TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

ABSCHÄTZUNGEN DER KONVERGENZGESCHWINDIGKEIT ZUR NORMALVERTEILUNG UNTER VORAUSSETZUNG EINSEITIGER MOMENTE (TEIL 1)

von

Ludwig Paditz
Sektion Mathematik

07 - 05 - 76

INFORMATIONEN

Als Manuskript gedruckt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

ABSCHÄTZUNGEN DER KONVERGENZGESCHWINDIGKEIT ZUR NORMALVERTEILUNG UNTER VORAUSSETZUNG EINSEITIGER MOMENTE (TEIL 1)

von
Ludwig Paditz
Sektion Mathematik

07 - 05 - 76

1. EINFÜHRUNG

Beim Studium der Arbeiten [1], [3], [5] und [7] stellte sich heraus, daß sowohl S. NAGAJEV [5] und A. BIKELIS [3] als auch H. RUBIN/J. SETHURAMAN [7] und N. AMOSOVA [1] vom Grundgedanken her die gleiche Beweisidee hatten. Diese spiegelt sich darin wider, daß zu Beginn der Beweise die Zufallsgrößen bzw. deren Verteilungen einseitig abgeschnitten werden. Danach werden sogenannte konjugierte Verteilungen eingeführt, die über die Dreiecksungleichung in die abzuschätzende Differenz eingeschachtelt und schließlich mit der Normalverteilung verglichen werden. In den Arbeiten von A. BIKELIS [3] und S. NAGAJEV [5] ist diese Vorgehensweise deutlich zu erkennen, während sie bei N. AMOSOVA [1] und H. RUBIN/J. SETHURAMAN [7] nur bei genauerem Studium der Beweise entdeckt wird.

Im vorliegenden Artikel wird die abgeschnittene Wahrscheinlichkeitsmasse in den Nullpunkt gelegt, wodurch die abgeschnittenen Verteilungen selbst auch wieder Verteilungen sind. Dadurch werden quantitativ bessere Abschätzungen erzielt.

S. NAGAJEV [5] betrachtet schon im Beweis seines Satzes 2 die sogenannte Sattelpunktsgleichung $m(h)-h = 0$ genauer, um ein entsprechendes h als Lösung dieser Gleichung im Beweis zu verwenden. Falls aber diese Gleichung im vorgegebenen Bereich nicht lösbar ist, wird durch eine Approximation der Beweis zu Ende geführt. Diese Vorgehensweise tritt bei H. RUBIN/J. SETHURAMAN [7] nicht auf. Hier wird von vorn herein ein gewisses h festgelegt. Die genaue Lösung der Sattelpunktsgleichung wird außer acht gelassen, wodurch u.a. auch die Approximation der Lösung wegfällt, da offenbar eine genaue Lösung der Sattelpunktsgleichung erst bei den Aussagen über große Abweichungen benötigt wird.

Im Synthese der oben erwähnten Arbeiten [1], [3], [5] und [7] wurde vom Autor eine genauere Beweistechnik erarbeitet, die es gestattet, den Satz 2 aus der Arbeit von S. NAGAJEV [5] quantitativ zu verschärfen. Dabei werden für die auftretenden Konstanten konkrete Größenordnungen angegeben (Abschnitt 2).

Im Abschnitt 3 werden analoge Aussagen formuliert, wenn nur die Existenz einseitiger Momente gefordert wird.

Die ungleichmäßigen Abschätzungen werden in der Nullpunktumgebung durch schärfere gleichmäßige ersetzt. Hierbei werden die Aussagen von W. FELLER in [4] und P. VAN BEEK in [2] genutzt, die konkrete

Konstanten zur gleichmäßigen Abschätzung des Restgliedes im zentralen Grenzwertsatz angeben.
In den Abschnitten 4 und 5 werden die bisher formulierten Aussagen bewiesen.
Über das qualitative Verhältnis gleichmäßiger und ungleichmäßiger Abschätzungen wurde in der Arbeit [6] diskutiert.
Die in den Abschnitten 4 und 5 notwendigen numerischen Berechnungen wurden auf einem sowjetischen Rechenautomaten BESM 6 ausgeführt.
Die Aussagen von N. AMOSOVA [1] über mittlere Abweichungen werden im Abschnitt 6 verschärft, wobei im Satz 16 nur das zweite Moment und keine höheren einseitigen Momente vorausgesetzt werden. Hier ist deutlich zu erkennen, daß schwächere Voraussetzungen eine Verkleinerung des Gebeites nach sich ziehen, in dem die Aussagen gelten.
Im vorletzten Abschnitt werden die Aussagen über mittlere Abweichungen bewiesen.
Während in den Abschnitten 2 und 3 mit identisch verteilten Zufallsgrößen gearbeitet wird, betrachten wir im Abschnitt 6 den allgemeineren Fall verschieden verteilter Zufallsgrößen.
Im letzten Abschnitt werden die erhaltenen Ergebnisse gegenübergestellt und diskutiert.

2. GRENZWERTSÄTZE FÜR IDENTISCH VERTEILTE ZUFALLSGRÖSSEN

Wir betrachten eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ mit der gemeinsamen Verteilungsfunktion $F(x)$, den Erwartungswerten $EX_1 = 0$ und den Streuungen $D^2X_1 = 1$.
Es sei $c_m = E|X_1|^m$, $m \geq 2$, das m-te absolute Moment unserer Ausgangsverteilung und $F_n(x)$ die Verteilungsfunktion der Summe $X_1+X_2+\dots+X_n$, $n=1,2,\dots$. S. NAGAJEV [5] bewies 1965 folgenden Satz

<u>SATZ 1:</u> Wenn $c_m < \infty$ für $m \geq 2$ ist, so gilt für alle $x > 0$ und $y > 0$

$$1-F_n(x) \leq n(1-F(y)) + \exp(\frac{e}{2}n(\frac{1}{y}\ln\frac{y^m}{nc_mK_m})^2+1)(\frac{nc_mK_m}{y^m})^{\frac{x}{y}}, \qquad (2.1)$$

wobei $K_m = 1+(m(m+1)^{m+1}+em^m)e^{-m} < 1+(m+1)^{m+2}e^{-m}$ gilt.
Bei S. NAGAJEV stand in (2.1) im Exponenten anstatt e/2 der Faktor 2.
Eine entsprechende Behauptung gilt für $F_n(-x)$.
Die von S. NAGAJEV dazu angegebene Folgerung 1 formulieren wir hier in verschärfter Form:

__FOLGERUNG 1:__ Wenn $c_m < \infty$ für $m \geqq 2$ ist, so gilt für alle

$x \geqq k(c_m K_m)^{1/m}\sqrt{n}\ \ln n$, $n \geqq 3$ und $k \geqq 1$,

$$1-F_n(x) \leqq n\left(1-F\left(\frac{x}{k}\right)\right) + \exp\left(Am^2(c_m K_m)^{-2/m} + 1\right)\left(\frac{nk^m c_m K_m}{x^m}\right)^k$$

mit $A = 1{,}0238$.

Ursprünglich stand in der von S. NAGAJEV zu Satz 1 erhaltenen Folgerung 1 im Exponenten der Wert

$$2k^2m^2\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{2}K_m^{-1/m}\right)^2 + 1,$$

der mit k und m unbeschränkt anwachsen konnte. In unserem Fall ist dieser Exponent nach oben beschränkt.

Die von S. NAGAJEV angegebene Folgerung 2 lautet:

__FOLGERUNG 2:__ Wenn $c_m < \infty$ für $m \geqq 2$ ist, so gilt

für alle $x \geqq 4\sqrt{n\ \max\left(\ln \frac{n^{\frac{m}{2}-1}}{c_m K_m},\ 1\right)}$

$$1-F_n(x) \leqq \frac{nc_m B_m}{x^m} \quad . \tag{2.2}$$

Dabei ist B_m eine Konstante, die nur von m abhängt.

Während S. NAGAJEV für B_m keine konkrete Größenordnung angab, können wie hier an Hand eines Beweises zeigen, daß gilt:

$$B_m \leqq 2^m + \exp\left(\frac{e}{8}m^2 \ln^2\left(\frac{\vartheta m+4}{2}\right)+1\right)(\vartheta m)^m K_m \quad \text{mit } \vartheta = \max\left(\frac{e^{1/m}}{2},\ \frac{4}{8-e}\right) .$$

In seiner Arbeit [5] von 1965 formulierte S. NAGAJEV weiterhin folgendes grundlegende Ergebnis:

__SATZ 2:__ Wenn $c_3 < \infty$ ist, dann existiert eine absolute Konstante L derart, daß für alle reellen x und natürlichen Zahlen n gilt:

$$\left|F_n(x\sqrt{n}) - \emptyset(x)\right| \leqq \frac{Lc_3}{(1+|x|^3)\sqrt{n}} \quad . \tag{2.3}$$

$\emptyset(x)$ bedeutet hier und in den folgenden Sätzen die standardisierte Normalverteilung.

Der Beweis dieses Satzes 2 gliedert sich im wesentlichen in fünf Teile, die hier in abgeänderter Form als Sätze 3 bis 7 formuliert werden. Diese Sätze stellen eine Verschärfung der Aussage des Satzes 2 dar. Es sei in allen folgenden Sätzen $c_3 < \infty$. Weiterhin werden folgende Abkürzungen verwendet: $L_o = 0{,}7882$, $M_3 = 27K_3$, $a_o = (c_3 M_3)^2$, $n_o = a_o \exp(\frac{2}{3}e^3)$, $a_2 = \sqrt{3}$, $a_4 = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $a_5 = \sqrt{8}$ und $a_6 = 12{,}6783$.

SATZ 3: Wenn $n > n_o$ ist, dann gilt für alle x, die der Bedingung

$a_2 \leq x \leq a_4\sqrt{\ln\frac{n}{a_o}}$ genügen, folgende Ungleichung

$$|F_n(x\sqrt{n})-\emptyset(x)| \leq \frac{L_1 c_3}{x^3\sqrt{n}}$$

mit $L_1=1955,7324$.

SATZ 4: Wenn $n > n_o$ ist, dann gilt für alle x, die der Bedingung

$\alpha\sqrt{\ln\frac{n}{a_o}} < x \leq \beta\sqrt{\ln\frac{n}{a_o}}$ mit $a_4 \leq \alpha < \beta \leq a_5$ und $\frac{\alpha a_4}{\beta} \geq 1,0721$

genügen, die Ungleichung

$$|F_n(x\sqrt{n})-\emptyset(x)| \leq \frac{L_2 c_3}{x^3\sqrt{n}} \quad .$$

Dabei ist L_2 eine Konstante, die nur von α und β abhängt.

Es gilt $L_2=L_2(\alpha,\beta)= \dfrac{2e^3\beta^3 M_3}{3\sqrt{3\pi}\exp(((\frac{\alpha a_4}{\beta})^2-1)\frac{1}{3}e^3)} + L_1\cdot(\frac{\beta}{a_4})^3$.

SATZ 5: Wenn $n > n_o$ ist, dann gilt für alle x, die der Bedingung

$x > a_5\sqrt{\ln\frac{n}{a_o}}$ genügen, folgende Ungleichung

$$|F_n(x\sqrt{n})-\emptyset(x)| \leq \frac{L_3 c_3}{x^3\sqrt{n}} \qquad (2.4)$$

mit $L_3=32,9491$.

Bemerkung: Der absolute Fehler der in Satz 3 angegebenen Abschätzung ist kleiner als $4,042\cdot10^{-4}$. Für den absoluten Fehler in Satz 4 kann man unabhängig von α und β zeigen, daß er kleiner als $8,825\cdot10^{-5}$ ist. In der Abschätzung (2.4) beträgt der absolute Fehler weniger als $3,18\cdot10^{-8}$.

SATZ 6: Wenn $n \leq n_o$ ist, dann gilt für alle $x \geq a_6$ die Abschätzung

$$|F_n(x\sqrt{n})-\emptyset(x)| \leq \frac{L_4 c_3}{x^3\sqrt{n}} \qquad (2.5)$$

mit $L_4=1606,2599$.

Für kleine x, das heißt speziell für den bisher noch nicht betrachteten x-Bereich $0 \leq x < a_2$ im Fall $n > n_o$ bzw. $0 \leq x < a_6$ im Fall $n \leq n_o$, geben wir die gleichmäßige Abschätzung von BERRY-ESSEEN mit der von VAN BEEK [2] berechneten absoluten Konstanten L_o an, da in diesem Fall keine schärfere ungleichmäßige Abschätzung bekannt ist.

SATZ 7: Für alle natürlichen Zahlen n gilt $|F_n(x\sqrt{n})-\emptyset(x)| \leq \frac{L_o c_3}{\sqrt{n}}$.

Für negative x gelten die zu diesen Sätzen entsprechenden Aussagen. In der Arbeit von S. NAGAJEV sind praktisch die Sätze 3 bis 7 zu der Ungleichung (2.3) zusammengefaßt. Aus diesen Sätzen wird deutlich, in welcher Größenordnung die absolute Konstante L einzuordnen wäre.

3. ÜBERTRAGUNG DER FORMULIERTEN GRENZWERTSÄTZE AUF DEN FALL DER EXISTENZ EINSEITIGER MOMENTE

Es sei $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen mit der gemeinsamen Verteilungsfunktion $F(x)$, den Erwartungswerten $EX_1=0$ und den Streuungen $D^2X_1=1$.
Mit β_m bezeichnen wir das m-te einseitige Moment unserer Ausgangsverteilung über der positiven x-Achse: $\beta_m = \int_0^\infty x^m dF(x)$, $m \geq 2$.

Weiterhin sei $b_m=\max(1;\beta_m)$ und $F_n(x)$ die Verteilungsfunktion der Summe $X_1+X_2+\ldots+X_n$, $n=1,2,\ldots$.

<u>SATZ 8:</u> Wenn $b_m < \infty$ für $m \geq 2$ ist, so gilt für alle $x > 0$ und $y > 0$

$$1-F_n(x) \leq n(1-F(y)) + \exp\left(\frac{e}{2}n\left(\frac{1}{y}\ln\frac{y^m}{nb_mK_m}\right)^2+1\right)\left(\frac{nb_mK_m}{y^m}\right)^{\frac{x}{y}} .$$

Unter Verwendung des einseitigen Moments über der negativen x-Achse gilt eine entsprechende Aussage für $F_n(-x)$.

<u>FOLGERUNG 3:</u> Wenn $b_m < \infty$ für $m \geq 2$ ist, so gilt für alle

$$x \geq k(b_mK_m)^{1/m}\sqrt{n}\ln n,\quad n \geq 3 \text{ und } k \geq 1,$$
$$1-F_n(x) \leq n\left(1-F\left(\frac{x}{k}\right)\right) + \exp\left(Am^2(b_mK_m)^{-2/m}+1\right)\left(\frac{nb_mk^mK_m}{y^m}\right)^k .$$

<u>FOLGERUNG 4:</u> Wenn $b_m < \infty$ für $m \geq 2$ ist, so gilt

$$\text{für alle } x \geq 4\sqrt{n\max\left(\ln\frac{n^{\frac{m}{2}-1}}{b_mK_m},\ 1\right)}$$
$$1-F_n(x) \leq \frac{nb_mB_m}{x^m} .$$

Wir bemerken, daß Satz 8 und die Folgerungen 3 und 4 ihre Gültigkeit behalten, wenn wir überall b_m durch β_m ersetzen.
In allen folgenden Sätzen sei $b_3 < \infty$. Weiterhin werden folgende Abkürzungen verwendet: $L_5=7{,}6397$, $a_1=b_3^{\,2}$, $n_1=a_1\exp(\frac{2}{3}e^3)$, $a_3=1$ und $a_7=3{,}2200$.

In den Sätzen 9, 10 und 13 fordern wir für $n > n_1$ bzw. $n > 1$ von der Ausgangsverteilung noch folgende Bedingung:

$$\int\limits_{|z| > H_n} z^2 dF(z) \leqq \frac{K}{\ln n}\,, \tag{3.1}$$

wobei K eine absolute Konstante und $H_n = \frac{\sqrt{n}}{(\ln n)^{3/2}}$ ist. Wir beweisen diese Sätze für K=1.

SATZ 9: Wenn $n > n_1$ ist, dann gilt für alle x, die der Bedingung

$a_3 \leqq x \leqq a_4\sqrt{\ln \frac{n}{a_1}}$ genügen, folgende Ungleichung

$$|F_n(x\sqrt{n})-\emptyset(x)| \leqq \min\left(\frac{L_6\, b_3}{x^3 \ln n}, \frac{L_5}{\ln n}\right)$$

mit $L_6=144{,}2554$.

SATZ 10: Wenn $n > n_1$ ist, dann gilt für alle x, die der Bedingung

$a_4\sqrt{\ln \frac{n}{a_1}} < x \leqq a_5\sqrt{\ln \frac{n}{a_1}}$ genügen, die Ungleichung

$$|F_n(x\sqrt{n})-\emptyset(x)| \leqq \min\left(\frac{L_7 b_3}{x^3 \ln n}, \frac{L_5}{\ln n}\right) \quad \text{mit } L_7=1814{,}4610.$$

SATZ 11: Wenn $n > n_1$ ist, dann gilt für alle $x > a_5\sqrt{\ln \frac{n}{a_1}}$

$$|F_n(x\sqrt{n})-\emptyset(x)| \leqq \frac{L_8 b_3}{x^3\sqrt{n}} \quad \text{mit } L_8=16{,}2634.$$

Bemerkung: In den Sätzen 9 und 10 ist der absolute Fehler der angegebenen Abschätzungen jeweils kleiner als 0,57054, im Satz 11 dagegen ist er kleiner als $1{,}815\cdot 10^{-5}$. In diesem Satz weisen wir darauf hin, daß hier wie im Satz 5 die Konvergenzgeschwindigkeit $n^{-1/2}$ beträgt.

SATZ 12: Wenn $1 < n \leqq n_1$ ist, dann gilt für alle $x \geqq a_7$ die

Abschätzung $|F_n(x\sqrt{n})-\emptyset(x)| \leqq \frac{L_9\, b_3}{x^3\sqrt{n}}$ mit $L_9=26991{,}0811$.

Für die bisher noch nicht betrachteten kleinen x-Werte $0 \leqq x < a_3$ im Fall $n > n_1$ bzw. $0 \leqq x < a_7$ im Fall $1 < n \leqq n_1$ geben wir eine gleichmäßige Abschätzung an, die sich aus der Arbeit [4] von W. FELLER ergibt. In diesem Fall ist keine schärfere ungleichmäßige Abschätzung bekannt.

SATZ 13: Es gilt für alle natürlichen Zahlen $n > 1$ die Abschätzung

$$|F_n(x\sqrt{n})-\emptyset(x)| \leqq \frac{L_{10}}{\ln n} \quad \text{mit } L_{10}=8{,}1073.$$

Im Fall $n \geq n_1$ kann im Satz 13 L_{11} durch L_5 ersetzt werden.
Für negative x erhält man zu den Sätzen 9 bis 12 entsprechende Aussagen, wenn anstelle von β_m die Existenz des einseitigen Moments

$$\int_{z=-\infty}^{0} |z|^m dF(z)$$

vorausgesetzt wird.

4. BEWEISE ZUM ABSCHNITT 2

4.1. BEWEIS ZUR FOLGERUNG 1:

Wir setzen im Satz 1 $y=\frac{x}{k}$. Wegen $m \geq 2$ und $n \geq 3$ gilt $\frac{x}{k} > (nc_m K_m)^{1/m}$, das heißt $\left(\frac{nc_m K_m}{y^m}\right)^{x/y} < 1$. Wenden wir uns jetzt der Abschätzung des in der Ungleichung (2.1) auftretenden Faktors

$$\exp\left(\frac{e}{2}n\left(\frac{k}{x} \ln \frac{x^m}{nk^m c_m K_m}\right)^2 + 1\right) = \exp\left(\frac{e}{2}k^2 m^2\left(\frac{\sqrt{n}}{x} \ln \frac{x}{k(nc_m K_m)^{1/m}}\right)^2 + 1\right)$$

zu. Es gilt:

$$\frac{\sqrt{n}}{x} \ln \frac{x}{k(nc_m K_m)^{1/m}} =$$

$$= \frac{\sqrt{n}\, k(c_m K_m)^{1/m}}{x} \ln\left(\frac{x}{\sqrt{n}\, k(c_m K_m)^{1/m}}\right)\frac{1}{k(c_m K_m)^{1/m}} + \frac{\sqrt{n}}{x} \ln \frac{\sqrt{n}}{n^{1/m}} \leq \frac{2+e}{2ek(c_m K_m)^{1/m}}$$

4.2. BEWEIS ZUR FOLGERUNG 2:

1. Es sei $n^{m/2-1} > ec_m K_m$. Wir setzen im Satz 1 $y=\frac{x}{2}$.
Die Abschätzung des Arguments der Exponentialfunktion ergibt dann mit $\frac{x}{\sqrt{n}} \geq 4\sqrt{\ln \frac{n^{m/2-1}}{c_m K_m}} > 4$:

$$\frac{e}{2}\left(\frac{2\sqrt{n}}{x} \ln \frac{x^m}{2^m nc_m K_m}\right)^2 \leq \frac{e}{2}\left(\frac{2m\sqrt{n}}{x} \ln \frac{x(8-e)}{2\sqrt{n}\, 8m}\right)^2 + \ln \frac{n^{m/2-1}(4m)^m}{c_m K_m (8-e)^m} .$$

Daraus folgt die Abschätzung (2.2) mit dem dort angeführten B_m.
2. Im Fall $n^{m/2-1} \leq ec_m K_m$ wenden wir Satz 1 ebenfalls mit $y = \frac{x}{2}$ an. Wir erhalten für das Argument der Exponentialfunktion, die in der Beziehung (2.1) auftritt, daß

$$\frac{e}{2}\left(\frac{\sqrt{n}}{y} \ln \frac{y^m}{nc_m K_m}\right)^2 \leq \frac{e}{2}m^2\left(\frac{2\sqrt{n}}{x} \ln \frac{x}{\sqrt{n}\, me^{1/m}}\right)^2 + \ln \frac{em^m n^{m/2-1}}{2^m c_m K_m}$$

gilt. Aus der Ungleichung

$$\frac{e}{2}m^2\left(\frac{2\sqrt{n}}{x} \ln \frac{x}{\sqrt{n}\, me^{1/m}}\right)^2 \leq \frac{e}{8}m^2\left(\ln \frac{me^{1/m}+8}{4}\right)^2$$

ergibt sich auch in diesem Fall die Abschätzung (2.2).

4.3. BEWEIS DES SATZES 3:

Mit $F^y(z)$ bezeichnen wir folgende Verteilungsfunktion:

$$F^y(z) = \begin{cases} F(z) & , \quad z \leq 0 \\ F(z) + 1-F(y), & 0 < z \leq y \\ 1 & , \quad y < z \end{cases} \qquad \text{mit } y > 0 .$$

$F_n^y(z) = F^{y^{*n}}(z)$ sei die n-fache Faltung der Verteilungsfunktion F^y. Im weiteren werden folgende Bezeichnungen benutzt:

$$F_h^y(z) = \int_{-\infty}^{z} e^{hu} dF^y(u), \quad F_{nh}^y(z) = F_h^{y^{*n}}(z), \quad h > 0,$$

$$R_1(h) = \int_{-\infty}^{1/h} e^{hu} dF^y(u), \quad R_2(y,h) = \int_{1/h}^{y} e^{hu} dF^y(u), \quad R(y,h) = R_1(h)+R_2(y,h),$$

$$\bar{R}_1(h) = \int_{-\infty}^{1/h} u e^{hu} dF(u), \quad \bar{\bar{R}}_1(h) = \int_{-\infty}^{1/h} u^2 e^{hu} dF(u), \quad m(h) = \frac{\bar{R}_1(h)}{R_1(h)},$$

$$\sigma^2(h) = \frac{\bar{\bar{R}}_1(h)}{R_1(h)} - m^2(h), \quad \beta(h) = \frac{1}{R_1(h)} \int_{-\infty}^{1/h} |u-m(h)|^3 e^{hu} dF^y(u) .$$

Wir betrachten die Zerlegung $F_h^y(z) = \varnothing_h(z) + \psi_h^y(z)$

$$\text{mit } \varnothing_h(z) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{z} e^{hu} dF^y(u), & z \leq \frac{1}{h} \\ \int_{-\infty}^{1/h} e^{hu} dF^y(u), & z > \frac{1}{h} \end{cases} \quad \text{und } \psi_h^y(z) = \begin{cases} 0 & , \quad z \leq \frac{1}{h} \\ \int_{1/h}^{z} e^{hu} dF^y(u), & z > \frac{1}{h} \end{cases} .$$

Es sei $\varnothing_{nh}(z) = \varnothing_h^{*n}(z)$. Wir setzen $h = \frac{x}{n}$ und $y = \frac{x}{3}$.

Im Intervall $a_2\sqrt{n} \leq x \leq a_4\sqrt{n \ln \frac{n}{a_0}}$ gilt somit $\frac{1}{h} \leq y$.

Da der Quotient $\frac{\varnothing_h(z)}{R_1(h)}$ die Verteilungsfunktion einer gewissen Zufallsgröße Y mit dem Erwartungswert m(h) und der Streuung $\sigma^2(h)$ ist, so stellt $\bar{\varnothing}_{nh}(u) = R_1^{-n}(h)\varnothing_{nh}(x+u\sigma(h)\sqrt{n})$ die Verteilungsfunktion der normierten Summe $Y_1+Y_2+\ldots+Y_n$ von n unabhängigen wie Y verteilten Zufallsgrößen mit dem Erwartungswert $\frac{nm(h)-x}{\sigma(h)\sqrt{n}}$ dar. Somit ist

$\bar{\varnothing}_{nh}(u+\frac{nm(h)-x}{\sigma(h)\sqrt{n}}) = R_1^{-n}(h)\varnothing_{nh}(nm(h)+u\sigma(h)\sqrt{n})$ die standardisierte Verteilungsfunktion der eben erwähnten Summe von Zufallsgrößen.

Wir betrachten folgende Zerlegung:

$$\left|F_n(x) - \emptyset\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|F_n(x)-F_n^{\,y}(x)\right| + \left|F_n^{\,y}(\infty)-F_n^{\,y}(x) - \int_x^{\infty} e^{-hu}\, d\emptyset_{nh}(u)\right| +$$

$$+ \left|\int_x^{\infty} e^{-hu}\, d\emptyset_{nh}(u) - \left(F_n^{\,y}(\infty)-\emptyset\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)\right| . \qquad (4.1)$$

Für den ersten Summanden auf der rechten Seite von (4.1) benutzen wir die Abschätzung

$$\left|F_n(x)-F_n^{\,y}(x)\right| \leq n(1-F(y)) \leq \frac{nc_3}{y^3} = \frac{27nc_3}{x^3} . \qquad (4.2)$$

Es gilt für den zweiten Ausdruck auf der rechten Seite von (4.1):

$$\left|\int_x^{\infty} dF_n^{\,y}(u) - \int_x^{\infty} e^{-hu}\, d\emptyset_{nh}(u)\right| \leq e^{-hx}\; nR^{n-1}(y,h)R_2(y,h) \leq$$

$$\leq \exp\left(-hx+n\left[R_1(h)-1-\frac{x^2}{2n^2}\right]+\frac{x^2}{2n} +nR_2(y,h)\right) \frac{n}{R(y,h)}\, R_2(y,h) . \qquad (4.3)$$

Der dritte Summand auf der rechten Seite von (4.1) läßt sich folgendermaßen auswerten:

$$\left|\int_x^{\infty} e^{-hu}\, d\emptyset_{nh}(u) - \left(1-\emptyset\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)\right| =$$

$$= \left|R_1^{\,n}(h)e^{-hx}\int_0^{\infty} e^{-h\sigma(h)\sqrt{n}\,u}\, d\overline{\emptyset}_{nh}(u) - \left(1-\emptyset\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)\right| \leq I_1+I_2+I_3 .$$

Dabei sind

$$I_1 = \left|R_1^{\,n}(h)e^{-hx}\int_0^{\infty} e^{-h\sigma(h)\sqrt{n}\,u}\, d\left(\overline{\emptyset}_{nh}(u)-\emptyset\left(u+\frac{x-nm(h)}{\sqrt{n}\,\sigma(h)}\right)\right)\right| ,$$

$$I_2 = \left|R_1^{\,n}(h)e^{-hx}\int_0^{\infty} e^{-h\sigma(h)\sqrt{n}\,u}\, d\left(\emptyset\left(u+\frac{x-nm(h)}{\sqrt{n}\,\sigma(h)}\right)-\emptyset(u)\right)\right| \quad \text{und}$$

$$I_3 = \left|R_1^{\,n}(h)e^{-hx}\int_0^{\infty} e^{-h\sigma(h)\sqrt{n}\,u}\, d\emptyset(u) - \int_{x/\sqrt{n}}^{\infty} d\emptyset(u)\right| .$$

Das Integral I_1 wird mittels der Ungleichung von BERRY-ESSEEN abgeschätzt durch

$$R_1^{\,n}(h)e^{-hx}\cdot\frac{2L_0\beta(h)}{\sqrt{n}\,\sigma^3(h)} , \qquad (4.4)$$

wobei L_0 die von P. VAN BEEK in [2] errechnete absolute Konstante ist. Für das Integral I_2 erhalten wir als obere Schranke

$$R_1^{\,n}(h)e^{-hx}\,\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left|\frac{x-nm(h)}{\sqrt{n}\,\sigma(h)}\right| . \qquad (4.5)$$

Schließlich können wir I_3 nach einigen Umformungen abschätzen durch

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2n}\right)\left(\sqrt{n}\left|h\sigma(h)-\frac{x}{n}\right| + \frac{1}{h\sigma(h)\sqrt{n}}\left|R_1^{\,n}(h)\exp\left(-hx+\frac{x^2}{2n}\right)-1\right|\right). \qquad (4.6)$$

Entsprechend dem Beweis des Satzes 1 in der Arbeit [5] haben wir

$$h_3(y) = \frac{1}{y}\ln\frac{y^3}{nc_3K_3} \geqq \frac{x}{n}\,\frac{3n}{x^2}\ln\frac{\sqrt{n}}{27c_3K_3} \geqq h .$$

Daraus folgt die Beziehung $R_2(y,h) \leqq R_2(y,h_3(y)) \leqq \frac{1}{n}$.

Die rechte Seite von (4.3) läßt sich deshalb folgendermaßen abschätzen:

$$\left|\int_x^\infty dF_n^{\,y}(u) - \int_x^\infty e^{-hu}d\varnothing_{nh}(u)\right| \leqq \exp\left(-\frac{x^2}{6n}+n\left(R_1(h)-1-\frac{x^2}{2n^2}\right)+1\right)\frac{27nc_3K_3}{x^3R_1(h)}. \qquad (4.7)$$

Für unseren Parameter h erhalten wir als obere Schranke:

$$h \leqq \sqrt{\frac{3}{n_o}\ln\frac{\sqrt{n_o}}{c_3M_3}} .$$

Weiterhin gelten die Ungleichungen

$$R_1(h) \geqq 1-2h^3c_3 \text{ und } \quad R_1(h)-1-\frac{h^2}{2} \leqq \frac{e}{6}h^3c_3.$$

Wir bezeichnen im folgenden mit C_i, i=1,2, ... , positive Konstanten, die nicht von den betrachteten Parametern n und x abhängen.

Mit den eben aufgestellten Ungleichungen folgt aus (4.7) für den zweiten Ausdruck in (4.1) als obere Abschätzung:

$$C_1\,\frac{nc_3}{x^3} . \qquad (4.8)$$

Wie leicht nachzuprüfen ist, gelten folgende Abschätzungen:

$$\ln R_1(h) - \frac{h^2}{2} \leqq \frac{e}{6}\,h^3c_3 , \qquad (4.9)$$

$$\left|\ln R_1(h) - \frac{h^2}{2}\right| \leqq \left(2{,}5+\frac{2h}{1-2h^2}\right)h^3c_3 , \qquad (4.10)$$

$$|m(h)| \leqq \frac{eh}{1-2h^3c_3} \qquad (4.11)$$

und

$$|m(h)-h| \leqq C_2h^2c_3 . \qquad (4.12)$$

Außerdem haben wir die Ungleichung

$$|\sigma^2(h)-1| \leqq \frac{1}{1-2h^3c_3}\left(ec_3+2h^2c_3+\frac{e^2h}{1-2h^3c_3}\right)h , \qquad (4.13)$$

das heißt, $\sigma(h) \geqq C_3$. (4.14)

Unschwer läßt sich zeigen, daß folgende Abschätzung gilt:

$$\beta(h) \leqq \left(\left(\frac{ec_3}{1-2hc_3}\right)^{1/3} + |m(h)|\right)^3 . \tag{4.15}$$

Aus (4.4) bis (4.6) und den eben erhaltenen Abschätzungen (4.9) bis (4.15) folgt für die Summe der Integrale I_1, I_2 und I_3, daß gilt:

$$I_1+I_2+I_3 \leqq (C_4 n^{-1/2} + C_5 x^2 n^{-3/2}) c_3 \exp\left(-\frac{x^2}{2n}\right) . \tag{4.16}$$

Mit der bekannten Ungleichung $e^{-a} \leqq \left(\frac{b}{e}\right)^b a^{-b}$, $a > 0$ und $b > 0$, bekommt man für die rechte Seite von (4.16) als obere Schranke:

$$C_6 \frac{nc_3}{x^3} . \tag{4.17}$$

Indem man die Ergebnisse (4.2), (4.8) und (4.17) zusammenfaßt, erhält man die Aussage des Satzes 1.

4.4. <u>BEWEIS DES SATZES 4:</u>

Für den Fall, daß die Differenz $\emptyset(x)-F_n(x\sqrt{n})$ positiv ist, erhalten wir $\emptyset(x)-F_n(x\sqrt{n}) \leqq \left|\emptyset\left(\frac{a_4}{\beta} x\right)-F_n\left(\frac{a_4}{\beta} x\sqrt{n}\right)\right| + 1-\emptyset\left(\frac{a_4}{\beta} x\right)$.

Für unsere x gilt:

$$\frac{a_4}{\beta} x \leqq a_4\sqrt{\ln \frac{n}{a_0}} \quad \text{und} \quad \frac{a_4}{\beta} x > \frac{\alpha a_4}{\beta}\sqrt{\ln \frac{n}{a_0}} > a_2 .$$

Damit liegt $\frac{a_4}{\beta} x$ im x-Gebiet des Satzes 3 und wir können die dort erhaltene Abschätzung auf die Differenz $\left|F_n\left(\frac{a_4}{\beta} x\sqrt{n}\right)-\emptyset\left(\frac{a_4}{\beta} x\right)\right|$ anwenden. Weiterhin gilt:

$$1-\emptyset\left(\frac{a_4}{\beta} x\right) \leqq \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}\, a_4 x} \exp\left(-\frac{a_4^2 x^2}{2\beta^2}\right) \leqq \frac{C_7 c_3}{\sqrt{n}\, x^3} ,$$

wobei $C_7 = C_7(\alpha,\beta) = \dfrac{2e^3\beta^3 M_3}{3\sqrt{3\pi}\exp\left(\left(\left(\frac{\alpha a_4}{\beta}\right)^2-1\right)\frac{1}{3}e^3\right)}$ ist.

Im Fall $0 \leqq F_n(x\sqrt{n})-\emptyset(x) \leqq 1-\emptyset(x)$ erhalten wir im Intervall

$$a_4\sqrt{\ln \frac{n}{a_0}} < x \leqq a_5\sqrt{\ln \frac{n}{a_0}}$$

folgende Abschätzungen: Für das Argument x gilt $x \geqq e^{1,5}$. Somit wird $2\,\frac{\ln x}{x^2} < \frac{1}{6}$. Hieraus folgt

$$\ln\sqrt{\frac{n}{a_0}} < \frac{1}{3} x^2 < \frac{x^2}{2n} - 2 \ln x \quad , \text{ also gilt } \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) < \frac{c_3 M_3}{\sqrt{n}\, x^2} .$$

4.5. ZUM BEWEIS DER SÄTZE 5 UND 6:

Offensichtlich gilt

$$|F_n(x\sqrt{n})-\emptyset(x)| \leq \max(1-\emptyset(x),\ 1-F_n(x\sqrt{n}))\ .$$

Ausgehend von der Ungleichung des Satzes 1 mit $y=\frac{x}{2}$ und $m=3$ erhält man nach der Abschätzung des Arguments der Exponentialfunktion die Aussage (2.4).

Für $x = a_5\sqrt{\ln \frac{n}{a_o}}$ und $n=n_o$ erhält man den angegebenen absoluten Fehler.

Die Aussage des Satzes 6 gilt offensichtlich im Fall $\sqrt{n}\,x^3 \leq c_3K_3$.

Falls $\sqrt{n}\,x^3 > c_3K_3$ ist, erhält man die ungleichmäßige Abschätzung (2.5) aus Satz 1, indem man $y=x$ und $m=3$ setzt.

5. BEWEISE ZUM ABSCHNITT 3

5.1. BEWEIS DES SATZES 8:

Es sei $y > (nb_mK_m)^{1/m} > 0$. Andernfalls ist die Aussage des Satzes offensichtlich.

Mit $F^y(z)$, $F_n{}^y(z)$, $F_h{}^y(z)$, $F_{nh}{}^y(z)$, sowie $R(y,h)$, $R_1(h)$ und $R_2(y,h)$ bezeichnen wir die gleichen Ausdrücke wie auch im Beweis von Satz 3. Hierbei ist h wiederum ein freiwählbarer positiver Parameter. Die folgenden Überlegungen führen wir durch für

$$y > \frac{1}{h}\ . \tag{5.1}$$

Es gilt:

$$1-F_n(x) = F_n{}^y(\infty)-F_n{}^y(x) + F_n{}^y(x)-F_n(x) \tag{5.2}$$

und

$$F_n{}^y(\infty)-F_n{}^y(x) = \int_x^\infty e^{-hu}dF_{nh}{}^y(u) = R^n(y,h)\int_x^\infty e^{-hu}d\bar{F}_{nh}{}^y(u). \tag{5.3}$$

Dabei ist $\bar{F}_{nh}{}^y(u) = \dfrac{F_{nh}{}^y(u)}{R^n(y,h)}$ eine Verteilungsfunktion.

Der auf der rechten Seite von (5.3) stehende Ausdruck läßt sich nach oben abschätzen durch

$$\exp(-hx+\tfrac{e}{2}nh^2+nR_2(y,h))\ . \tag{5.4}$$

Durch partielle Integration erhalten wir für $R_2(y,h)$:

$$R_2(y,h) \leq e\beta_mh^m + \beta_mh^m\int_1^{yh}\frac{e^t}{t^m}\,dt \leq \beta_m\frac{e^{hy}}{y^m}K_m\ . \tag{5.5}$$

Sei $h_m(y)$ die Lösung der Gleichung $K_m\beta_my^{-m}e^{hy} = \frac{1}{n}$, das heißt

$$h_m(y) = \frac{1}{y} \ln \frac{y^m}{nK_m\beta_m} > 0 .$$

Auf Grund der Ungleichungskette (5.5) kann hier β_m durch b_m ersetzt werden.

Wir betrachten den Fall, daß $y \geq \frac{1}{h_m(y)}$ ist, und setzen in (5.4) $h=h_m(y)$, das heißt, (5.1) ist erfüllt. Für dieses h gilt:

$$F_n^{\,y}(\infty)-F_n^{\,y}(x) \leq \left(\frac{nK_m\beta_m}{y^m}\right)^{\frac{x}{y}} \exp\left(\frac{e}{2}n\left(\frac{1}{y} \ln \frac{y^m}{nK_m\beta_m}\right)^2+1\right) . \qquad (5.6)$$

Aus (5.2), (5.6) und der Ungleichung

$$F_n^{\,y}(x)-F_n(x) \leq n(1-F(y))$$

erhalten wir für diesen Fall die Aussage des Satzes.

Falls $y < \frac{1}{h_m(y)}$ gilt, betrachten wir anstatt $F^y(x)$ die Verteilungsfunktion $F^{1/h_m(y)}(x)$ und erhalten für $h=h_m(y)$:

$$R\left(\frac{1}{h_m(y)}, h_m(y)\right) = R_1(h_m(y)) .$$

Entsprechend der Beziehung (5.4) gilt deshalb

$$F_n^{\,1/h_m(y)}(\infty)-F_n^{\,1/h_m(y)}(x) \leq \exp\left(-h_m(y)x+\frac{e}{2}nh_m^{\,2}(y)+1\right) .$$

Damit erhalten wir auch in diesem Fall die Behauptung des Satzes.

5.2. ZUM BEWEIS DER FOLGERUNGEN 3 UND 4:

Die Aussagen dieser Folgerungen lassen sich entsprechend der Beweisführung zu Folgerung 1 bzw. Folgerung 2 mittels Satz 8 zeigen.

5.3. BEWEIS DES SATZES 9:

Es sei $y=\frac{1}{h}\frac{n}{x}$. Mit $F^y(z)$ und $F_n^{\,y}(z)$ bezeichnen wir die gleichen Verteilungsfunktionen wie im Beweis zum Satz 3.

Wir führen folgende neuen Bezeichnungen ein:

$$\varphi(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{hu}dF^y(u), \quad F(z,h) = \frac{1}{\varphi(h)}\int_{-\infty}^{z} e^{hu}dF^y(u),$$

$$F_n(z,h) = \frac{1}{\varphi^n(h)}\int_{-\infty}^{z} e^{hu}dF_n^{\,y}(u), \quad m(h) = \frac{1}{\varphi(h)}\int_{-\infty}^{\infty} ue^{hu}dF^y(u),$$

$$\sigma^2(h) = \frac{1}{\varphi(h)}\int_{-\infty}^{\infty} (u-m(h))^2e^{hu}dF^y(u) , \quad \gamma(h) = \frac{1}{\varphi(h)}\int_{-\infty}^{\infty} |u|^3e^{hu}dF^y(u)$$

und $\beta(h) = \frac{1}{\varphi(h)}\int_{-\infty}^{\infty} |u-m(h)|^3e^{hu}dF^y(u)$. $F_n(\cdot,h)$ ist offensichtlich die n-fache Faltung der Verteilungsfunktion $F(\cdot,h)$.

Entsprechend dem Beweis zum Satz 3 sei $\emptyset_n(z,h)=F_n(nm(h)+z\sigma(h)\sqrt{n},h)$ die zu $F_n(z,h)$ gehörige standardisierte Verteilungsfunktion. Wir gehen von folgender Zerlegung aus:

$$\left|F_n(x)-\emptyset\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right| \leq \left|F_n(x)-F_n{}^y(x)\right| + \left|F_n{}^y(x)-\emptyset\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right| . \tag{5.7}$$

Entsprechend (4.2) gilt für den ersten Summanden in (5.7):

$$\left|F_n(x)-F_n{}^y(x)\right| \leq n(1-F(y)) \leq \frac{n\beta_3}{y^3} \leq C_8\beta_3 \frac{n^{3/2}}{x^3 \ln n} . \tag{5.8}$$

Für den zweiten Summanden in (5.7) erhalten wir die gleiche Abschätzung wie unter (4.4) bis (4.6).

Als obere Schranke gilt für unseren Parameter h :

$$h \leq \sqrt{\frac{3}{n_1} \ln \frac{\sqrt{n_1}}{b_3}} .$$

Für die folgenden Abschätzungen benötigen wir die Ungleichungen

$$\varphi(h) \geq 1-2h^3\beta_3 \text{ und } \varphi(h) \leq 1+\frac{e}{2}h^2 .$$

Wie leicht nachzuprüfen ist, gelten folgende Ungleichungen:

$$|m(h)| \leq \frac{eh}{\varphi(h)} , \tag{5.9}$$

$$|\sigma^2(h)-1| \leq \tag{5.10}$$

$$\leq \frac{1}{(1-2h^3\beta_3)\ln n^2}\left(\frac{e}{2}h^2\ln n + \frac{e^2h^2\ln n}{1-h^3\beta_3} + \beta_3 eh\ln n + K + h\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\right)$$

und

$$n \ln\varphi(h) - \frac{x^2}{n} \leq -\frac{x^2}{2n} + \frac{e}{6}\beta_3 \frac{x^3}{n^2} . \tag{5.11}$$

Hieraus folgt

$$\varphi^n(h)e^{-hx} \leq C_9 \exp\left(-\frac{x^2}{2n}\right). \tag{5.12}$$

Weiterhin gelten folgende Abschätzungen:

$$\left|\varphi^n(h)\exp\left(-hx+\frac{x^2}{2n}\right)-1\right| \leq C_{10} \frac{x^2}{n \ln n} , \tag{5.13}$$

$$\beta(h) \leq \left((\gamma(h))^{1/3} + |m(h)|\right)^3 \leq C_{11} \frac{n}{x \ln n} \tag{5.14}$$

$$|m(h)-h| \leq C_{12} \frac{h}{\ln n} \tag{5.15}$$

und

$$\sigma^2(h) \geq \frac{1}{\varphi(h)}e^{-hH_n}\int_{-H_n}^{H_n} z^2 dF(z) - m^2(h) \geq C_{13}(C_{14}-K) . \tag{5.16}$$

Dabei sind C_{10} bis C_{12} positive Konstanten, die von β_3 und K abhängen. Entsprechend den Endabschätzungen im Beweis des Satzes 3 erhalten wir

$$\left|F_n(x)-\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right| \leq C_{15}\,\frac{n^{3/2}}{x^3\,\ln n} \quad . \tag{5.17}$$

C_{15} ist ebenfalls eine positive Konstante, die von β_3 und K abhängt. Speziell für K=1 ergibt sich aus (5.17) die ungleichmäßige Abschätzung des Satzes 9 mit der dort angegebenen Konstanten.
Für kleine x ist eine gleichmäßige Abschätzung schärfer, die wir mittels der Arbeit [4] von W. FELLER für K=1 und $\sqrt{n} > \exp(\frac{1}{3}e^3)$ erhalten:

$$\left|F_n(x\sqrt{n})-\Phi(x)\right| \leq 6\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_{|z|\leq H_n} |z|^3 dF(z)+\int\limits_{|z|>H_n} z^2 dF(z)\right) \leq \frac{L_5}{\ln n} \quad .$$

5.4. ZUM BEWEIS DES SATZES 10:

Falls $F_n(x\sqrt{n})$ größer als $\Phi(x)$ ist, erhalten wir

$$0 \leq F_n(x\sqrt{n})-\Phi(x) \leq 1-\Phi(x) \leq \frac{6n^{3/2}}{\sqrt{2\pi}\,ex^3}\exp\left(-\ln\frac{\sqrt{n}}{b_3}\right) \quad ,$$

andernfalls gilt

$$0 \leq \Phi(x)-F_n(x\sqrt{n}) \leq \left|F_n\left(\frac{a_4}{a_5}x\sqrt{n}\right)-\Phi\left(\frac{a_4}{a_5}x\right)\right| + 1-\Phi\left(\frac{a_4}{a_5}x\right) \quad .$$

Wie leicht nachzuprüfen ist, liegt das Argument $\frac{a_4}{a_5}x$ im x-Intervall des Satzes 9, das heißt, wir können die dort erhaltene Abschätzung auf die Differenz $\left|F\left(\frac{a_4}{a_5}x\sqrt{n}\right)-\Phi\left(\frac{a_4}{a_5}x\right)\right|$ anwenden.

5.5. ZUM BEWEIS DER SÄTZE 11 UND 12:

Wieder ausgehend von der im Beweis zum Satz 5 angeführten Ungleichung wenden wir jetzt Satz 8 mit $y=\frac{x}{2}$ und $m=3$ an. Nach entsprechender Abschätzung der Differenz $1-F_n(x\sqrt{n})$ erhält man die Aussage des Satzes 11.
Entsprechend dem Beweis zum Satz 6 gehen wir auch beim Beweis zum Satz 12 von der Fallunterscheidung $\sqrt{n}\,x^3 \leq b_3K_3$ und $\sqrt{n}\,x^3 > b_3K_3$ aus und wenden Satz8 mit $y=x$ und $m=3$ an.

III-9-276 JG02/76/1687 (12.5.76)