TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

ÜBER MITTLERE ABWEICHUNGEN

von
Ludwig Paditz
Sektion Mathematik

07 - 33 - 77

INFORMATIONEN

Als Manuskript gedruckt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

ÜBER MITTLERE ABWEICHUNGEN

von
Ludwig Paditz
Sektion Mathematik
07 - 33 - 77

1. EINLEITUNG

Es sei (X_{nk}, $k=1,2,\dots,k_n$, $n=1,2,\dots$) eine Doppelfolge von Zufallsgrößen mit der Eigenschaft, daß für jedes n die Zufallsgrößen X_{n1}, $X_{n2},\dots,X_{nk_n}$ voneinander unabhängig sind. Solch eine Doppelfolge wird kurz Serienschema genannt. Weiterhin sei $(k_n)_{n=1,2,\dots}$ eine monoton wachsende Zahlenfolge mit

$$\lim_{n\to\infty} k_n = \infty \quad .$$

Mit $F_{nk}(x)$ wird die Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X_{nk} bezeichnet. Wir benutzen die Größen

$$N=k_n,\ \sigma_{nk}^2=D^2X_{nk}<\infty\ ,\ B_N^2=\sum_{k=1}^{N}\sigma_{nk}^2>0,\ \beta_{nk}^q=E|X_{nk}|^q<\infty\ ,\ (q>2)$$

und

$$\beta_N^q = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{nk}^q \ .$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $EX_{nk}=0$ für alle k und n. Schließlich sei $F_n(x)$ die N-fache Faltung der Verteilungsfunktionen F_{n1}, F_{n2}, ..., F_{nN} der n-ten Serie des Serienschemas an der Stelle x, d.h.

$$F_n(x) = (\mathop{\ast}_{k=1}^{N} F_{nk})(x),$$

die wir Summenverteilungsfunktion nennen.

Eine wichtige Aufgabe der Summationstheorie unabhängiger Zufallsgrössen ist die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der sogenannten "Schwänze" $1-F_n(xB_N)$ bzw. $F_n(-xB_N)$ der Summenverteilungsfunktion $F_n(xB_N)$, wenn das Argument x von n abhängt und für $n\to\infty$ unbeschränkt anwächst. Als Maßstab für das asymptotische Verhalten der Schwänze von $F_n(xB_N)$ wird speziell das asymptotische Verhalten der Schwänze der Grenzverteilungsfunktion $\Phi(x)$ genommen, wobei $\Phi(x)$ die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung ist. Insbesondere wurden bei den Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen im zentralen Grenzwertsatz die asymptotischen Beziehungen

$$\frac{1-F_n(xB_N)}{1-\Phi(x)} = 1+o(1) \quad \text{bzw.} \quad \frac{F_n(-xB_N)}{\Phi(-x)} = 1+o(1) \ (\text{für } n\to\infty) \qquad (1)$$

betrachtet. In Abhängigkeit von der Wachstumsgeschwindigkeit des Arguments $x=x(n)$ gegen Unendlich kristallisierte sich Mitte der sechziger Jahre eine Unterteilung des Forschungsgebietes der großen Abweichungen heraus, und zwar finden wir in der Arbeit von H.RUBIN und J.SETHURAMAN /12/ folgende Klassifikation der großen Abweichungen:

gewöhnliche, mittlere, große und übergroße Abweichungen.

In dem vorliegenden Artikel werden speziell integrale Grenzwertsätze für mittlere Abweichungen näher studiert, die Aussagen über die Gültigkeit der asymptotischen Beziehungen (1) darstellen, wenn das Argument x mit der Ordnung

$$x = x(n) = O(\sqrt{\ln N}) \quad (\text{für } n \to \infty) \tag{2}$$

anwächst.

Die Betrachtungen zur Theorie der Grenzwertsätze mittlerer Abweichungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen haben in den letzten 10 Jahren eine rasche Entwicklung genommen. Viele eigenständige Arbeiten sind zu diesem Problemkreis entstanden, z.B. von H.RUBIN/J.SETHURAMAN /12/, J.A.DAVIS /3/, V.K.ROHATGI /11/, N.N.AMOSOVA /1/, R.MICHEL /6/, W.WOLF /14/ und L.PADITZ /8/. Den erhaltenen Ergebnissen in /9/ folgend sind die Zufallsgrößen, für deren Summenverteilungsfunktionen die Limesbeziehungen (1) im Sinne der Grenzwertsätze für mittlere Abweichungen gelten, gerade durch die Existenz absoluter Momente einer gewissen Ordnung $q > 2$ charakterisiert. Entsprechend der Forderung (2) betrachten wir das x-Intervall

$$1 \leqq x \leqq A\sqrt{\ln N}, \tag{3}$$

wobei A eine positive Konstante ist. In der Terminologie J.V.LINNIKs /5/ wird das x-Gebiet (3) allgemein als "sehr enge" Zone des integralen normalen Anziehungsbereiches (INA-Zone) bezeichnet.

In den folgenden Abschnitten werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit von Grenzwertsätzen für mittlere Abweichungen untersucht. Dabei werden bekannte Grenzwertsätze verallgemeinert, indem ein genauer Zusammenhang zwischen der absoluten Konstanten A aus der INA-Zone (3) und der Ordnung q der absoluten Momente der betrachteten Zufallsgrößen aufgezeigt wird. Gleichzeitig wird in den Grenzwertsätzen für mittlere Abweichungen das in den asymptotischen Beziehungen (1) auftretende Restglied genauer analysiert.

2. ALLGEMEINE GRENZWERTSÄTZE FÜR MITTLERE ABWEICHUNGEN MIT ANGABE DER ORDNUNG DER KONVERGENZGESCHWINDIGKEIT

Wir betrachten das oben eingeführte Serienschema.

SATZ 1: In jeder Serie, also für n=1,2,..., gelte

$$EX_{nk}=0,\ EX_{nk}^2<\infty,\ k=1,2,\dots,N, \tag{4}$$

und weiterhin

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{N} B_N^2 > 0, \tag{5}$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \beta_N^q < \infty \text{, für ein } q=2+c_0^2,\ c_0>0. \tag{6}$$

Dann gelten für $n\to\infty$ im Gebiet $1 \leq x \leq c\sqrt{\ln N}$, $c>0$, folgende asymptotische Beziehungen

$$\frac{1-F_n(xB_N)}{1-\emptyset(x)}=1+O\left(\frac{x^{4-\min(1,c_0^2)}}{N^t}\right),\quad \frac{F_n(-xB_N)}{\emptyset(-x)}=1+O\left(\frac{x^{4-\min(1,c_0^2)}}{N^t}\right) \tag{7}$$

für $c<c_0$ und mit $t=\min\left(\frac{c_0^2-c^2}{2},\frac{q-1}{2q}\min(1,c_0^2)\right)$

und

$$\frac{1-F_n(xB_N)}{1-\emptyset(x)}=1+o\left(\frac{1}{x^{q-1}\ln N}\right),\qquad \frac{F_n(-xB_N)}{\emptyset(-x)}=1+o\left(\frac{1}{\text{[illegible]}}\right) \tag{8}$$

für $c \geq c_0$.

Aus diesem Satz erhalten wir folgende Aussagen:

FOLGERUNG 1: Es seien die Voraussetzungen (4) bis (6) mit $q \geq 3$ erfüllt.

Dann gelten für $n\to\infty$ im Gebiet (3) mit $A=\sqrt{q-3+\frac{1}{q}}$ die Beziehungen

$$\frac{1-F_n(xB_N)}{1-\emptyset(x)}=1+O\left(\frac{x^3}{N^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{q})}}\right) \text{ und } \frac{F_n(-xB_N)}{\emptyset(-x)}=1+O\left(\frac{x^3}{N^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{q})}}\right). \tag{9}$$

FOLGERUNG 2: Es seien die Voraussetzungen (4) bis (6) mit $q=2+c_0^2>2$ erfüllt. Dann gelten die Limesbeziehungen (1) im Gebiet (3) mit $A=\sqrt{q-2}$.

An dieser Stelle sei bemerkt, daß W.-D.RICHTER /10/ im Falle unabhängiger und identisch verteilter Zufallsgrößen (mit $q>3$) in den asymptotischen Beziehungen (9) die Konvergenzgeschwindigkeit $O(\frac{x^3}{\sqrt{n}})$ erhielt, wobei er allerdings die engere INA-Zone

$$1 \leq x \leq \Lambda(n) \quad \text{mit} \sqrt{\frac{1}{s}(q-3)\ln n} < \Lambda(n) < \sqrt{\frac{2}{s}(q-3)\ln n}\ ,\ s>2,$$

zugrunde legte.

Für Folgen unabhängiger Zufallsgrößen mit der Eigenschaft, daß sie absolute Momente der Ordnung q, $q>2$ bzw. $q \geq 3$, besitzen, wurden bereits in der Literatur mehrere Betrachtungen zur Gültigkeit von asymptotischen Beziehungen der Form (1) angestellt. W.WOLF /13/ bewies 1974, indem er ein Ergebnis für identisch verteilte Zufallsgrößen (mit $q \geq 3$) von J.V.LINNIK /5/ auf den Fall verschieden verteilter Zufallsgrößen verallgemeinerte, daß die Limesbeziehungen (1) gleichmäßig bezüglich x im Gebiet $0 \leq x \leq \frac{1}{\varrho(n)}\sqrt{\ln n}$ gelten. Dabei ist $\varrho(n)$

eine beliebige positive Funktion mit $\lim_{n\to\infty} \varphi(n)=\infty$.

In Folgerung 2 wurde die von der Momentenbedingung (6) unabhängige Funktion $\varphi(n)$ durch eine Konstante ersetzt, die in unmittelbarem Zusammenhang mit der Größenordnung existierender Momente steht.

Der Frage der Abhängigkeit der INA-Zone von der Existenz des q-ten Moments widmeten sich auch S.V.NAGAEV /7/, N.N.AMOSOVA /1/ und W.WOLF /14/. Ein Ergebnis von S.V.NAGAEV /7/ auf den Fall verschieden verteilter Zufallsgrößen verallgemeinernd, konnte W.WOLF /14/ 1975 für $q\geq 3$ die Gültigkeit der asymptotischen Beziehungen (1) in der INA-Zone $0\leq x\leq\sqrt{\frac{1}{2}(q-2)\ln n}$ zeigen. Im Fall identisch verteilter Zufallsgrößen bewies N.N.AMOSOVA /1/ bereits diese asymptotischen Beziehungen innerhalb der INA-Zone $0\leq x\leq c\sqrt{\ln n}$, $c>0$, $2+c^2<q$.

In dem folgenden Satz wird die Annäherung der Summenverteilungsfunktion einer Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsgrößen gegen die Verteilungsfunktion $\emptyset(x)$ in Abhängigkeit von n und x zu charakterisieren versucht, indem das Konvergenzverhalten einer Reihe betrachtet wird.

SATZ 2: Es seien die Bedingungen

$$EX_1=0,\quad EX_1^2=1 \tag{10}$$

und

$$E|X_1|^q<\infty,\quad q=2+c_o^2,\quad c_o>0, \tag{11}$$

erfüllt. Dann gilt für alle $0\leq x_n\leq c\sqrt{\ln n}$, $c>0$, und $\bar{x}_n=\min(x_n,c_o\sqrt{\ln n})$ die folgende Konvergenzaussage

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,x_n^q\exp\left(\frac{\bar{x}_n^2}{2}\right)\left|1-F_n(x_n\sqrt{n})+F_n(-x_n\sqrt{n})-2\emptyset(-x_n)\right|<\infty. \tag{12}$$

Der Satz 2 ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von R.MICHEL /6/ auf eine INA-Zone. Im Fall $x_n=c\sqrt{\ln n}$, $c\geq c_o$, folgt hieraus die Aussage von R.MICHEL /6/. Die Bedeutung dieses Satzes besteht in der folgenden Überlegung: Aus der Divergenz der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$$

folgt mit der Konvergenz der Reihe (12) die asymptotische Beziehung

$$1-F_n(x_n\sqrt{n})+F_n(-x_n\sqrt{n})-2\emptyset(-x_n) = o\left(\frac{\exp(-\bar{x}_n^2/2)}{x_n^q\ln n}\right)\quad (n\to\infty).$$

Über die asymptotische Gleichheit

$$(1-\emptyset(z))\sqrt{2\pi}\,z\exp\left(\frac{z^2}{2}\right) = 1+o(1),\quad z\to\infty, \tag{13}$$

erhalten wir somit für $z=\bar{x}_n=x_n\to\infty$, $n\to\infty$, die Limesbeziehung

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-F_n(x_n\sqrt{n})}{1-\Phi(x_n)}+\frac{F_n(-x_n\sqrt{n})}{\Phi(-x_n)}\right)=1+o\left(\frac{1}{x_n^{q-1}\ln n}\right)\quad(n\to\infty).$$

Da weiterhin die Aussage des Satzes2 auch dann gilt, wenn die Differenz $1-F_n(x_n\sqrt{n})+F_n(-x_n\sqrt{n})-2\Phi(-x_n)$ sowohl durch $1-F_n(x_n\sqrt{n})-(1-\Phi(x_n))$ als auch durch $F_n(-x_n\sqrt{n})-\Phi(-x_n)$ ersetzt wird, können auf der Grundlage der eben durchgeführten Überlegungen die asymptotischen Beziehungen (8) für den Fall identisch verteilter Zufallsgrößen abgeleitet werden.

In den weiteren Aussagen werden ebenfalls Folgen unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen betrachtet. Es wird die Gültigkeit nur einer der asymptotischen Beziehungen (1) im Zusammenhang mit der Existenz sogenannter einseitiger Momente untersucht.

<u>SATZ 3:</u> Es sei die Bedingung (10) erfüllt. Weiterhin gelte mit

$V(u)=P(X_1<u)$

$$\int_0^\infty u^q dV(u)<\infty,\quad q=2+c_o^2,\quad c_o>0, \tag{14}$$

und

$$\lim_{n\to\infty}(\ln n)^{1+\frac{\delta}{2}}\int_{-\infty}^{-K_n(\varepsilon,\delta)}u^2 dV(u)=0,\ \delta\geqq 0,\ \varepsilon>0, \tag{15}$$

mit $K_n(\varepsilon,\delta)=\dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{(\ln n)^{\frac{3+\delta}{2}}}$.

Dann gelten für $n\to\infty$ im Gebiet (3) mit $A=c_o$ die Beziehungen

$$\frac{1-F_n(x\sqrt{n})}{1-\Phi(x)}=1+O\left(\frac{x^{2-\min(3+c_o^2,\delta)}}{\ln n}\right) \tag{16}$$

und, wenn zusätzlich ε eine Nullfolge, also $\varepsilon\to 0$ für $n\to\infty$, ist,

$$\frac{1-F_n(x\sqrt{n})}{1-\Phi(x)}=1+o\left(\frac{x^{2-\min(3+c_o^2,\delta)}}{\ln n}\right). \tag{17}$$

Im Fall $\delta>3+c_o^2$ bleibt die Beziehung (17) ohne die Forderung $\varepsilon\to 0$ richtig.

<u>FOLGERUNG 3:</u> Für eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen seien die Bedingungen (10), (14) und (15) erfüllt. Wenn weiterhin ε eine Nullfolge, also $\varepsilon\to 0$ für $n\to\infty$, ist, dann gilt für $n\to\infty$ im Gebiet (3) mit $A=c_o$ die Limesbeziehung

$$\frac{1-F_n(x\sqrt{n})}{1-\Phi(x)}=1+o\left(\frac{1}{x^{q-1}\ln n}\right),\ \text{falls } \delta\geqq 3+c_o^2 \text{ ist.}$$

In Folgerung 3 wurde für Folgen identisch verteilter Zufallsgrößen die gleiche Konvergenzgeschwindigkeit wie in den asymptotischen Beziehungen (8) des Satzes 1 erhalten.
Im allgemeinen Fall des Serienschemas wurde eine zu Satz 3 entsprechende Aussage bereits in /8,9/ bewiesen.
Wir betrachten im folgenden Satz wieder die Annäherung der Summenverteilungsfunktion identisch verteilter Zufallsgrößen gegen die Verteilungsfunktion $\Phi(x)$, indem das Konvergenzverhalten einer Reihe untersucht wird.

SATZ 4: Es seien die Bedingungen (10), (14) und (15) erfüllt.
Dann gilt für $1 \leq x_n \leq c_0\sqrt{\ln n}$ und beliebige $\alpha < \delta$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}\, x_n^{\min(3+c_0^2,\alpha)-1} \exp(x_n^2/2)\left|F_n(x_n\sqrt{n})-\Phi(x_n)\right| < \infty .$$

Dieser Satz enthält die zu Satz 2 entsprechende Aussage. Im Falle $\delta > 3+c_0^2$ erhalten wir sogar das gleiche qualitative Verhalten der Differenz $\left|F_n(x_n\sqrt{n})-\Phi(x_n)\right|$, wie es auch im Satz 2 für die Differenz $\left|1-F_n(x_n\sqrt{n})+F_n(-x_n\sqrt{n})-2\Phi(-x_n)\right|$ der Fall ist.

3. DIE EXISTENZ VON MOMENTEN ALS NOTWENDIGE VORAUSSETZUNG FÜR DIE GÜLTIGKEIT VON GRENZWERTSÄTZEN FÜR MITTLERE ABWEICHUNGEN

Zur Existenz von Momenten auf der gesamten reellen Achse:
Es sei X_1, X_2, ..., X_n eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen, deren Summenverteilungsfunktion innerhalb einer gewissen INA-Zone einer Limesbeziehung genügt, wie wir sie in den Grenzwertsätzen für mittlere Abweichungen betrachtet haben. Es erhebt sich nun die Frage, ob aus dieser Tatsache heraus die Existenz gewisser absoluter Momente der individuellen Zufallsgrößen folgt.

SATZ 5: Es sei $F_n(x)$ die Summenverteilungsfunktion einer beliebigen Folge unabhängiger Zufallsgrößen. Weiterhin mögen solche positiven Konstanten ε, b und c existieren, so daß für $n \to \infty$

$$1-F_n(\varepsilon x\sqrt{n}) \leq b\exp(-x^2/2) \text{ und } F_n(-\varepsilon x\sqrt{n}) \leq b\exp(-x^2/2) \qquad (18)$$

mit $x=x(n)=\sqrt{(2+c^2)\ln n}$ gilt. Dann ist für alle $k=1,2,\ldots$ und $q<2+c^2$

$$E|X_k|^q < \infty . \qquad (19)$$

Unter Voraussetzung einer Reihenbedingung ähnlich dem folgenden Satz 7 gelang es V.K.ROHATGI /11/ bereits 1970 für den Fall $x(n)=\sqrt{(2+c_0^2)\ln n}$ die Gültigkeit der Bedingung (19) mit $q=2+c_0^2$ nachzuweisen. Er setzte die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (n \ln n)^{\frac{1}{2}(2+c_o^2)} (1-F_n(\varepsilon\sqrt{(2+c_o^2)n\ln n})+F_n(-\varepsilon\sqrt{(2+c_o^2)n\ln n}))$$

für ein $\varepsilon>0$ und $c_o \geqq 0$ voraus.

W.WOLF /13/ bewies 1974 zu dieser Problematik, daß die Beziehungen

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} B_n^2 < \infty \tag{20}$$

und

$$1-F_n(\varepsilon x B_n) \leqq b\exp(-x^2/2),\ F_n(-\varepsilon x B_n) \leqq b\exp(-x^2/2) \tag{21}$$

für $\varepsilon > 0$, $b>0$ und $0 \leqq x \leqq \varphi(n)\sqrt{\ln n}$ mit $\varphi(n)>0$ und $\lim_{n\to\infty} \varphi(n)=\infty$

hinreichend für die Gültigkeit von

$$E|X_k|^K < \infty \ ,\ k=1,2,\ldots$$

sind, wobei K eine beliebige positive Konstante ist ($K \geqq 3$).

Die Bedingungen (21) sind offensichtlich eine Abschwächung der Beziehungen (1), aber andererseits ist durch die Funktion $\varphi(n)$ die zugrunde gelegte INA-Zone wesentlich breiter als in der Folgerung 2, so daß sogar die Existenz von Momenten beliebiger Ordnung K der Zufallsgrößen X_k, $k=1,2,\ldots$, erhalten wurde. Unter Verzicht auf die Funktion $\varphi(n)$ gelang es W.WOLF /14/ ein Jahr später einen Zusammenhang zwischen der oberen Schranke der zugrunde gelegten INA-Zone und der Ordnung existierender Momente herzustellen. In Verallgemeinerung eines Resultates von S.V.NAGAEV /7/ bewies er folgende Aussage /14/: Wenn die Bedingung (20) und die Beziehungen (1) für $n\to\infty$ im Gebiet $0 \leqq x \leqq \sqrt{(q+1)\ln n}$, $q \geqq 3$, erfüllt sind, dann gilt für alle k die Beziehung (19).

In Satz 5 wurde diese Aussage verallgemeinert und anstatt der Beziehungen (1) wieder die Gültigkeit der Ungleichungen (18) vorausgesetzt, aber nicht mehr innerhalb einer gewissen INA-Zone, sondern nur noch für die obere Schranke $x=\sqrt{(2+c^2)\ln n}$ dieser x-Zone. Unter Verzicht auf die Bedingung (20) wurde im Satz 5 die gleiche Aussage wie in /14/ erhalten, wobei die von W.WOLF /14/ zugrunde gelegte INA-Zone weiter eingeengt wurde.

Im Falle unabhängiger und identisch verteilter Zufallsgrößen läßt sich Satz 5 verschärfen:

SATZ 6: Es mögen ε, b und c solche positiven Konstanten sein, daß für $n\to\infty$ die Summenverteilungsfunktion $F_n(x)$ einer beliebigen Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsgrößen den Ungleichungen (18) für $x=c\sqrt{\ln n}$ genügt. Dann gelten die Beziehung (19), d.h. $E|X_1|^q < \infty$, $q < 2+c^2$, (22)

und $EX_1 = 0$. (23)

SATZ 7: Die Gültigkeit der Beziehungen (22) und (23) ergibt sich auch im Fall $c=c_o=\sqrt{q-2}$, wenn anstatt der Ungleichungen (18) mit geeigneten positiven Konstanten ε und c_o die Konvergenz folgender Reihe vorausgesetzt wird:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, n^{\frac{1}{2}c_o^2} (\ln n)^{\frac{1}{2}(2+c_o^2)} \left(1-F_n(\varepsilon c_o\sqrt{n \ln n})+F_n(-\varepsilon c_o\sqrt{n \ln n})\right).$$

Wir bemerken, daß im Fall $c_o=0$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln n \left(1-F_n(\varepsilon\sqrt{n \ln n})+F_n(-\varepsilon\sqrt{n \ln n})\right)$$

genau dann konvergiert, wenn die Beziehungen (22) und (23) erfüllt sind ($q=2$). Diese Bemerkung und der Satz 7 für den Fall $\varepsilon = \frac{c}{c_o} > 1$ wurden bereits 1968 von J.A.DAVIS /3/ bewiesen.

Zur Existenz von einseitigen Momenten:

Der folgende Satz ist eine entsprechende Version zum Satz 5.

SATZ 8: Es sei $F_n(x)$ die Summenverteilungsfunktion einer Folge unabhängiger Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit $EX_k=0$ und $EX_k^2 < \infty$, $k=1,2,\ldots,n$, und es möge die Bedingung (20) erfüllt sein. Weiterhin gelte mit geeigneten positiven Konstanten ε, b und c für $n \to \infty$ die Beziehung

$1-F_n(\varepsilon x B_n) \leq b\exp(-x^2/2)$ (24)

mit $x=x(n)=\sqrt{(2+c^2)\ln n}$. Dann gilt für alle $k=1,2,\ldots$

$E(X_k^+)^q < \infty$ für $q=2+c_o^2$, $0 \leq c_o < c$. (25)

Im Gegensatz zu Satz 5 wird hier zusätzlich die Existenz endlicher Streuungen vorausgesetzt. Der nächste Satz ist die entsprechende Version zu der im obigen Abschnitt nach Satz 5 zitierten Aussage von V.K.ROHATGI.

SATZ 9: Es gelten $EX_k=0$, $EX_k^2 < \infty$, $k=1,2,\ldots$, die Bedingung (20) und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (n \ln n)^{(2+c_o^2)/2} \left(1-F_n(\varepsilon B_n\sqrt{(2+c_o^2)\ln n})\right) < \infty, \quad c_o > 0, \varepsilon > 0.$$

Dann gilt für alle k und $q=2+c_o^2$ die Momentenbedingung (25).

Für den Fall unabhängiger und identisch verteilter Zufallsgrößen können wir zu den Sätzen 8 und 9 entsprechende Aussagen angeben:

SATZ 10: Im Fall identisch verteilter Zufallsgrößen erhalten wir unter sämtlichen Voraussetzungen des Satzes 8 die Aussage (25) bereits dann, wenn wir die Abschätzung (24) für $1-F_n(\varepsilon\sigma x\sqrt{n})$ für den kleineren Wert $x=c\sqrt{\ln n}$ voraussetzen ($\sigma^2=EX_1^2$).

SATZ 11: Es seien die Zufallsgrößen X_k, $k=1,2,\ldots$, identisch verteilt mit $EX_1=0$ und $EX_1^2<\infty$. Dann gilt bereits unter Voraussetzung der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\, n^{\frac{1}{2}c_o^2}(\ln n)^{(2+c_o^2)/2}\,(1-F_n(\varepsilon c_o\sigma\sqrt{n\ln n}))\ ,\quad c_o>0,\varepsilon>0,$$

die Aussage (25).

Abschließend bemerken wir, daß zu den formulierten Sätzen entsprechende Aussagen über die Notwendigkeit der Existenz linksseitiger Momente gelten.

Für den allgemeinen Fall des Serienschemas versuchten im Jahre 1965 H.RUBIN und J.SETHURAMAN /12/ die Notwendigkeit der Momentenbedingung

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\int_0^{\infty}u^q dF_{nk}(u)<\infty,\quad q>2,$$

zu beweisen. Beim Nachvollziehen des Beweises dieser Behauptung entstanden Zweifel. In /9/ wurde die Behauptung von H.RUBIN und J.SETHURAMAN mittels eines Beispiels widerlegt.

4. BEWEISE

Beweise zum Abschnitt 2:

Mit $F_{nk}^y(z)$ und $F_N^y(z)$ bezeichnen wir folgende Verteilungsfunktionen:

$$F_{nk}^y(z)=\begin{cases}F_{nk}(z) & ,\quad z\leq 0,\\ F_{nk}(z)+1-F_{nk}(y), & 0<z\leq y,\\ 1 & ,\quad y<z\ ,\end{cases}$$

und

$$F_N^y(z)=(F_{n1}^y * F_{n2}^y * \ldots * F_{nN}^y)(z),$$

wobei y ein positiver Parameter ist. $F_N^y(z)$ ist die N-fache Faltung der abgeschnittenen Verteilungsfunktionen der n-ten Serie. Mit einem positiven Parameter h führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\varphi_{nk}(h)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{hu}dF_{nk}^y(u),\ \bar{\varphi}_{nk}(h)=\int_{-\infty}^{\infty}ue^{hu}dF_{nk}^y(u),\ \bar{\bar{\varphi}}_{nk}(h)=\int_{-\infty}^{\infty}u^2e^{hu}dF_{nk}^y(u),$$

$$F_{nk,h}(z)=\frac{1}{\varphi_{nk}(h)}\int_{-\infty}^{z}e^{hu}dF_{nk}^y(u),\ F_{N,h}(z)=\Big(\mathop{\ast}_{k=1}^{N}F_{nk,h}\Big)(z),$$

$$a_{nk}(h)=\frac{\bar{\varphi}_{nk}(h)}{\varphi_{nk}(h)},\ A_N(h)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}a_{nk}(h),\ \sigma_{nk}^2(h)=\frac{\bar{\bar{\varphi}}_{nk}(h)}{\varphi_{nk}(h)}-\Big(\frac{\bar{\varphi}_{nk}(h)}{\varphi_{nk}(h)}\Big)^2,$$

$$\sigma_N^2(h)=\sum_{k=1}^{N}\sigma_{nk}^2(h),\quad \gamma_{nk}(h)=\frac{1}{\varphi_{nk}(h)}\int_{-\infty}^{\infty}|u|^3e^{hu}dF_{nk}^y(u)$$

und

$$c_{nk}(h)=\frac{1}{\varphi_{nk}(h)}\int_{-\infty}^{\infty}|u-a_{nk}(h)|^3e^{hu}dF_{nk}^y(u).$$

$F_{nk,h}(z)$ ist die aus $F_{nk}^y(z)$ hervorgegangene sogenannte konjugierte Verteilungsfunktion mit dem Erwartungswert $a_{nk}(h)$, der Streuung $\sigma_{nk}^2(h)$, sowie den absoluten Momenten $c_{nk}(h)$ und $\gamma_{nk}(h)$. $F_{N,h}(z)$ ist eine Summenverteilungsfunktion.

Zum Beweis des Satzes 1: Aus den Voraussetzungen (5) und (6) folgt, daß ein $n_o>0$ existiert, so daß für alle $n\geq n_o$ mit positiven Konstanten α und β

$$\frac{1}{N}B_N^2\geq\alpha>0 \quad\text{und}\quad \beta_N^q\leq\beta<\infty \tag{26}$$

gilt. Alle weiteren Betrachtungen werder für $n\geq n_o$ durchgeführt. Es sei

$$y=rx\sqrt{N}\ \text{ mit } r=\frac{\sqrt{\alpha}}{2qc^2}\min(1,c_o^2)\quad\text{und}\quad h=\frac{x}{B_N}. \tag{27}$$

Wir gehen von folgender grundlegenden Beziehung aus:

$$|1-F_n(xB_N)-(1-\emptyset(x))|\leq|F_n(xB_N)-F_N^y(xB_N)|+|F_N^y(xB_N)-\emptyset(x)|. \tag{28}$$

Für den ersten Summanden auf der rechten Seite von (28) erhalten wir

$$|F_n(xB_N)-F_N^y(xB_N)|\leq\sum_{k=1}^{N}(1-F_{nk}(y)). \tag{29}$$

Auf Grund der Voraussetzung (6) existieren die q-ten absoluten Momente der individuellen Zufallsgrößen X_{nk} und es gilt

$$\infty>\int_0^\infty u^q dF_{nk}(u)=q\int_0^\infty u^{q-1}(1-F_{nk}(u))du=q\sum_{i=1}^{\infty}\int_{rx\sqrt{i-1}}^{rx\sqrt{i}}u^{q-1}(1-F_{nk}(u))du\geq$$

$$\geq C_1\sum_{i=1}^{\infty}(1-F_{nk}(rx\sqrt{i}))rx\int_{\sqrt{i-1}}^{\sqrt{i}}(rxv)^{q-1}dv\geq C_2\sum_{i=1}^{\infty}(1-F_{nk}(rx\sqrt{i}))x^q(i-1)^{\frac{q-2}{2}}.$$

Hier und im weiteren werden mit C_1, C_2, ... absolute positive Konstanten bezeichnet. Wir erhalten, daß folgende Reihe konvergent ist:

$$\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{i\ln i}(x\sqrt{i})^q\ln i\ (1-F_{nk}(rx\sqrt{i}))<\infty. \tag{30}$$

Aus der Divergenz der Reihe $\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{i\ln i}$ folgt notwendigerweise für $i\to\infty$

$$1-F_{nk}(rx\sqrt{i})=o\left(\frac{1}{\ln i\ (x\sqrt{i})^q}\right).$$

Indem wir $i=N$ setzen, erhalten wir somit auf Grund von (6) für $N\to\infty$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(1-F_{nk}(y)) = o\left(\frac{1}{\ln N\ (x\sqrt{N})^{q}}\right). \qquad (31)$$

Wegen der asymptotischen Beziehung (13) erhalten wir aus (29) und (31) für $1\leq x\leq c\sqrt{\ln N}$ und $N\to\infty$

$$F_n(xB_N)-F_N^y(xB_N) = (1-\emptyset(x))o\left(\frac{1}{x^{q-1}\ N^{(q-2-c^2)/2}\ln N}\right). \qquad (32)$$

Wir kommen nun zur Untersuchung des zweiten Summanden auf der rechten Seite von (28) und erhalten entsprechend den Überlegungen in /8/:

$$\left|F_N^y(xB_N)-\emptyset(x)\right| \leq \sum_{i=1}^{4} J_i \qquad (33)$$

mit

$$J_1=C_3\prod_{k=1}^{N}\varphi_{nk}(h)\exp(-x^2)\ \sigma_N^{-3}(h)\sum_{k=1}^{N} c_{nk}(h),$$

$$J_2=C_4\prod_{k=1}^{N}\varphi_{nk}(h)\exp(-x^2)\ \frac{1}{B_N}\left|NA_N(h)-xB_N\right|,$$

$$J_3=C_5\prod_{k=1}^{N}\varphi_{nk}(h)\exp(-x^2)\ \frac{1}{B_N}\left|\sigma_N(h)-B_N\right|$$

und

$$J_4=\left|\prod_{k=1}^{N}\varphi_{nk}(h)\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)-1\right|\emptyset(-x).$$

Um die Ungleichung (33) weiter auszuwerten, betrachten wir die Abschätzungen

$$\left|\prod_{k=1}^{N}\varphi_{nk}(h)\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)-1\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{N}\left(\ln\varphi_{nk}(h)-\sigma_{nk}^2\frac{h^2}{2}\right)\right|\exp\left(\left|\sum_{k=1}^{N}\left(\ln\varphi_{nk}(h)-\sigma_{nk}^2\frac{h^2}{2}\right)\right|\right)$$

und

$$\prod_{k=1}^{N}\varphi_{nk}(h)\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \leq \exp\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\varphi_{nk}(h)-1-\sigma_{nk}^2\frac{h^2}{2}\right)\right)$$

und erhalten hieraus für $N\to\infty$ die asymptotischen Beziehungen

$$\prod_{k=1}^{N}\varphi_{nk}(h)\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)-1 = O\left(\frac{x^{4-\min(1,c_o^2)}}{N^{\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}}\right) \qquad (34)$$

und

$$\prod_{k=1}^{N}\varphi_{nk}(h)\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) = 1+o(1). \qquad (35)$$

Aus der Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{N} c_{nk}(h) \leq 8\sum_{k=1}^{N}\gamma_{nk}(h)$$

folgt die Limesbeziehung $(N\to\infty)$

$$\sum_{k=1}^{N} c_{nk}(h) = O\left(NB_N\frac{x^{1-\min(1,c_o^2)}}{N^{\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}}\right). \qquad (36)$$

Jetzt schätzen wir die Streuung $\sigma_N^2(h)$ ab und gehen von der Gleichung

$$\sigma_N^2(h) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\varphi_{nk}^2(h)}(\bar{\bar{\varphi}}_{nk}(h)\varphi_{nk}(h)-\bar{\varphi}_{nk}^2(h))$$

aus. Nach Auswertung der Summen

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{\varphi}_{nk}^2(h),\ \sum_{k=1}^{N} \bar{\bar{\varphi}}_{nk}(h)\varphi_{nk}(h) \text{ und } \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\varphi_{nk}^2(h)}\sigma_{nk}^2$$

folgt schließlich für $N \to \infty$

$$\sigma_N^2(h) = B_N^2(1+O(\frac{x^2}{N^{\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}})). \tag{37}$$

Wir kommen zur Untersuchung der Differenz $NA_N(h)-xB_N$: Es gilt

$$\sum_{k=1}^{N}(a_{nk}(h)-h\sigma_{nk}^2)=\sum_{k=1}^{N}\left\{\frac{1}{\varphi_{nk}(h)}(\bar{\varphi}_{nk}(h)-h\sigma_{nk}^2-h\sigma_{nk}^2(\varphi_{nk}(h)-1))\right\}.$$

Aus dem asymptotischen Verhalten der Summen

$$\sum_{k=1}^{N}(\bar{\varphi}_{nk}(h)-h\sigma_{nk}^2) \text{ und } \sum_{k=1}^{N} h\sigma_{nk}^2(\varphi_{nk}(h)-1)$$

erhalten wir für $N \to \infty$ die Limesbeziehung

$$NA_N(h)-xB_N = B_N\ O(\frac{x^{3-\min(1,c_o^2)}}{N^{\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}}). \tag{38}$$

Nach Auswertung der Ausdrücke J_1 bis J_4 mittels der asymptotischen Beziehungen (13) und (34) bis (38) erhalten wir über die Ungleichung (33) in der betrachteten x-Zone $1 \leq x \leq c\sqrt{\ln N}$ für $N \to \infty$ die Darstellung

$$F_N^y(xB_N)-\emptyset(x) = (1-\emptyset(x))\ O(\frac{x^{4-\min(1,c_o^2)}}{N^{\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}}). \tag{39}$$

Aus den Beziehungen (28), (32) und (39) folgt die Behauptung des Satzes 1.

Zum Beweis des Satzes 2: Wir gehen wieder von der Abschätzung (28) aus und schätzen die rechte Seite der Ungleichung (29) im vorliegenden Fall identisch verteilter Zufallsgrößen etwas genauer ab. Da die individuelle Verteilungsfunktion jetzt nicht mehr vom Folgenindex n abhängt, kann in (30) sofort der Summationsindex i durch n ersetzt werden. Mit (29) folgt dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}(x\sqrt{n})^q \left|F_n(x\sqrt{n})-F_n^y(x\sqrt{n})\right| < \infty . \tag{40}$$

Aus (39) erhalten wir andererseits für $n \to \infty$ und $0 \leq x \leq c\sqrt{\ln n}$

$$x^q \exp(\frac{x^2}{2})(F_n^y(x\sqrt{n})-\emptyset(x)) = O(\frac{1}{n^{\frac{q-1}{4q}\min(1,c_o^2)}}) . \tag{41}$$

Wir betrachten in (40) den Faktor $n^{-2}(x\sqrt{n})^q$ genauer und erhalten

$$n^{-2}(x\sqrt{n})^q = \frac{1}{n}x^q\exp\left(\frac{1}{2}c_o^2\ln n\right) \geq \frac{x^q}{n}\exp\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Mit den Beziehungen (41) und (28) folgt hieraus die Behauptung des Satzes 2.

Zum Beweis der Sätze 3 und 4: Die Beweisführung verläuft ähnlich wie im Abschnitt 7 des Artikels /8/, wobei der dort benutzte Parameter y jetzt wie folgt festgelegt wird: $y=rx\sqrt{n}$ mit $r=\frac{1}{4c_o^2}\min(1,c_o^2)$. Entsprechend den dort angeführten Überlegungen ergeben sich für $n\to\infty$ im Gebiet $1\leq x\leq c_o\sqrt{\ln n}$ die asymptotischen Beziehungen

$$F_n(x\sqrt{n})-F_n^y(x\sqrt{n}) = (1-\Phi(x))\, o\left(\frac{1}{x^{q-1}\ln n}\right) \quad \text{(siehe (32))}$$

und

$$F_n^y(x\sqrt{n})-\Phi(x) = (1-\Phi(x))\, O\left(\frac{x^2}{(\ln n)^{\frac{2+\delta}{2}}}\right) \quad \text{(siehe /8/,(7.14))}$$

bzw. im Falle $\varepsilon\longrightarrow 0$

$$F_n^y(x\sqrt{n})-\Phi(x) = (1-\Phi(x))\, o\left(\frac{x^2}{(\ln n)^{\frac{2+\delta}{2}}}\right).$$

Hieraus folgt die Aussage des Satzes 3. Um Satz 4 zu beweisen, betrachten wir die soeben zitierte Beziehung (7.14) /8/ und erhalten

$$\frac{1}{x}\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\ln n\,\left(F_n^y(x\sqrt{n})-\Phi(x)\right) = O\left(\frac{1}{(\ln n)^{\delta/2}}\right).$$

Damit konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}(\ln n)^{\alpha/2}\,\frac{1}{x}\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\left|F_n^y(x\sqrt{n})-\Phi(x)\right| \quad \text{für } \alpha<\delta .$$

Mit (40) folgt hieraus die Behauptung des Satzes 4.

Beweise zum Abschnitt 3:

Über die Methode von L.E.BAUM/M.KATZ/R.R.READ /2/ bzw. P.ERDÖS /4/ wurden in /9/ folgende zwei Hilfssätze bewiesen, die Abschätzungen der individuellen Verteilungsfunktionen durch die Summenverteilungsfunktionen darstellen:

LEMMA 1: Es sei $X_1, X_2, \dots, X_n$ eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit den Verteilungsfunktionen $V_i(x)$, $i=1,2,\dots,n$, und der Summenverteilungsfunktion $F_n(x)$. Dann gilt mit einer positiven Konstanten γ ($\gamma>2$) für alle $i=1,2,\dots,n$ die Abschätzung $1-V_i(4z)+V_i(-4z)\leq\gamma(1-F_n(z)+F_n(-z))$, falls $z\geq z_i$ ist. Dabei ist z_i eine positive Konstante, die nur von der individuellen Verteilungsfunktion $V_i(x)$ abhängt.

LEMMA 2: Es sei $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit $EX_i=0$ und $EX_i^2<\infty$, $i=1,2,\ldots,n$. Wir setzen $B_n^2=\sum_{i=1}^{n} EX_i^2$. Dann gilt mit einer positiven Konstanten $\gamma(\gamma>1)$ für $i=1,2,\ldots,n$ die Abschätzung

$1-V_i(2zB_n) \leq \sum_{i=1}^{n}(1-V_i(2zB_n)) \leq \gamma(1-F_n(zB_n))$, falls $z\geq z_o=\sqrt{\frac{5\gamma}{4(\gamma-1)}}$

ist. Eine entsprechende Abschätzung gilt auch für $V_i(-2zB_n)$.

Zum Beweis des Satzes 5: Mit $\overline{V}_i$ und $\overline{F}_n$ bezeichnen wir die Differenzen $\overline{V}_i(4z)=1-V_i(4z)+V_i(-4z)$ und $\overline{F}_n(z)=1-F_n(z)+F_n(-z)$. Aus der Voraussetzung (18) folgt mit $\overline{z}=\varepsilon x\sqrt{n}$ und Lemma 1 für hinreichend große n

$$\overline{V}_i(4\overline{z}) \leq \gamma\overline{F}_n(\overline{z}) \leq \frac{\gamma b}{n^{(2+c^2)/2}} \leq b_1/\overline{z}^{2+c_1^2}, \quad \overline{z}\geq z_i.$$

Dabei sind b_1 und c_1 positive Konstanten mit $c_o<c_1<c$. Hieraus ergibt sich für alle $z\geq z_i$ die Ungleichung

$$\overline{V}_i(z) \leq b_2/z^{2+c_1^2}, \quad b_2>0, \quad c_o<c_1<c. \tag{42}$$

Mit

$$E|X_i|^q = q\int_0^{\infty} z^{1+c_o^2}\overline{V}_i(z)dz \tag{43}$$

erhalten wir aus (42) die Behauptung des Satzes 5.

Zum Beweis der Sätze 6 und 7: Aus der Voraussetzung des Satzes 6 folgt für hinreichend große n $\overline{F}_n(\varepsilon c\sqrt{n\ln n}) \leq \frac{b}{n^{c^2/2}}$. Damit konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln n \ \overline{F}_n(\varepsilon c\sqrt{n\ln n})<\infty . \tag{44}$$

Mit dem Satz 1 von J.A.DAVIS /3/ ergibt sich hieraus

$$EX_1=0 \quad \text{und} \quad \sigma^2=EX_1^2<\infty . \tag{45}$$

Aus Lemma 2 folgt nun mit $z=\frac{\varepsilon}{\sigma}c\sqrt{\ln n}$ und $B_n=\sigma\sqrt{n}$ für $z\geq z_o$

$$n\overline{V}_1(2\varepsilon c\sqrt{n\ln n}) \leq \gamma\overline{F}_n(\varepsilon c\sqrt{n\ln n}). \tag{46}$$

Damit erhalten wir für $c>c_o$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{c_o^2/2}(\ln n)^{q/2}\ \overline{V}_1(2\varepsilon c\sqrt{n\ln n})<\infty .$$

Nun gilt

$$\overline{V}_1(2\varepsilon c\sqrt{n\ln n})=\sum_{k=n}^{\infty}(\overline{V}_1(2\varepsilon c\sqrt{k\ln k})-\overline{V}_1(2\varepsilon c\sqrt{(k+1)\ln(k+1)})).$$

Hieraus folgt die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\overline{V}_1(2\varepsilon c\sqrt{k\ln k})-\overline{V}_1(2\varepsilon c\sqrt{(k+1)\ln(k+1)}))\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}(n\ln n)^{q/2}<\infty .$$

Mit $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}(n\ln n)^{q/2} \geq C_6(k\ln k)^{q/2}$, $C_6>0$, und

$$\bar{V}_1(2\varepsilon c\sqrt{k\ln k})-\bar{V}_1(2\varepsilon c\sqrt{(k+1)\ln(k+1)})=-\int_{2\varepsilon c\sqrt{k\ln k}}^{2\varepsilon c\sqrt{(k+1)\ln(k+1)}} d\bar{V}_1(z)$$

sowie (43) ergibt sich aus der Konvergenz der zuletzt betrachteten Reihe die Aussage des Satzes 6.
Der Beweis des Satzes 7 wird mit dem bereits erwähnten Satz 1 von J.A.DAVIS /3/ geführt, um zuerst (45) zu erhalten. Mit (46) erhält man dann entsprechend dem vorangehenden Beweis die Aussage des Satzes 7.
Die Sätze 8 bis 10 werden mittels Lemma 2 bewiesen.

LITERATUR

/1/ AMOSOVA,N.N.:O predel'nych teoremach dlja verojatnostej umerennych uklonenij. Vestn.Leningr.univ. 27(1972) No.13, S.5-14

/2/ BAUM,L.E./KATZ,M./READ,R.R.:Exponential convergence rates for the law of large numbers. Trans.Amer.Math.Soc. 102(1962) No.2

/3/ DAVIS,J.A.:Convergence rates for probabilities of moderate deviations. Ann.Math.Statist. 39(1968) No.6, S.2016-2028

/4/ ERDÖS,P.:On a theorem of Hsu and Robbins. Ann.Math.Statist. 20 (1949) No.2, S.286-291

/5/ IBRAGIMOV,I.A./LINNIK,J.V.:Independent and stationary sequences of random variables. Groningen 1971

/6/ MICHEL,R.:Results on probabilities of moderate deviations. Ann.Prob. 2(1974) No.2, S.349-353

/7/ NAGAEV,S.V.:Nekotorye predel'nye teoremy dlja bol'šich uklonenij. Teorija verojatn. i ee primen. 10(1965) No.2, S.231-254

/8/ PADITZ,L.:Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit zur Normalverteilung unter Vorauss. eins. Momente. Math.Nachr.(im Druck)

/9/ PADITZ,L.:Dissertation(A) Techn. Univ. Dresden 1977

/10/ RICHTER,W.-D.:Preprint TU Dresden 07-20-77

/11/ ROHATGI,V.K.:On the rate of convergence of probabilities of moderate deviations. J.Austral.Math.Soc. 11(1970) No.1, S.91-94

/12/ RUBIN,H./SETHURAMAN,J.:Probabilities of moderate deviations. Sankhya A27(1965) No.2-4, S.325-346

/13/ WOLF,W.:Über Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen. Math.Nachr. 62(1974), S.261-288

/14/ WOLF,W.:Große Abweichungen im zentralen Grenzwertsatz. Wiss.Z. Techn. Univ. Dresden 24(1975) No.2, S.393-398

III-9-276 JG02/77/5394