Prof. Dr. Ludwig Paditz, 05.01.2017

Statistik für Produktionstechniker

==============================

31. Mit den Daten von Aufgabe 8 prüfe man die Behauptung, dass der Entdeckungszeitraum bei Steuerhinterziehungen vom Schulabschluss abhängt (α = 0,05).

geg. Kreuztabelle:

$$\begin{bmatrix} X/Y & & & & \\ & 1 & 2 & 3 & \Sigma \\ 1 & 36 & 30 & 54 & 120 \\ 2 & 4 & 10 & 16 & 30 \\ \Sigma & 40 & 40 & 70 & 150 \end{bmatrix}$$

Kodierung:

X=1 Volksschule, X=2 höhere Schule

Y=1 bereits beim ersten Versuch entdeckt

Y=2 innerhalb eines Jahres entdeckt

Y=3 nach einem Jahr entdeckt

Lösung:

χ^2–Unabhängigkeitstest:

Man geht von der Null–Hypothese aus, dass X und Y unabhängige Zgrn. sind und widerlegt diese, d.h. Testgröße im kritischen Bereich.

ChiTest $\begin{bmatrix} 36 & 30 & 54 \\ 4 & 10 & 16 \end{bmatrix}$

done

DispStat

done

======================

χ^2 Test

χ^2 = 3.4821429 (Testgröße)

prob = 0.1753324 > 0.05=α (d.h. Nichtablehnung)

df = 2 (Freiheitsgrade der Testgröße)

======================

formaler Testablauf:

1. H_0: X u. Y unabhängige Zgrn. Ha: X u. Y abhängige Zgrn.
2. $\alpha = 0{,}05$
3. $T \ (=\chi^2) = \Sigma_{i,j} \frac{(n_{ij}-n\hat{}_{ij})^2}{n\hat{}_{ij}}$ mit $n\hat{}_{ij}=\frac{n_{i.}*n_{.j}}{n_{..}}$ ist unter H_0 χ^2-verteilt mit 2 FG
4. $K^{*}=\{t|t>\chi^2_{2,1-\alpha}\}$
5. Entscheidung: $t\in K^{*}$ bedeutet Ablehnung von H_0, andernfalls Nichtablehnung.

invChiCDf(0.05,2)

5.991464547

Antwortsatz:

Auf Grundlage der Datenauswertung (χ^2-Test) ergibt sich, dass es auf dem Signifikanzniveau von 5% keine Hinweise gibt, dass dier Entdeckungszeitraum vom Schulabschluss abhängen könnte.

Prof. Dr. Ludwig Paditz, 05.01.2017

Statistik für Produktionstechniker
==============================

32. Mit den Daten von Aufgabe 18 prüfe man die Hypothese, dass die dort beschriebene physikalische Größe einen Erwartungswert von
(a) 350 (b) 360
besitzt, jeweils unter der Annahme, dass σ^2 unbekannt und danach unter der Annahme, dass $\sigma^2 = 105$ bekannt ist ($\alpha = 0{,}05$).
Vergleichen Sie ihre Ergebnisse mit denen von Aufgabe 18.

Bei 10 Messungen einer physikalischen Größe X ergaben sich folgende Werte:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ 332 & 354 & 338 & 340 & 345 & 360 & 366 & 352 & 346 & 342 \end{bmatrix}$$

Lösung:
Fall σ^2 unbekannt führt auf den einfachen t-Test.
Fall σ^2 bekannt führt auf den Gauß-Test.

(a) μ_0=350
Fall σ^2 unbekannt
matToList(trn([332 354 338 340 345 360 366 352 346 342▶
{332,354,338,340,345,360,366,352,346,342}
mean(ans)⇒μ

347.5

OneSampleTTest "≠", 350, xlist

done

DispStat

done

===================

1−Stichprob. t−Test

Daten=Liste

$\mu \neq 350$

$t = -0.755114$ (Testgröße)

prob = 0.4694791 > 0.05=α (Nichtablehnung)

$\bar{x} = 347.5$

$s_x = 10.469533$

$n = 10$

===================

Fall σ^2 bekannt: σ^2=105

OneSampleZTest "≠", 350, $\sqrt{105}$, xlist

done

DispStat

done

===================

1−Stichprob. Z−Test

Daten=Liste

$\mu \neq 350$

$t = -0.771517$ (Testgröße)

prob = 0.4404007 > 0.05=α (Nichtablehnung)

$\bar{x} = 347.5$

s_x = 10.469533

n = 10

===================

(b) μ_0=360

Fall σ^2 unbekannt

OneSampleTTest "≠", 360, xlist

done

DispStat

done

===================

1−Stichprob. t−Test

Daten=Liste

$\mu \neq 360$

t = −3.775572 (Testgröße)

prob = 4.3787E-3 < 0.05=α (Ablehnung)

$\bar{x}$ = 347.5

s_x = 10.469533

n = 10

===================

Fall σ^2 bekannt: σ^2=105

OneSampleZTest "≠", 360, $\sqrt{105}$, xlist

done

DispStat

done

===================

1-Stichprob. Z-Test
Daten=Liste

$\mu \neq 360$

$t = -3.857584$ (Testgröße)

prob = 1.1451E-4 < 0.05=α (Ablehnung)

$\bar{x} = 347.5$

$s_x = 10.469533$

$n = 10$

==================

formaler Testablauf in 5 Schritten:

formaler Testablauf:

1. H_0: $\mu=\mu_0$ Ha: $\mu\neq\mu_0$ (zweiseitige Alternative $\Rightarrow$ K^* zweiseitig)
2. $\alpha = 0,05$
3. T (=t oder =Z) $= \begin{cases} \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s_x/\sqrt{n}}, & \sigma \text{ unbekannt} \\ \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, & \sigma \text{ bekannt} \end{cases}$ ist unter H_0

N(0,1)-verteilt bzw. t-verteilt mit 9 FG

4. $K^*=\{t \mid |t|>\text{Quantil der Ordnung } 1-\alpha/2\}$
5. Entscheidung: $t \in K^*$ bedeutet Ablehnung von H_0, andernfalls Nichtablehnung.

Quantile:

invTCDf(0.025,9)

2.262157163

invNormCDf("L",0.975,1,0)

1.959963985

Vergleich mit den Ergebnissen aus Aufg. 18 (Konfidenzintervalle mit gleichem α):

Nichtablehnung bedeutet, dass $\mu_0 = 350$ im Konfidenzintervall um $\bar{x}$ liegt,

andernfalls (Ablehnung) liegt $\mu_0 = 360$ nicht im Konfidenzintervall um $\bar{x}$.

Prof. Dr. Ludwig Paditz, 05.01.2017

Statistik für Produktionstechniker
================================

33. Einer Abfüllanlage für Rotweinflaschen (0,7 Liter) wurden zur Kontrolle 100 Flaschen entnommen und die Füllmengen (in ml) festgestellt.
Es ergab sich ein arithmetisches Mittel $\bar{x}$ = 695 (ml) bei einer Standardabweichung von s = 12,6 (ml).
Füllt die Anlage im Mittel wesentlich weniger ab als 700 ml (α = 0,01)?
Wir wollen annehmen, dass die Füllmenge einer zufällig ausgewählten Flasche durch eine normalverteilte Zufallsvariable beschrieben werden kann.

Lösung:
einseitiger einfacher t-Test
OneSampleTTest "<",700,695,12.6,100

done

DispStat

done

============================
1-Stichprob. t-Test
Daten=Variable
μ < 700
t = −3.968254
prob = 6.8582E-5<0.01=α (Ablehnung)

$\bar{x} = 695$

$s_x = 12.6$

$n = 100$

==============================

Quantil:

invTCDf(0.01,99)

2.364605862

Antwort:

Auf Grundlage der Datenauswertung weicht die Füllmenge signifikant (d.h. wesentlich) von der Vorgabe 700 ml ab.

Prof. Dr. Ludwig Paditz, 05.01.2017

Statistik für Produktionstechniker

==============================

34. Zwei Verfahren zur Erhöhung der Festigkeit von Polyamidseide sollen verglichen werden. Zu diesem Zweck wurden für jedes Verfahren 10 Festigkeitsmessungen durchgeführt. Dabei ergaben sich folgende Messwerte (in N):

1. Verfahren: 0,12 0,10 0,11 0,13 0,11 0,14 0,10 0,10 0,13 0,10

2. Verfahren: 0,10 0,10 0,09 0,10 0,11 0,11 0,08 0,11 0,11 0,10

Man prüfe die Hypothese, dass beide Verfahren hinsichtlich der Mittelwerte der erzielten Festigkeit gleichwertig sind (α = 0,05). Man nehme dazu an, dass die Messwerte aus Grundgesamtheiten mit gleichen Varianzen stammen.

Lösung:

{12,10,11,13,11,14,10,10,13,10}/100→list1

{0.12,0.1,0.11,0.13,0.11,0.14,0.1,0.1,0.13,0.1}

{10,10,09,10,11,11,08,11,11,10}/100→list2

{0.1,0.1,0.09,0.1,0.11,0.11,0.08,0.11,0.11,0.1}

TwoSampleTTest "≠",list1,list2,1,1,On

done

DispStat

done

========================

2-Stichprob. t-Test

Daten=Liste

$\mu_1 \neq \mu_2$

$t = 2.2784043$

$prob = 0.0351281 < 0.05 = \alpha$ (Ablehnung)

$df = 18$

$\bar{x}_1 = 0.114$

$\bar{x}_2 = 0.101$

$s_{x1} = 0.0150555$

$s_{x2} = 9.9443E{-3}$

$sp_x = 0.0127584$

$n_1 = 10$

$n_2 = 10$

==========================

Quantil:

invTCDf(0.025,18)

2.10092204

Antwort: Die Mittelwerte unterscheiden sich signifikant!

Prof. Dr. Ludwig Paditz, 05.01.2017

Statistik für Produktionstechniker
==============================

35. Mit den Daten der Kontingenztafel, die in **Aufgabe 9, II (b)** gebildet wurde, prüfe man die Hypothese, dass das Antwortverhalten vom Geschlecht abhängt.
Überlegen Sie sich, wie die Kontingenztafel zustande gekommen war, und interpretieren Sie das Ergebnis!

9. II (b) Die Studenten beschließen, ihre Daten zu vereinigen. Welche Kontingenztafel für die nunmehr 240 Fälle ergibt sich? **(Indifferenztabelle)**

X ... (zufälliges) Geschlecht
Kodierung: X=1 männlich, X=2 weiblich

Y ... (zufällige) Antwort
Kodierung: Y=1 ja, Y=2 egal, Y=3 nein

Kontingenztafel für Student 1:
==========================
Indifferenztabelle

$$\begin{bmatrix} X/Y & & & & \\ & 1 & 2 & 3 & \Sigma \\ 1 & 4 & 8 & 36 & 48 \\ 2 & 6 & 12 & 54 & 72 \\ \Sigma & 10 & 20 & 90 & 120 \end{bmatrix}$$

Kontingenztafel für Student 2:

============================

Indifferenztabelle

$$\begin{bmatrix} X/Y & & & & \\ & 1 & 2 & 3 & \Sigma \\ 1 & 70 & 7 & 7 & 84 \\ 2 & 30 & 3 & 3 & 36 \\ \Sigma & 100 & 10 & 10 & 120 \end{bmatrix}$$

9. II (b)

Indifferenztabelle:

(mit gebrochenen Anteilen, nur theoretisch möglich)

$$\begin{bmatrix} X/Y & & & & \\ & 1 & 2 & 3 & \Sigma \\ 1 & 60.5 & 16.5 & 55 & 132 \\ 2 & 49.5 & 13.5 & 45 & 108 \\ \Sigma & 110 & 30 & 100 & 240 \end{bmatrix}$$

Hinweis: direkte Berechnung der Indifferenztabelle

mit $\hat{n}_{ij} = \frac{n_{i.} * n_{.j}}{n_{..}}$

Kreuztabelle als Zusammenfassung der separaten Indifferenztabellen aus I:

$$\begin{bmatrix} X/Y & & & & \\ & 1 & 2 & 3 & \Sigma \\ 1 & 4 & 8 & 36 & 48 \\ 2 & 6 & 12 & 54 & 72 \\ \Sigma & 10 & 20 & 90 & 120 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X/Y & & & & \\ & 1 & 2 & 3 & \Sigma \\ 1 & 70 & 7 & 7 & 84 \\ 2 & 30 & 3 & 3 & 36 \\ \Sigma & 100 & 10 & 10 & 120 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 36 & 48 \\ 6 & 12 & 54 & 72 \\ 10 & 20 & 90 & 120 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 70 & 7 & 7 & 84 \\ 30 & 3 & 3 & 36 \\ 100 & 10 & 10 & 120 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 74 & 15 & 43 & 132 \\ 36 & 15 & 57 & 108 \\ 110 & 30 & 100 & 240 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 74 & 15 & 43 \\ 36 & 15 & 57 \end{bmatrix} \Rightarrow A$$

$$\begin{bmatrix} 74 & 15 & 43 \\ 36 & 15 & 57 \end{bmatrix}$$

ChiTest A

done

approx(Expected)

$$\begin{bmatrix} 60.5 & 16.5 & 55 \\ 49.5 & 13.5 & 45 \end{bmatrix}$$

approx(χ^2value)

12.815427

DispStat

done

invChiCDf(0.05,2)

5.991464547

==============================

χ^2 Test

χ^2 = 12.815427

prob = 1.6488E-3 < 0.05=α (Ablehnung der Unabhängigkeit)

df = 2

============================

Das Antwortverhalten ist geschlechterabhängig (bei α=0.05). Die Indifferenztabellen der zwei Studenten gingen noch davon aus, dass das Antwortverhalten geschlechterunabhängig sei.

Prof. Dr. Ludwig Paditz, 05.01.2017

Statistik für Produktionstechniker

================================

36. Aus einer Produktionslinie für ein bestimmtes Bauteil wurden n = 584 Teile entnommen und auf ihre Qualität überprüft. Dabei ergab sich, dass 92 dieser Teile die Güteklasse A erreichten. Man prüfe die Behauptung, dass mindestens 20% aller auf der Produktionslinie hergestellten Bauteile die Güteklasse A erreichen (α = 0,05).

Lösung:

dichotome Grundgesamtheit mit den Ereignissen

B={Güteklasse A erreicht}, $\bar{B}$={Güteklasse A nicht erreicht}

Test auf Vorliegen eines Anteilswertes p_0=0.2 in einer dichtomen Grundgesamtheit.

OnePropZTest "<",0.20,92,584

done

DispStat

done

=======================

Z-Test (1 Wkt.)

Prop < 0.2 (Art der Alternative)

z = −2.565578 (Testgröße)

prob = 5.1502E-3 < 0.05=α (Ablehnung)

$\hat{p} = 0.1575342$

$n = 584$

======================

Quantil:

invNormCDf("L", 0.05, 1, 0)

−1.644853627

Antwort: der Anteilswert 0.20 wird signifikant unterschritten.

Prof. Dr. Ludwig Paditz, 05.01.2017

Statistik für Produktionstechniker

===============================

37. Alle gegenwärtig von einem Unternehmen hergestellten Zigaretten haben einen durchschnittlichen Nikotingehalt von mindestens 1,6 mg pro Zigarette.
Ein Wissenschaftler behauptet, er habe ein neues Verfahren zur Behandlung von Tabakblättern entwickelt, mit dem sich ein durchschnittlicher Nikotingehalt von unter 1,6 mg erzielen lässt.

Um diese Behauptung zu rechtfertigen, wird eine Stichprobe von 20 Zigaretten untersucht. Aus Voruntersuchungen ist bekannt, dass der Nikotingehalt einer Zigarette als normalverteilt mit einer Standardabweichung
von 0,8 mg modelliert werden kann.
Welche Schlüsse kann man auf einem Signifikanzniveau von 5% ziehen, wenn sich bei der Untersuchung der Stichprobe ein mittlerer Nikotingehalt von 1,54 mg ergibt?

Lösung:
$n=20$, $\bar{x}=1,54$, $\mu_0=1,60$, $\sigma=0,8$

Gauß-Test zum Mittelwertvergleich bei bekannter Streuung σ^2.

OneSampleZTest "<",1.60,0.8,1.54,20

done

DispStat

done

=====================

1-Stichprob. Z-Test

Daten=Variable

$\mu < 1.60$

$z = -0.33541$

prob = 0.3686578 > 0.05=α (Nichtablehnung)

$\bar{x} = 1.54$

$n = 20$

=====================

Quantil:

invNormCDf("L",0.05,1,0)

-1.644853627

Antwort: Es ist keine wesentliche Unterschreitung des bisherigen Nikotingehaltes festzustellen, d.h. das neue Verfahren überzeugt nicht!

Prof. Dr. Ludwig Paditz, 05.01.2017

Statistik für Produktionstechniker

================================

38. In einem Unternehmen arbeiten vier Maschinen im Dreischichtbetrieb. Die folgende Kontingenztafel zeigt die Zahl der Betriebsunterbrechungen für die einzelnen Maschinen und Schichten über einen Zeitraum von sechs Monaten.

$$\begin{bmatrix} & \text{Maschine1} & \text{Maschine2} & \text{Maschine3} & \text{Maschine4} & \text{Summe} \\ \text{Schicht1} & 10 & 12 & 6 & 7 & 35 \\ \text{Schicht2} & 10 & 24 & 9 & 10 & 53 \\ \text{Schicht3} & 13 & 20 & 7 & 10 & 50 \\ \text{Summe} & 33 & 56 & 22 & 27 & 138 \end{bmatrix}$$

Überprüfen Sie, ob es einen Zusammenhang gibt zwischen der Maschine, die eine Unterbrechung verursacht und der Schicht, in der die Unterbrechung auftritt ($\alpha = 0,1$).

Lösung:

χ^2–Unabhängigkeitstest in einer Kontingenztafel

$$\begin{bmatrix} 10 & 12 & 6 & 7 \\ 10 & 24 & 9 & 10 \\ 13 & 20 & 7 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow A$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 12 & 6 & 7 \\ 10 & 24 & 9 & 10 \\ 13 & 20 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

ChiTest A

done

DispStat

done

======================

χ^2 Test

χ^2 = 1.8147781

prob = 0.9359209>0.10=α (Nichtablehnung)

df = 6

======================

Quantil:

invChiCDf(0.10,6)

10.64464068

Antwort: Es ist nicht erkennbar, dass das Ausfallverhalten schichtbezogen sein könnte.

Prof. Dr. Ludwig Paditz, 05.01.2017

Statistik für Produktionstechniker

================================

39. In einem Forschungsinstitut soll untersucht werden, ob die tägliche Gabe von 4g Vitamin C die mittlere Erkältungsdauer reduziert. Eine zufällige Stichprobe von 10 Freiwilligen erhält Tabletten, die 1g Vitamin C enthalten, und viermal täglich genommen werden müssen. Die Kontrollgruppe aus 12 Freiwilligen erhält Placebo-Tabletten, die genauso aussehen und genauso schmecken wie die Vitamintabletten.
Die Behandlung wird solange fortgesetzt, bis ein Arzt, der nicht weiß, ob der Patient die Vitamine oder ein Placebo erhielt, feststellt, dass die Erkältung abgeklungen ist.
Es wurden folgende Daten über die Erkältungsdauer (in Tagen) beobachtet:

Vitamin C 5,5 6,0 7,0 6,0 7,5 6,0 7,5 5,5 7,0 6,5
Placebo 6,5 6,0 8,5 7,0 6,5 8,0 7,5 6,5 7,5 6,0
8,5 7,0

Da die Patienten zufällig ausgewählt wurden, nehmen wir an, dass die Erkältungsdauer in beiden Gruppen durch normalverteilte Zufallsvariablen mit gleicher Varianz beschrieben werden kann.
Welche Schlüsse lassen sich auf dem Signifikanzniveau von 5% aus dieser Untersuchung ziehen?

Lösung:

doppelter t-Test zum Mittelwertvergleich (Streuungsgleichheit in beiden Grundgesamtheiten)

{5.5,6.0,7.0,6.0,7.5,6.0,7.5,5.5,7.0,6.5}→list1

{5.5,6,7,6,7.5,6,7.5,5.5,7,6.5}

{6.5,6.0,8.5,7.0,6.5,8.0,7.5,6.5,7.5,6.0,8.5,7.0}→li

{6.5,6,8.5,7,6.5,8,7.5,6.5,7.5,6,8.5,7}

TwoSampleTTest "<",list1,list2,1,1,On

done

DispStat

done

============================

2-Stichprob. t-Test

Daten=Liste

$\mu_1 < \mu_2$ (Art der Alternative)

$t = -1.898695$

prob $= 0.0360643 < 0.05 = \alpha$ (Ablehnung)

df $= 20$

$\bar{x}_1 = 6.45$

$\bar{x}_2 = 7.125$

$s_{x1} = 0.761942$

$s_{x2} = 0.882275$

$sp_x = 0.8302861$

$n_1 = 10$

$n_2 = 12$

============================

Quantil:

invTCDf(0.95,20)

-1.724718243

Antwort: Die Vitamingabe verkürzt die Erkältungsdauer wesentlich (signifikant).