-1=\frac{3^{2\cdot x}}{3}$$

Substitution: $3^x=z$

solve$\left(\frac{4\cdot z}{3}-1=\frac{z^2}{3},z\right)$

$$\{z=1,z=3\}$$

$\log_3(\text{ans}\,|\,z=3^x)$

$$\{x=0,x=1\}$$

Damit gibt es nur zwei Lösungen $x=0,x=1$

c)

$\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-7}=\left(\frac{4}{3}\right)^{7x-3}$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{3\cdot x-7}=\left(\frac{4}{3}\right)^{7\cdot x-3}$$

solve(ans, x)

$$\{x=1\}$$

Warnhinweis vom System: weitere Lösungen können existieren!

Zwischenschritt:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{7x-3}=\left(\frac{3}{4}\right)^{3-7x}$$

Exponentenvergleich: $3x-7=3-7x$ ergibt eindeutig $x=1$.