TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

ÜBER DIE ANNÄHERUNG VON SUMMENVERTEILUNGSFUNKTIONEN GEGEN UNBEGRENZT TEILBARE VERTEILUNGSFUNKTIONEN IN DER TERMINOLOGIE DER PSEUDOMOMENTE

von

Ludwig Paditz
Sektion Mathematik

07 - 31 - 77

INFORMATIONEN

Als Manuskript gedruckt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

ÜBER DIE ANNÄHERUNG VON SUMMENVERTEILUNGSFUNKTIONEN GEGEN UNBEGRENZT TEILBARE VERTEILUNGSFUNKTIONEN IN DER TERMINOLOGIE DER PSEUDOMOMENTE

von

Ludwig Paditz

Sektion Mathematik

07 - 31 - 77

1. EINLEITUNG

Es sei (X_{nk}, $k=1,2,\ldots,k_n$, $n=1,2,\ldots$) eine Doppelfolge von Zufallsgrößen mit der Eigenschaft, daß für jedes n die Zufallsgrößen X_{n1}, $X_{n2},\ldots,X_{nk_n}$ voneinander unabhängig sind. Mit

$$F_n(x)=P(X_{n1}+X_{n2}+\ldots+X_{nk_n}<x)$$

bezeichnen wir die Summenverteilungsfunktion der Zufallsgrößen der n-ten Serie.

Die klassische Summationstheorie unabhängiger Zufallsgrößen beruht auf den bekannten Arbeiten von A.N.KOLMOGOROV, P.LEVY, A.J.CHINČIN und anderen. In dieser Theorie spielt die sogenannte Infinitesimalitätsbedingung

$$\sup_{1\leq k\leq k_n} P(|X_{nk}|>\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{für alle } \varepsilon>0 \quad (k_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty)$$

eine wesentliche Rolle. Diese Bedingung ist dadurch motiviert, daß jede individuelle Zufallsgröße X_{nk}, $k=1,2,\ldots,k_n$, nur einen verschwindend kleinen Einfluß auf das Verhalten der Summenverteilungsfunktion $F_n(x)$ haben soll. Das ist offensichtlich gleichbedeutend mit der Forderung der gleichmäßigen Annäherung der Komponenten

$$F_{nk}(x)=P(X_{nk}<x),\ k=1,2,\ldots,k_n,$$

gegen die Verteilungsfunktion der im Nullpunkt konzentrierten Einpunktverteilung.

Das Ziel der vorliegenden Note besteht darin, die Annäherung der Summenverteilungsfunktion $F_n(x)$ gegen eine unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion $F(x)$ zu untersuchen ohne die Infinitesimalitätsbedingung vorauszusetzen. Ausgehend von der Annäherung der Komponenten $F_{nk}(x)$, $k=1,2,\ldots,k_n$, der Summenverteilungsfunktion $F_n(x)$ gegen entsprechende Komponenten $F(x+a_{nk};\lambda_{nk})$, $k=1,2,\ldots,k_n$, von $F(x)$ wird dieses Problem gelöst. Es wird zugelassen, daß die Komponenten der Summenverteilungsfunktion einen wesentlichen Einfluß auf die Komponenten der Grenzverteilungsfunktion $F(x)$ haben können. Derartige Überlegungen sind auch der Ausgangspunkt für das Kapitel IX in der Monografie von J.V.LINNIK und I.V.OSTROVSKIJ /3/. Über die Abschätzung der Annäherung von Summenverteilungsfunktionen gegen unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktionen sind bisher nur die Arbeiten von J.M. SHAPIRO /1,5/ und V.BOONYASOMBUT /1/ bekannt. Die Infinitesimalitätsbedingung spielte in diesen Arbeiten eine wesentliche Rolle.

In den weiteren Ausführungen werden für die Differenz $F_n(x)-F(x)$

neue Abschätzungen vorgestellt, die einen etwas anderen Charakter als die Ergebnisse von J.M.SHAPIRO /1,5/ und V.BOONYASOMBUT /1/ haben und unter schwächeren Voraussetzungen gelten. Den Ausgangspunkt zu den folgenden Untersuchungen bildet eine Arbeit von V.M.ZOLOTARJEV /6/. Die Grenzverteilungsfunktion $F(x)$ wird genau wie die betrachtete Summenverteilungsfunktion $F_n(x)$ als Faltung gewisser Verteilungsfunktionen $F(x+a_{nk};\lambda_{nk})$, $k=1,2,\ldots,k_n$, aufgefaßt, d.h. mit anderen Worten, die Grenzverteilungsfunktion wird in Komponenten zerlegt. Als Charakteristikum der Annäherung der Komponenten der Summenverteilungsfunktion gegen die Komponenten der Grenzverteilungsfunktion dienen sogenannte Pseudomomente, mittels derer dann Aussagen über die Annäherung der Summenverteilungsfunktion gegen eine unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion getroffen werden.
In der vorliegenden Note wird ein Teil der Ergebnisse der Dissertationsschrift /4/ von L.PADITZ wiedergegeben.

2. ABSCHÄTZUNGEN UNTER VORAUSSETZUNG ENDLICHER STREUUNGEN

Es wird die in Abschnitt 1 eingeführte Doppelfolge von Zufallsgrößen betrachtet. Mit $EX_{nk}=\mu_{nk}$ und $D^2X_{nk}=\sigma^2_{nk}<\infty$ werden der Erwartungswert und die endliche Streuung der Zufallsgrößen X_{nk}, $k=1,2,\ldots,k_n$, bezeichnet. Entsprechend seien $\mu_n=\mu_{n1}+\mu_{n2}+\ldots+\mu_{nk_n}$ und $\sigma^2_n=\sigma^2_{n1}+\sigma^2_{n2}+\ldots+\sigma^2_{nk_n}$ der Erwartungswert und die Streuung der oben eingeführten Summenverteilungsfunktion.
Es sei $F(x)$ eine unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion mit dem Erwartungswert μ, der endlichen Streuung $\sigma^2<\infty$ und der charakteristischen Funktion $\varphi(t)$. Aus der kanonischen Darstellung für unbegrenzt teilbare charakteristische Funktionen folgt sofort, daß $\varphi^{\lambda}(t), \lambda>0$, ebenfalls eine charakteristische Funktion einer gewissen unbegrenzt teilbaren Verteilungsfunktion $F(x;\lambda)$ ist.
Wir führen folgende Pseudomomente ein:

$$\varkappa_{nk}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}u^s d(F_{nk}(u)-F(u+a_{nk};\lambda_{nk})),\quad s\geq 0,\qquad \varkappa_n(s)=\sum_{k=1}^{k_n}|\varkappa_{nk}(s)|,$$

$$\nu_{nk}(r)=\int_{-\infty}^{\infty}|u|^r\,|d(F_{nk}(u)-F(u+a_{nk};\lambda_{nk}))|,\quad r\geq 0,\quad \nu_n(r)=\sum_{k=1}^{k_n}\nu_{nk}(r),$$

$$\nu_F(r)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|u|^r\left|d(F(u+a_{n};\lambda_n)-F(u))\right| ,$$

$$\varkappa_F(s)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}u^s d(F(u+a_n;\lambda_n)-F(u)) \quad .$$

Dabei sind a_{nk} und λ_{nk}, $k=1,2,\dots,k_n$, $n=1,2,\dots$, beliebige reelle Zahlen mit $\lambda_{nk}>0$ und es gilt $a_n=a_{n1}+a_{n2}+\dots+a_{nk_n}$ und $\lambda_n=\lambda_{n1}+\lambda_{n2}+\dots+\lambda_{nk_n}$.

Wir können nun folgende Fehlerabschätzung für die Differenz F_n-F angeben:

<u>SATZ 1</u>: Es seien $F_n(x)$ und $F(x)$ die oben eingeführte Summenverteilungsfunktion bzw. eine unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion. Weiterhin möge die Ableitung $\frac{dF(x)}{dx}$ existieren, für die für alle x die Abschätzung $|F'(x)|\leq C$ mit $0\leq C<\infty$ gilt.

Außerdem seien die Pseudomomente $\nu_n(r)$ und $\nu_F(r)$ endlich für ein $2\leq r\leq 3$.

Dann gilt für beliebige Zahlen $b>\frac{1}{2\pi}$ die Abschätzung

$$\sup_x\left|F_n(x)-F(x)\right|\leq k(b,C)\ \gamma(n,r). \qquad (1)$$

Dabei sind $k(b,C)=b(1+C\cdot c^2(b))$ eine Konstante, $c(b)$ die Lösung der Gleichung

$$\int\limits_0^{c(b)/4}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{8b}$$

und $\gamma(n,r)$ der Ausdruck

$$\gamma(n,r)=\left[\frac{72}{r6^r}(\nu_n(r)+\nu_F(r))\right]^{1/(r+1)}+\left[\frac{1}{2}(\varkappa_n(2)+|\varkappa_F(2)|)\right]^{1/3}+$$
$$+\left[2(\varkappa_n(1)+|\varkappa_F(1)|)\right]^{1/2} .$$

Hieraus sind unmittelbar zwei Folgerungen ableitbar:

<u>FOLGERUNG 1</u>: Die Folgen (a_{nk}) und (λ_{nk}), $k=1,2,\dots,k_n$, $n=1,2,\dots$, mögen derart gewählt sein, daß für alle k und n sowie für s=1 und s=2 $\varkappa_{nk}(s)=0$ ist. Weiterhin gelte für die Differenz $F_n(x)-F(x)$ die Fehlerabschätzung (1). Dann gilt

$$\gamma(n,r)=\left[\frac{72}{r6^r}(\nu_n(r)+\nu_F(r))\right]^{1/(r+1)}+\left(\frac{1}{2}\left|\sigma^2-\sigma_n^2+\mu^2-\mu_n^2\right|\right)^{1/3}+$$
$$+\left(2\left|\mu-\mu_n\right|\right)^{1/2} .$$

FOLGERUNG 2: Für die Differenz $F_n(x)-F(x)$ möge die Fehlerabschätzung (1) gelten und weiterhin sei $\sigma_n^2=\sigma^2$ und $\mu_n=\mu$. Dann gilt

$$\sup_x \left|F_n(x)-F(x)\right| \leq D\cdot(\nu_n(r))^{1/(r+1)}$$

mit $D=D(r,b,C)=\left(\frac{72}{r6^r}\right)^{1/(r+1)} k(b,C)$.

Im folgenden Satz wird eine Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit untersucht, mit der die Differenz $F_n(x)-F(x)$ unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen gegen Null konvergiert.

SATZ 2: Wenn die Abschätzung (1) gilt und die absoluten Pseudomomente $\nu_F(r)$ und $\nu_n(r)$ für $n\longrightarrow\infty$ gegen Null konvergieren, dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{g}(n,r) = 0,$$

d.h., $F_n(x)$ konvergiert im Sinne der starken Konvergenz gegen $F(x)$.

Die Abschätzung (1) im Satz 1 (und auch die folgenden Abschätzungen (2) bis (4)) bleibt richtig, wenn in der Definition der Pseudomomente $\nu_n(r)$ und $\nu_F(r)$ anstatt $F(u+a_{nk};\lambda_{nk})$ die sogenannten begleitenden unbegrenzt teilbaren Verteilungsfunktionen $\tilde{F}_{nk}(u)$ verwendet werden, die die charakteristischen Funktionen

$$\tilde{\varphi}_{nk}(t)=\exp\left(it\mu_{nk}+\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itu}-1-itu)dF_{nk}(u+\mu_{nk})\right),$$

$k=1,2,\ldots,k_n$, $n=1,2,\ldots$,

besitzen. Die Pseudomomente $\alpha_n(s)$ und $\alpha_F(s)$ sind in diesem Fall für $s=1$ und $s=2$ stets Null.

In den folgenden Sätzen sollen gewisse Unstetigkeiten von $F(x)$ zugelassen werden.

SATZ 3: Es seien $F_n(x)$ und $F(x)$ die oben eingeführten Verteilungsfunktionen. $F(x)$ besitze höchstens in abzählbar vielen Punkten x_i, $x_i<x_{i+1}$, $i=0,\pm1,\pm2,\ldots$, Unstetigkeiten. Weiterhin mögen eine Konstante $L>0$ mit $L\leq\min_i(x_{i+1}-x_i)$ und die Ableitung $\frac{dF(x)}{dx}$ mit $|F'(x)|\leq C<\infty$ für alle $x\neq x_i$, $i=0,\pm1,\pm2,\ldots$, existieren. Wenn die Summenverteilungsfunktion $F_n(x)$ eine Treppenfunktion ist, deren möglichen Unstetigkeiten nur bei $x=x_i$, $i=0,\pm1,\pm2,\ldots$, auftreten, dann gilt für beliebige Zahlen $b>\frac{1}{2\pi}$ die Abschätzung

$$\sup_x \left|F_n(x)-F(x)\right| \leq k(b,C)\, \tilde{g}(n,r), \tag{2}$$

falls $\frac{L}{\tilde{g}(n,r)} \geq s(b)$ ist. Dabei sind $k(b,C)$ die Konstante aus Satz 1 und $s(b)$ eine gewisse positive Konstante, die nur von b abhängt.

SATZ 4: Es mögen alle Voraussetzungen des Satzes 3 mit $F(x)$ als Treppenfunktion erfüllt sein.

Dann gilt für beliebige Zahlen $b > \frac{1}{2\pi}$ die Abschätzung

$$\sup_x |F_n(x)-F(x)| \leq k(b)\, \tilde{g}_1(n,r) \tag{3}$$

mit

$$\tilde{g}_1(n,r) = \frac{72}{r6^r}(\nu_F(r)+\nu_n(r)) + 2\sum_{s=1}^{2} 4^{1-s}(\mathfrak{M}_n(s)+|\mathfrak{M}_F(s)|)$$

und

$$k(b) = b \cdot \max_{i=1,2,r} \left(\frac{s(b)}{L}\right)^i .$$

Dabei ist $s(b)$ eine positive Konstante, die nur von b abhängt.

SATZ 5: Wenn die Abschätzungen (2) oder (3) gelten und die absoluten Pseudomomente $\nu_F(r)$ und $\nu_n(r)$ für $n \to \infty$ gegen Null konvergieren, dann ist

$\lim_{n\to\infty} \tilde{g}(n,r) = 0$ oder entsprechend $\lim_{n\to\infty} \tilde{g}_1(n,r) = 0$.

Satz 5 ist eine zu Satz 2 entsprechende Aussage, wenn in den betrachteten Verteilungsfunktionen gewisse Unstetigkeiten zugelassen werden. Aus den Sätzen 3 und 4 lassen sich wie aus Satz 1 Folgerungen über die Fehlerabschätzung der Differenz $F_n(x)-F(x)$ herleiten.

3. ABSCHÄTZUNGEN OHNE DIE VORAUSSETZUNG ÜBER DIE EXISTENZ DER STREUUNGEN

Mit Hilfe der Verteilungsfunktion $F_{nk}(x)$ führen wir eine neue Verteilungsfunktion $F^a_{nk}(x)$, die sogenannte abgeschnittene Verteilungsfunktion, folgendermaßen ein:

$$F^a_{nk}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq -\alpha, \\ F_{nk}(x)-F_{nk}(-\alpha) & , \quad -\alpha < x \leq 0 , \\ F_{nk}(x)+1-F_{nk}(\beta), & \quad 0 < x \leq \beta , \\ 1 & , \quad \beta < x . \end{cases}$$

Dabei sind α und β beliebige positive Konstanten.

Weiterhin bezeichnen wir mit Hilfe des Symbols $\boxed{\ast}_{k=1}^{k_n}$ die k_n-fache Faltung der Verteilungsfunktionen F^a_{nk}, $k=1,2,\ldots,k_n$, d.h.

$$F_n^a(x)=\Big(\mathop{\ast}_{k=1}^{k_n} F_{nk}^a\Big)(x),$$

und mit $\mu_{nk}(a)$ und $\sigma_{nk}^2(a)$ den Erwartungswert und die Streuung von $F_{nk}^a(x)$ und setzen wir

$$\mu_n(a)=\sum_{k=1}^{k_n}\mu_{nk}(a) \quad \text{und} \quad \sigma_n^2(a)=\sum_{k=1}^{k_n}\sigma_{nk}^2(a).$$

Nun definieren wir folgendermaßen eine unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion $\overset{a}{F}(x)$, indem wir von der unbegrenzt teilbaren Verteilungsfunktion $F(x)$ ausgehen: Bekanntlich ist jede unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion über die kanonische Darstellung ihrer charakteristischen Funktion in der Form von LEVY-CHINČIN eindeutig durch die LEVY-CHINČIN-Spektralfunktion $G(u)$ und eine reelle Zahl γ darstellbar. Es sei

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}\,dF(u),$$

dann gilt

$$\varphi(t)=\exp\Big(i\gamma t+\int_{-\infty}^{\infty}\Big(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\Big)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u)\Big),$$

wobei $G(u)$ eine nichtfallende beschränkte Funktion mit $G(-\infty)=0$ ist. Der Integrand wird für $u=0$ gleich $-t^2/2$ gesetzt.

Wir definieren

$$\overset{a}{G}(u)=\begin{cases}0, & u\leq-\alpha,\\ G(u)-G(-\alpha), & -\alpha<u\leq\beta,\\ G(\beta)-G(-\alpha), & \beta<u,\end{cases}$$

und setzen

$$\overset{a}{\gamma}=\gamma-\Big(\int_{-\infty}^{-\alpha}+\int_{\beta}^{\infty}\Big)\frac{dG(u)}{u}.$$

Hierbei seien α und β beliebig positiv und zusätzlich Stetigkeitspunkte von $G(u)$. Damit ist über $\overset{a}{\gamma}$ und $\overset{a}{G}(u)$ eindeutig eine unbegrenzt teilbare charakteristische Funktion $\overset{a}{\varphi}(t)$ definiert, zu der die entsprechende Verteilungsfunktion $\overset{a}{F}(x)$ gehören soll.

Wir führen wie im Abschnitt 2 Pseudomomente ein:

$$\varkappa_{nk}^a(s)=\int_{-\infty}^{\infty}u^s\,d\big(F_{nk}^a(u)-\overset{a}{F}(u+a_{nk};\lambda_{nk})\big),\quad s\geq 0,$$

entsprechend werden $\nu_{nk}^a(r)$, $\varkappa_n^a(s)$, $\nu_n^a(r)$, $\varkappa_{\overset{a}{F}}(s)$ und $\nu_{\overset{a}{F}}(r)$ definiert.

Es seien $\mu(a)$ und $\sigma^2(a)$ der Erwartungswert und die Streuung von $\overset{a}{F}(x)$. Der folgende Satz 6 stellt eine Verallgemeinerung des Satzes 1 dar.

SATZ 6: Es sei $F(x)$ eine unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion. Weiterhin möge die Ableitung $\frac{dF(x)}{dx}$ existieren, für die für alle x die Abschätzung $|F'(x)| \leq C$ mit $0 \leq C < \infty$ gilt.
Die Größen α, β, r und p seien beliebige positive reelle Zahlen mit $2 \leq r \leq 3$ und $0 < p \leq 1$. Dabei mögen $-\alpha$ und β Stetigkeitspunkte der LEVY-CHINČIN-Spektralfunktion $G(u)$ von $F(x)$ sein. Weiterhin sei

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u|^p dG(u) < \infty .$$

Dann gilt für alle Zahlen $b > \frac{1}{2\pi}$ die Abschätzung

$$\sup_x |F_n(x) - F(x)| \leq \sum_{k=1}^{k_n} (F_{nk}(-\alpha) + 1 - F_{nk}(\beta)) + k(b,C) g^a(\alpha,\beta,r,p). \qquad (4)$$

Hierbei ist $k(b,C)$ die Konstante aus Satz 1 und es gilt

$$g^a(\alpha,\beta,r,p) = \left[\frac{4}{p2^p}\left(1 + \frac{1}{\min(\alpha^2,\beta^2)}\right)\left(\int_{-\infty}^{-\alpha} + \int_{\beta}^{\infty}\right)|u|^p dG(u)\right]^{1/(p+1)} +$$

$$+\left[\frac{72}{r6^r}\left(\nu_{\overset{a}{F}}(r) + \nu_n^a(r)\right)\right]^{1/(r+1)} +$$

$$+\left(2\varkappa_n^a(1) + |\varkappa_{\overset{a}{F}}(1)|\right)^{1/2} + \left(\tfrac{1}{2}\varkappa_n^a(2) + |\varkappa_{\overset{a}{F}}(2)|\right)^{1/3} .$$

SATZ 7: Wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) $\int_{-\infty}^{\infty} |u|^p dG(u) < \infty$ für ein $p \in (0,1]$,
2) die Abschätzung (4) gilt,
3) die Zahlen α und β sind von n abhängig, d.h. $\alpha = \alpha_n$ und $\beta = \beta_n$,
4) die Zahlenfolgen $(\alpha_n)_{n=1,2,\ldots}$ und $(\beta_n)_{n=1,2,\ldots}$ sind so monoton wachsend, daß
   $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \infty$
   und die Limesbeziehungen
   $\lim_{n\to\infty} \nu_{\overset{a}{F}}(r) = 0$, $\lim_{n\to\infty} \nu_n^a(r) = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} (F_{nk}(-\alpha_n) + 1 - F_{nk}(\beta_n)) = 0$
   gelten,

dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} g^a(\alpha_n,\beta_n,r,p) = 0$$

und F_n konvergiert im Sinne der starken Konvergenz gegen eine unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion F.

Abschließend formulieren wir eine Aussage über den Zusammenhang zwischen der Summenverteilungsfunktion $F_n(x)$ und der Verteilungsfunktion $F_n^a(x)$.

SATZ 8: Für beliebige Verteilungsfunktionen $F_{nk}(x)$, $k=1,2,\dots,k_n$, gilt stets folgende Abschätzung für die Differenz der Faltung F_n^a der abgeschnittenen Verteilungsfunktionen zur Faltung F_n der Ausgangsverteilungsfunktionen:

$$|F_n(x)-F_n^a(x)| \leq \sum_{k=1}^{k_n}(F_{nk}(-\alpha)+1-F_{nk}(\beta)),\ \alpha>0,\ \beta>0. \tag{5}$$

4. BEWEISE

Zwischen den charakteristischen Funktionen von $F(x)$ und $F(x+a_{nk};\lambda_{nk})$ besteht folgender Zusammenhang:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}dF(u+a_{nk};\lambda_{nk})=\exp(-ia_{nk}t)\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}dF(u;\lambda_{nk})=e^{-ia_{nk}t}\varphi^{\lambda_{nk}}(t).$$

Mit der Dreiecksungleichung gilt nun

$$\begin{aligned}|\varphi_n(t)-\varphi(t)| \leq\ &|\varphi_n(t)-\exp(-ia_nt)\varphi^{\lambda_n}(t)|+\\ &+|\varphi(t)-\exp(-ia_nt)\varphi^{\lambda_n}(t)|,\end{aligned} \tag{6}$$

wobei $\varphi_n(t)$ die charakteristische Funktion von $F_n(x)$ ist.
Es sei $\varphi_{nk}(t)$ die charakteristische Funktion von $F_{nk}(x)$.
Aus der Ungleichung

$$|\varphi_n(t)-\exp(-ia_nt)\varphi^{\lambda_n}(t)| \leq \sum_{k=1}^{k_n}|\varphi_{nk}(t)-\exp(-ia_{nk}t)\varphi^{\lambda_{nk}}(t)|$$

erhalten wir für den ersten Ausdruck auf der rechten Seite von (6)

$$\begin{aligned}|\varphi_n(t)-\exp(-ia_nt)\varphi^{\lambda_n}(t)| \leq\ &|t|\varkappa_n(1)+\frac{t^2}{2}\varkappa_n(2)+\\ &+\sum_{k=1}^{k_n}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itu}-1-itu-\frac{(itu)^2}{2}\right)d(F_{nk}(u)-F(u+a_{nk};\lambda_{nk}))\right|.\end{aligned}$$

Auf Grund der Beziehung (z reell, $m\geq 0$)

$$\left|e^{iz}-\sum_{j=0}^{m}\frac{(iz)^j}{j!}\right| \leq \frac{|z|^m}{m!}\ \frac{2|z|^{\varepsilon}}{(2(m+1))^{\varepsilon}},\quad 0\leq\varepsilon\leq 1,$$

ergibt sich für $m=2$ und $r=m+\varepsilon$, $2\leq r\leq 3$, die Abschätzung

$$|\varphi_n(t)-\exp(-ia_nt)\varphi^{\lambda_n}(t)| \leq \frac{|t|^r}{6^{r-2}}\nu_n(r)+|t|\varkappa_n(1)+\frac{t^2}{2}\varkappa_n(2). \tag{7}$$

Für den zweiten Summanden auf der rechten Seite der Ungleichung (6) läßt sich mit Hilfe der gleichen Überlegungen zeigen, daß

$$|\varphi(t)-\exp(-ia_n t)\varphi^{\lambda_n}(t)| \leq \frac{36}{6^r}|t|^r \nu_F(r)+|t||\varkappa_F(1)| + \frac{t^2}{2}|\varkappa_F(2)|, \qquad (8)$$

mit $2 \leq r \leq 3$ gilt.

Aus der bekannten Abschätzung von C.G.ESSEEN /2/

$$\sup_x |F_n(x)-F(x)| \leq b \int_{-T}^{T} \left|\frac{\varphi_n(t)-\varphi(t)}{t}\right| dt + r(b)\frac{C}{T},\ T>0, \qquad (9)$$

folgt mit $T=\frac{1}{g(n,r)}$ unter Ausnutzung der Ungleichungen (6) bis (8) die Behauptung des Satzes 1.

Die Voraussetzung $\varkappa_{nk}(s)=0$, $s=1,2$, $k=1,2,\dots,k_n$, der Folgerung 1 ist genau dann erfüllt, wenn die Zahlen a_{nk} und λ_{nk} wie folgt festgelegt werden:

$$a_{nk} = \frac{\sigma_{nk}^2}{\sigma^2}\mu-\mu_{nk},\ k=1,2,\dots,k_n, \qquad (10)$$

und

$$\lambda_{nk} = \frac{\sigma_{nk}^2}{\sigma^2}\quad ,\ k=1,2,\dots,k_n. \qquad (11)$$

Aus den Gleichungen (10) und (11) ergeben sich damit die Beziehungen

$$|\varkappa_F(1)| = |\mu-\mu_n| \quad \text{und} \quad |\varkappa_F(2)| = |\sigma^2-\sigma_n^2+\mu^2-\mu_n^2|.$$

Die Sätze 2 und 5 folgen aus den Ungleichungen

$$\varkappa_n(s) \leq \nu_n(s) \quad \text{und} \quad |\varkappa_F(s)| \leq \nu_F(s) \quad \text{für} \quad s \leq r.$$

Der Satz 3 ergibt sich wie Satz 1, wobei eine der Ungleichung (9) entsprechende Aussage von C.G.ESSEEN /2/ verwendet wird, die für die im Satz 3 betrachteten unstetigen Verteilungsfunktionen und für

$$T \geq \frac{s(b)}{L} > 0 \qquad (12)$$

gilt.

Der wichtigste Unterschied zwischen den Abschätzungen (2) und (3) der Sätze 3 und 4 besteht darin, daß die Potenzen $\frac{1}{r+1}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$ in den Ausdrücken von $g(n,r)$ in der Definitionsgleichung für $\tilde{g}_1(n,r)$ durch 1 ersetzt wurden. Der Grund hierfür ist, daß die im Satz 3 auftretende Konstante C gleich Null gesetzt werden kann und bei Anwendung der ESSEENschen Ungleichung (9) unter Beachtung von (12) für $T=\frac{s(b)}{L}$ der Ausdruck $\tilde{g}_1(n,r)$ erhalten wird.

Der Beweis des Satzes 6 baut auf der Dreiecksungleichung

$$|F_n(x)-F(x)| \leq |F_n(x)-F_n^a(x)| + |F_n^a(x)-F(x)| \qquad (13)$$

auf. Der erste Term auf der rechten Seite von (13) wird mittels Satz 8 abgeschätzt.

Es sei $\varphi^a_{nk}(t)$ die charakteristische Funktion von $F^a_{nk}(x)$, d.h.

$$\varphi^a_n(t) = \prod_{k=1}^{k_n} \varphi^a_{nk}(t)$$

ist die charakteristische Funktion von $F^a_n(x)$. Es gilt

$$|\varphi^a_n(t)-\varphi(t)| \leqq |\varphi^a_n(t)-\overset{a}{\varphi}(t)| + |\overset{a}{\varphi}(t)-\varphi(t)| . \tag{14}$$

Die Abschätzung von $|\varphi^a_n(t)-\overset{a}{\varphi}(t)|$ erfolgt entsprechend dem Beweis des Satzes 1.

Nach Lemma 1 von J.M.SHAPIRO /5/ gilt weiterhin

$$\begin{aligned} |\overset{a}{\varphi}(t)-\varphi(t)| &\leqq |\ln \overset{a}{\varphi}(t)-\ln\varphi(t)| = \\ &= \left|\left(\int_{-\infty}^{-\alpha}+\int_{\beta}^{\infty}\right)(e^{itu}-1)\frac{1+u^2}{u^2}dG(u)\right| . \end{aligned} \tag{15}$$

Im betrachteten Integrationsgebiet der Beziehung (15) gilt *nun*

$$\frac{1+u^2}{u^2} \leqq 1 + \frac{1}{\min(\alpha^2,\beta^2)} .$$

Mit

$$|e^{itu}-1| \leqq 2^{1-p}|tu|^p, \quad 0<p\leqq 1,$$

folgt das Zwischenergebnis

$$|\overset{a}{\varphi}(t)-\varphi(t)| \leqq 2^{1-p}\left(1+\frac{1}{\min(\alpha^2,\beta^2)}\right)|t|^p\left(\int_{-\infty}^{-\alpha}+\int_{\beta}^{\infty}\right)|u|^p dG(u). \tag{16}$$

Nach Anwendung der Ungleichung (9) zur Abschätzung des zweiten Summanden auf der rechten Seite von (13) folgt mit $T=\dfrac{1}{g^a(\alpha,\beta,r,p)}$ die Beziehung (4) des Satzes 6.

Die Aussage des Satzes 7 ergibt sich sofort aus den Voraussetzungen dieses Satzes.

Der Beweis des Satzes 8 kann mit Hilfe der Methode der vollständigen Induktion geführt werden.

5. BEISPIEL

Wir betrachten eine Doppelfolge (X_{nk}, $k=1,2,\ldots,k_n$, $n=1,2,\ldots$) von für jedes feste n unabhängigen Zufallsgrößen, deren Summenverteilungsfunktion $F_n(x)$ gegen eine unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion $F(x)$ konvergiert, obwohl die Infinitesimalitätsbedingung nicht erfüllt ist. Es sei $k_n=n$ und für jedes n gelte

$$F_{nk}(x) = \emptyset(2^{k/2}x), \quad k=1,2,\ldots,n,$$

wobei $\emptyset(x)$ die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung ist. D.h., wir betrachten normalverteilte Zufallsgrößen mit

$$EX_{nk}=0 \quad \text{und} \quad D^2X_{nk}=(\tfrac{1}{2})^k .$$

Die Summenverteilungsfunktion

$$F_n(x) = \emptyset\left(\frac{x}{\sqrt{1-(\frac{1}{2})^n}}\right)$$

konvergiert gegen die unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion

$$F(x) = \emptyset(x).$$

Mit $a_{nk}=0$ und $\lambda_{nk}=(\frac{1}{2})^k$ erhalten wir folgende Komponenten der Grenzverteilungsfunktion:

$$F(x+a_{nk};\lambda_{nk}) = \emptyset(2^{k/2}x).$$

Die Pseudomomente $\varkappa_n(1)$, $\varkappa_n(2)$, $\varkappa_F(1)$ und $\nu_n(r)$ sind Null. Es ist $|\varkappa_F(2)| =(\frac{1}{2})^n$ und mit r=2 gilt

$$\nu_F(2)=\int_{-\infty}^{\infty} u^2 \left| d(\emptyset(u;1-(\tfrac{1}{2})^n)-\emptyset(u))\right| \leqq (\tfrac{1}{2})^{n-4}.$$

Damit folgt für unser Beispiel aus Satz 2 die Konvergenzgeschwindigkeit

$$\sup_x \left| F_n(x)-F(x)\right| = O(2^{-n/3}) \quad \text{für} \quad n\longrightarrow\infty .$$

LITERATUR

/1/ BOONYASOMBUT, V./SHAPIRO, J.M.: The accuracy of infinitely divisible approximation to sums of independent variables with application to stable laws. Ann. Math. Statist. 41 (1970) No.1, S.237-250

/2/ GNEDENKO, B.V./KOLMOGOROV, A.N.: Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen. Akademie-Verl. Berlin 1960 (2.Aufl.)

/3/ LINNIK, J.V./OSTROVSKIJ, I.V.: Razloženija slučajnych veličin i vektorov. Moskva 1972

/4/ PADITZ, L.: Dissertation(A) Techn. Univ. Dresden 1977

/5/ SHAPIRO, J.M.: Error estimates for certain probability limit theorems. Ann. Math. Statist. 26 (1955) No.4, S.617-630

/6/ ZOLOTARJEV, V.M.: O blizosti raspredelenij dvuch summ nezavisimych slučajnych veličin. Teorija verojatn. i ee primen. 10 (1965) No.3, S.519-526

III-9-276 JG02/77/5267