TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

ÜBER EINE FEHLERABSCHÄTZUNG
IM ZENTRALEN GRENZWERTSATZ

von

Ludwig Paditz
Sektion Mathematik

07 - 02 - 79

INFORMATIONEN

Als Manuskript gedruckt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

ÜBER EINE FEHLERABSCHÄTZUNG IM ZENTRALEN GRENZWERTSATZ

von

Ludwig Paditz

Sektion Mathematik

07 - 02 - 79

Es wird eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen betrachtet, die absolute Momente der Ordnung $2+\delta$, $0 \leq \delta < 1$, besitzen mögen. Dann gelten der zentrale Grenzwertsatz und insbesondere eine ungleichmäßige Fehlerabschätzung von A.BIKELIS aus dem Jahre 1966. In der vorliegenden Note werden die analytische Struktur der in dieser Fehlerabschätzung auftretenden Konstanten genauer untersucht sowie dazu erzielte numerische Resultate vorgelegt.

EINLEITUNG UND RESULTATE

Es sei X_1, X_2, ... eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit den Verteilungsfunktionen V_1, V_2, ..., den Erwartungswerten $EX_i=0$, $i=1,2,\ldots$, und endlichen absoluten Momenten $E|X_i|^{2+\delta}$, $0 \leq \delta < 1$, $i=1,2,\ldots$. Weiterhin seien

$$B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} EX_i^2 > 0$$

die Summe der ersten n Streuungen und

$$L_{2+\delta,n} = B_n^{-(2+\delta)} \sum_{i=1}^{n} E|X_i|^{2+\delta}$$

der LJAPUNOV-Bruch der Ordnung $2+\delta$. Mit F_n und $\emptyset$ werden die Verteilungsfunktionen der Summen $X_1+X_2+\ldots+X_n$ bzw. der standardisierten Normalverteilung bezeichnet.

In diesem Artikel werden die in den Abschätzungen (1.8)

$$|F_n(xB_n)-\emptyset(x)| \leq C_1 \frac{1}{(1+|x|)^3 B_n^3} \int_0^{(1+|x|)B_n} \int_{|u|>v} u^2 d\sum_{i=1}^{n} V_i(u)dv$$

und (1.9)

$$|F_n(xB_n)-\emptyset(x)| \leq C_2 \frac{L_{2+\delta,n}}{1+|x|^{2+\delta}}$$

der Arbeit /1/ von A.BIKELIS auftretenden Konstanten genauer analysiert. Durch Präzisierung der Beweisgedanken in /1/ wird folgendes Ergebnis hergeleitet:

__SATZ 1__: Wenn die Zufallsgrößen X_1, X_2, ... endliche Streuungen besitzen, so gilt folgende Abschätzung

$$|F_n(xB_n)-\emptyset(x)| \leqq C_1 \frac{1}{y} \int_{v=0}^{y} \Lambda_n(v)dv \text{ , } -\infty<x<+\infty \text{ , } n=1,2,\ldots \text{ .} \quad (1)$$

Hierbei hat y die Darstellung

$$y = \gamma(1+|x|)B_n \text{ ,} \quad (2)$$

wobei γ ein positiver Parameter ist. Die Konstante

$C_1 = C_1(\gamma)$

hängt nur von γ ab. Der Integrand $\Lambda_n(v)$ ist die sogenannte LINDEBERGsche Funktion

$$\Lambda_n(v) = \frac{1}{y^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{|u| \geqq v} u^2 dV_i(u) \text{ .} \quad (3)$$

Die analytische Struktur der Konstanten $C_1=C_1(\gamma)$ wird im nächsten Abschnitt im Zusammenhang mit dem Beweis des Satzes 1 dargestellt.
Durch partielle Integration läßt sich sofort zeigen:

$$\frac{1}{y} \int_{v=0}^{y} \Lambda_n(v)dv = \frac{1}{y^3} \sum_{i=1}^{n} \left\{ y \int_{|u| \geqq y} u^2 dV_i(u) + \int_{|u| \leqq y} |u|^3 dV_i(u) \right\} \text{ .} \quad (4)$$

Zusammen mit der Identität (4) enthält die Ungleichung (1) Ergebnisse mehrerer Autoren, auf die hier kurz eingegangen werden soll.
Es ist zu erkennen, daß die LINDEBERGsche Funktion und die Idee ihrer "Mittelung", so wie sie auf der rechten Seite der Abschätzung (1) realisiert ist, bei gleichmäßigen wie auch ungleichmäßigen Fehlerabschätzungen im zentralen Grenzwertsatz eine entscheidende Rolle spielen.
Im Fall $y=(1+|x|)B_n$, d.h. $\gamma=1$, ergibt sich sofort das schon oben erwähnte Resultat (1.8) von A.BIKELIS /1/. Der Satz 1 entspricht dem Ergebnis von YU.P.STUDNEV /12/, wenn in der Darstellung (2) $y=B_n$ gesetzt wird. Für $y=\gamma B_n$ folgt das Ergebnis von L.V.OSIPOV /5/.
Sowohl dieses als auch das STUDNEVsche Resultat wurden nicht über die hier dargestellte direkte Beweismethode sondern über die Methode der charakteristischen Funktionen abgeleitet.
Der Satz 1 verallgemeinert weiterhin die bekannten Ungleichungen von A.C.BERRY, C.G.ESSEEN, M.L.KATZ, V.V.PETROV und S.V.NAGAEV, worauf bereits in /1,5,12/ ausführlich eingegangen wird. In diesem Zusam-

menhang sei noch auf die Arbeiten von L.V.OSIPOV /6,7/, V.V.PETROV /7/, W.FELLER /3/, C.G.ESSEEN /2/, M.U.GAFUROV /4/ und L.V.ROZOVSKIJ /11/ verwiesen, die sich ebenfalls mit Fehlerabschätzungen im zentralen Grenzwertsatz befassen und Ergebnisse ähnlicher Struktur wie (1) bzw. (4) enthalten.

Entsprechend /1/ ergibt sich mittels (4) aus der Ungleichung (1) folgende ungleichmäßige Fehlerabschätzung:

SATZ 2: Wenn die Zufallsgrößen X_1, X_2, ... endliche absolute Momente der Ordnung $2+\delta$, $0<\delta<1$, besitzen, so gilt

$$|F_n(xB_n)-\Phi(x)| \leqq C_2 \frac{L_{2+\delta,n}}{1+|x|^{2+\delta}}, \quad -\infty<x<+\infty, \quad n=1,2,\dots, \tag{5}$$

mit

$$C_2 = C_2(\delta) = \min_{\gamma>0} \gamma^{-(2+\delta)} C_1(\gamma).$$

In den folgenden Tabellen 1 und 2 wird eine Vorstellung über die Größenordnung von C_1 und C_2 in Abhängigkeit von den Parametern γ und δ vermittelt.

Tabelle 1:

γ	$C_1(\gamma)$
0,00006	1,00004
0,001	1,0006
0,1	1,210
0,5	$1,162\cdot10^2$
1,0	$3,678\cdot10^3$
10,0	$9,179\cdot10^5$
100,0	$9,174\cdot10^8$

Tabelle 2:

δ	$C_2(\delta)$
0,01	122,5
0,10	151,3
0,30	241,4
0,50	376,7
0,70	569,5
0,90	820,4
0,99	922,8

Es wird darauf hingewiesen, daß im Fall $\delta=1$ die Ungleichung (5) des Satzes 2 von L.PADITZ /8,9/ bereits detailliert betrachtet wurde und in diesem Fall gezeigt werden konnte, daß die Ungleichung (5) mit der absoluten Konstanten

$$C_2 = 1,147\cdot 10^2 \tag{6}$$

gilt. Dieses Ergebnis wird beim Beweis des Satzes 1 ausgenutzt. Im Fall $\delta=0$ erhält man die Abschätzung (5) mit

$$C_2 = 2$$

unmittelbar aus der ČEBYŠEVschen Ungleichung (s./10;S.151/). Schließlich seien die folgenden zwei elementaren Ungleichungen genannt, die ebenfalls beim Beweis benötigt werden:

$$|\emptyset(x+q)-\emptyset(x)| \leqq k_1|q|;\ k_1=\text{const.};\ q \text{ beliebig reell}; \tag{7}$$

$$|\emptyset(px)-\emptyset(x)| \leqq k_2|p-1|\ ;\ k_2=\text{const.};\ p \geqq 0. \tag{8}$$

Die Ungleichungen (7) und (8) sind bei V.V.PETROV /10;S.143/ zu finden.

BEWEIS DES SATZES 1

Die abgeschnittenen Verteilungsfunktionen V_i^y werden folgendermaßen definiert $(i=1,2,\ldots)$:

$$V_i^y(z) = \begin{cases} 0 & , \quad z \leqq -y, \\ V_i(z) - V_i(-y), & -y < z \leqq 0, \\ V_i(z)+1-V_i(y)\ , & 0 < z \leqq y, \\ 1 & , \quad y < z \quad . \end{cases}$$

Hierbei ist y der in Formel (2) eingeführte positive Parameter. Es sei

$$F_n^y = \prod_{i=1}^{n} V_i^y \quad .$$

Weiterhin werden folgende Bezeichnungen benutzt $(i=1,2,\ldots)$:

$$a_i(y)=\int_{-\infty}^{\infty} z\,dV_i^y(z),\ A_n(y)=\sum_{i=1}^{n} a_i(y),$$

$$\sigma_i^2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} z^2 dV_i^y(z)-\Big(\int_{-\infty}^{\infty} z\,dV_i^y(z)\Big)^2,\ B_n^2(y)=\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(y),$$

$$\beta_{3i}(y)=\int_{-\infty}^{\infty}|z-a_i(y)|^3 dV_i^y(z),\quad B_{3n}(y)=\sum_{i=1}^{n}\beta_{3i}(y).$$

a) Es wird zuerst der Fall

$$y^2\Lambda_n(y) \geqq \frac{1}{\alpha} B_n^2$$

betrachtet, wobei α ein positiver Parameter ist mit

$$\alpha > \frac{1}{2\gamma}(\gamma+\sqrt{\gamma^2+8}) > 1. \tag{9}$$

Mit der elementaren Ungleichung

$$|F_n(xB_n)-\Phi(x)| \leqq \frac{4}{(1+|x|)^2}$$

folgt somit die Beziehung

$$|F_n(xB_n)-\Phi(x)| \leqq k_3(\alpha,\gamma)\Lambda_n(y), \tag{10}$$

$$k_3(\alpha,\gamma) = 4\alpha\gamma^2 .$$

b) Im Fall

$$y^2\Lambda_n(y) < \frac{1}{\alpha} B_n^2$$

wird von folgender grundlegenden Ungleichung ausgegangen:

$$\begin{aligned}|F_n(xB_n)-\Phi(x)| \leqq\; & |F_n(xB_n)-F_n^y(xB_n)|\\ &+\left|F_n^y(xB_n)-\Phi\left(\frac{xB_n-A_n(y)}{B_n(y)}\right)\right|\\ &+\left|\Phi\left(\frac{xB_n-A_n(y)}{B_n(y)}\right)-\Phi(x)\right| .\end{aligned} \tag{11}$$

Für den ersten Term auf der rechten Seite von (11) gilt die Abschätzung

$$|F_n(xB_n)-F_n^y(xB_n)| \leqq \sum_{i=1}^{n}(V_i(-y)+1-V_i(y)) \leqq \Lambda_n(y) . \tag{12}$$

Da die abgeschnittenen Verteilungen Momente beliebiger Ordnung besitzen, gilt für den zweiten Term auf der rechten Seite von (11) insbesondere die ungleichmäßige Abschätzung (5) im Fall $\delta=1$ mit der unter (6) angegebenen Konstanten:

$$\left|F_n^y(xB_n)-\Phi\left(\frac{xB_n-A_n(y)}{B_n(y)}\right)\right| \leqq \frac{114{,}7\cdot B_{3n}(y)}{B_n^3(y)+|xB_n-A_n(y)|^3} . \tag{13}$$

Es gilt

$$B_{3n}(y) \leqq 8 \sum_{i=1}^{n} \int_{|z| \leqq y} |z|^3 dV_i(z) . \tag{14}$$

Für den ersten Summanden im Nenner von (13) ergibt sich mit

$$B_n^2(y) = B_n^2 - \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_{|z| \geqq y} z^2 dV_i(z) + \left(\int_{|z| \geqq y} z dV_i(z) \right)^2 \right\}$$

$$\geqq B_n^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2 \gamma^2}\right)$$

die Ungleichung

$$B_n^3(y) \geqq B_n^3 \, k_4(\alpha,\gamma) , \tag{15}$$

$$k_4(\alpha,\gamma) = \left(1 - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2 \gamma^2}\right)^{3/2} .$$

Wegen der Bedingung (9) ist

$$1 - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2 \gamma^2} > 0 .$$

Weiterhin gilt

$$|A_n(y)| \leqq \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{|z| \geqq y} z dV_i(z) \right| \leqq \frac{1}{\alpha y} B_n^2$$

und somit folgt

$$|xB_n - A_n(y)|^3 \geqq B_n^3 \cdot \left(|x| - \frac{1}{\alpha\gamma}\right)^3 .$$

Mit der Abschätzung (15) ergibt sich damit für den Nenner auf der rechten Seite von (13)

$$B_n^3(y) + |xB_n - A_n(y)|^3 \geqq y^3 \, k_5(\alpha,\gamma) ,$$

$$k_5(\alpha,\gamma) = \frac{1}{\gamma^3} \min_{x \geqq 0} \frac{k_4(\alpha,\gamma) + \left(|x| - \frac{1}{\alpha\gamma}\right)^3}{(1+|x|)^3} ,$$

und es ist mit der Ungleichung (14)

$$\left| F_n^y(xB_n) - \phi\left(\frac{xB_n - A_n(y)}{B_n(y)}\right) \right| \leqq \frac{114{,}7 \cdot 8}{k_5(\alpha,\gamma)} \frac{1}{y^3} \sum_{i=1}^{n} \int_{|z| \leqq y} |z|^3 dV_i(z) . \tag{16}$$

Da in k_5 das Minimum entweder für

$$|x| = \frac{1}{\alpha\gamma} + \sqrt{\frac{k_4(\alpha,\gamma)}{1 + \frac{1}{\alpha\gamma}}} \qquad \text{oder für} \qquad x=0$$

angenommen wird, gilt

$$k_5(\alpha,\gamma) = \frac{1}{\gamma^3} \min\left\{k_4(\alpha,\gamma) - \frac{1}{\alpha^3\gamma^3}; \frac{k_4(\alpha,\gamma)}{((1+\frac{1}{\alpha\gamma})^{3/2}+k_4^{1/2}(\alpha,\gamma))^2}\right\}.$$

Aus der Bedingung (9) folgt

$$k_4(\alpha,\gamma) - \frac{1}{\alpha^3\gamma^3} > 0$$

und somit ist $k_5(\alpha,\gamma)$ ebenfalls positiv.

Um den dritten Term auf der rechten Seite von (11) abzuschätzen, werden die Fälle $|x| \geqq \beta$ und $|x| < \beta$ unterschieden, wobei β ein positiver Parameter ist mit

$$\beta > -0{,}5 + \sqrt{0{,}25 + (\alpha\gamma^2(\alpha-1)-1)^{-1/2}}\ . \tag{17}$$

Im Fall $|x| < \beta$ ergibt sich mit den Beziehungen (7) und (8)

$$\left|\phi\left(\frac{xB_n - A_n(y)}{B_n(y)}\right) - \phi(x)\right| \leqq k_1 \frac{|A_n(y)|}{B_n(y)} + k_2\left|\frac{B_n(y)}{B_n} - 1\right|. \tag{18}$$

Hierbei gilt

$$k_1 = 0{,}3989 \quad \text{und} \quad k_2 = 0{,}5725,$$

wobei die angegebene Konstante k_2 in /8;S.37/ berechnet wurde.

Mittels der Ungleichung (15) folgt

$$\frac{|A_n(y)|}{B_n(y)} \leqq k_{6,1}(\alpha,\beta,\gamma)\,\Lambda_n(y)$$

mit

$$k_{6,1}(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\gamma(1+\beta)}{k_4^{1/3}(\alpha,\gamma)},$$

sowie

$$\left|\frac{B_n(y)}{B_n} - 1\right| = \frac{B_n^2 - B_n^2(y)}{B_n\cdot(B_n+B_n(y))} \leqq k_{6,2}(\alpha,\beta,\gamma)\,\Lambda_n(y)$$

mit

$$k_{6,2}(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\gamma^2(1+\beta)^2+1/\alpha}{1+k_4^{1/3}(\alpha,\gamma)}.$$

Damit erhält man aus (18) die Abschätzung

$$\left|\phi\left(\frac{xB_n - A_n(y)}{B_n(y)}\right) - \phi(x)\right| \leqq k_7(\alpha,\beta,\gamma)\,\Lambda_n(y) \tag{19}$$

mit

$$k_7(\alpha,\beta,\gamma) = k_1 k_{6,1}(\alpha,\beta,\gamma)+k_2 k_{6,2}(\alpha,\beta,\gamma) .$$

Im Fall $|x| \geqq \beta$ gilt

$$\left|\frac{xB_n - A_n(y)}{B_n(y)}\right| \leqq |x| \frac{B_n}{B_n(y)} - \frac{|A_n(y)|}{B_n(y)} \leqq |x| \left\{\frac{B_n}{B_n(y)} - \frac{1}{\beta}\frac{|A_n(y)|}{B_n(y)}\right\}$$

$$\leqq |x| \left\{1 - \frac{1}{\alpha\beta(1+\beta)\gamma + k_4^{1/3}(\alpha,\gamma)}\right\} .$$

Es sei

$$k_8(\alpha,\beta,\gamma) = 1 - \left\{\alpha\beta(1+\beta)\gamma + k_4^{1/3}(\alpha,\gamma)\right\}^{-1} .$$

Wegen der Bedingung (17) ist

$$k_8(\alpha,\beta,\gamma) > 0.$$

Durch elementare Abschätzung ergibt sich nun

$$\left|\phi\left(\frac{xB_n - A_n(y)}{B_n(y)}\right) - \phi(x)\right| \leqq k_1 \exp(-k_8^2 x^2/2) \left|\frac{xB_n - A_n(y)}{B_n(y)} - x\right|$$

$$\leqq k_1 \exp(-k_8^2 x^2/2)\left(|x| \frac{B_n^2 - B_n^2(y)}{B_n(y)(B_n + B_n(y))} + \frac{|A_n(y)|}{B_n(y)}\right) . \tag{20}$$

Mit den Ungleichungen

$$\frac{|A_n(y)|}{B_n(y)} \leqq \frac{1}{B_n k_4^{1/3}(\alpha,\gamma)}\, y \Lambda_n(y)$$

und

$$\frac{B_n^2 - B_n^2(y)}{B_n(y)(B_n + B_n(y))} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{B_n^2 k_4^{1/3}(\alpha,\gamma)(1 + k_4^{1/3}(\alpha,\gamma))}\left(1 + \frac{1}{\alpha\gamma^2(1+|x|)^2}\right) y^2 \Lambda_n(y)$$

folgt aus (20)

$$\left|\phi\left(\frac{xB_n - A_n(y)}{B_n(y)}\right) - \phi(x)\right| \leqq k_9(\alpha,\beta,\gamma) \Lambda_n(y) \tag{21}$$

mit

$$k_9(\alpha,\beta,\gamma) =$$

$$= \frac{k_1}{k_4^{1/3}} \max_{|x| \geqq \beta} \left\{\exp(-k_8^2 x^2/2)\left\{(1+|x|)\gamma + \frac{|x|}{1+k_4^{1/3}}\left(\gamma^2(1+|x|)^2 + \frac{1}{\alpha}\right)\right\}\right\} .$$

Es gilt für $m=1,2,3$:

$$\max_{|x| \geq \beta} \left\{ |x|^m \exp(-k_8^2 x^2/2) \right\} \leq k_{9+m}(\alpha,\beta,\gamma)$$

mit

$$k_{9+m}(\alpha,\beta,\gamma) = \max\left\{ \beta^m \exp(-k_8^2 \beta^2/2) ; k_8^{-m} \left(\frac{m}{e}\right)^{m/2} \operatorname{sgn}\left(\frac{\sqrt{m}}{k_8} - \beta\right) \right\} .$$

Damit kann $k_9(\alpha,\beta,\gamma)$ abgeschätzt werden durch

$$k_{13}(\alpha,\beta,\gamma) =$$

$$= \frac{k_1}{k_4^{1/3}} \left\{ \gamma \exp(-k_8^2 \beta^2/2) + \left(\gamma + \frac{\alpha\gamma^2+1}{(1+k_4^{1/3})}\right) k_{10} + \frac{\gamma^2}{1+k_4^{1/3}} (2k_{11} + k_{12}) \right\}$$

und es ergibt sich aus (19) und (21) die Ungleichung

$$\left| \phi\left(\frac{xB_n - A_n(y)}{B_n(y)}\right) - \phi(x) \right| \leq \min_{\beta} \left\{ \max(k_7(\alpha,\beta,\gamma) ; k_{13}(\alpha,\beta,\gamma)) \right\} \Lambda_n(y) . \quad (22)$$

Die Minimierung bezüglich β erstreckt sich dabei über diejenigen Werte von β, die durch die Relation (17) zugelassen sind.
Damit folgt über die Ungleichung (11) mittels (12), (16) und (22) die Abschätzung

$$\left| F_n(xB_n) - \phi(x) \right| \leq k_{14}(\alpha,\gamma) \Delta_n(y) + k_{15}(\alpha,\gamma) \frac{1}{y^3} \sum_{i=1}^{n} \int_{|z| \leq y} |z|^3 dV_i(z) \quad (23)$$

mit

$$k_{14}(\alpha,\gamma) = 1 + \min_{\beta} \left\{ \max(k_7(\alpha,\beta,\gamma) ; k_{13}(\alpha,\beta,\gamma)) \right\}$$

und

$$k_{15}(\alpha,\gamma) = \frac{114{,}7 \cdot 8}{k_5(\alpha,\gamma)} .$$

Aus den Abschätzungen (10) und (23) ergibt sich mit der Gleichung (4) und

$$C_1(\gamma) = \min_{\alpha} \left\{ \max(k_3(\alpha,\gamma) ; k_{14}(\alpha,\gamma) ; k_{15}(\alpha,\gamma)) \right\} ,$$

wobei die Minimierung bezüglich α über das durch (9) festgelegte Intervall erfolgt, die Aussage des Satzes 1.

LITERATUR

/1/ BIKELIS,A.: Ocenki ostatocnogo clena v central'noj predel'noj teoreme. Litovskij matem. sb., Vil'njus 6(1966) 3, 323-346

/2/ ESSEEN,C.G.: On the remainder term in the central limit theorem. Arkiv Mat., Stockholm 8(1969) 1, 7-15

/3/ FELLER,W.: On the Berry-Esseen theorem. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., Berlin-Heidelberg 10(1968) 3, 261-268

/4/ GAFUROV,M.U.: Ocenka skorosti schodimosti v central'noj predel'noj teoreme posredstvom psevdomomentov. sb. "Slučajnye processy i statist. vyvody", Izd-vo "Fan", Taškent1973, No.3, 39-48

/5/ OSIPOV,L.V.: Utocnenie teoremy Lindeberga. Teorija verojatn. i ee primen., Moskva 11(1966) 2, 339-342

/6/ OSIPOV,L.V.: O točnosti približenija raspredelenija summy nezavisimych slučajnych veličin k normal'nomu raspredeleniju. DAN SSSR, Moskva 178(1968) 5, 1013-1016

/7/ OSIPOV,L.V./PETROV,V.V.: Ob ocenke ostatočnogo člena v central'noj predel'noj teoreme. Teorija verojatn. i ee primen., Moskva 12(1967) 2, 322-329

/8/ PADITZ,L.: Über die Annäherung der Verteilungsfunktionen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen gegen unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktionen unter besonderer Beachtung der Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung. Dissertation A, TU Dresden 1977

/9/ PADITZ,L./WOLF,W.: Abschätzung der Annäherung der Verteilungsfunktion von Summen unabhängiger Zufallsgrößen zur Verteilungsfunktion Ø(x) der standardisierten Normalverteilung. II. Vil'njuser Konferenz über Wahrscheinlichkeitstheorie und mathem. Statist., Vil'njus 1977, Teil III, 158-159

/10/ PETROV,V.V.: Summy nezavisimych slučajnych veličin. Moskva 1972 (Sums of independent random variables. Berlin-Heidelberg 1975)

/11/ ROZOVSKIJ,L.V.: O skorosti schodimosti v teoreme Lindeberga-Fellera. Vestnik Leningrad. univ., Leningrad 29(1974) 1, 70-75

/12/ STUDNEV,JU.P.: Zamecanie po povodu teoremy Kaca-Petrova. Teorija verojatn. i ee primen., Moskva 10(1965) 4, 751-753