Prof. Dr. Ludwig Paditz, 18.11.2016

Statistik für Produktionstechniker
================================

26. Bei einer Serienfertigung eines bestimmten Typs von Messgeräten werden vor der Auslieferung eines jeden Gerätes 10 Kontrollmessungen durchgeführt. Wir nehmen an, dass die Messfehler durch **normalverteilte Zufallsvariablen** beschrieben werden können, und dass die **Varianz** σ^2 der Messfehler bekannt und bei allen Geräten gleich ist. Der durchschnittliche Messfehler eines zufällig ausgewählten, aber **korrekt geeichten Gerätes** nach 10 Kontrollmessungen kann also durch eine $N(0; \sigma^2/10)$-verteilte Zufallsvariable $\bar{x}$ beschrieben werden.

(a) Geben Sie ein möglichst kleines Intervall an, in dem $\bar{x}$ bei einem **korrekt geeichten Gerät** mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 liegt.

(b) Der Gütekontrolleur ist angewiesen, jedes Gerät zur Nachbesserung zurückzuweisen, für das er einen durchschnittlichen Messfehler $\bar{x}$ erhält, der außerhalb des unter (a) berechneten Intervalles liegt. Welche Aussagen lassen sich treffen?

(c) Es sei $\sigma^2 = 0,1$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gerät unbeanstandet die Kontrollmessungen passiert, dessen tatsächlicher mittlerer Messfehler μ

(α) $\mu = 0,1$

(β) $\mu = 0,2$

(γ) $\mu = 0,3$

beträgt?

Lösung:

(a) $\overline{x} \in N(0, \frac{\sigma^2}{10})$

$\frac{\overline{x}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{10}}} \in N(0,1)$

invNormCDf("L", 0.025, 1, 0)

$$-1.959963985$$

invNormCDf("L", 0.975, 1, 0)

$$1.959963985$$

$$-1.959963985 \le \frac{\overline{x}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{10}}} \le 1.959963985$$

$$-1.959963985\sqrt{\frac{\sigma^2}{10}} \le \overline{x} \le 1.959963985\sqrt{\frac{\sigma^2}{10}}$$

$$\frac{1.959963985}{\sqrt{10}}$$

$$0.6197950325$$

$$\mathbf{-0.6197950325\sigma \le \overline{x} \le 0.6197950325\sigma}$$

(b)

Ein **korrekt geeichtes Gerät** liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05 außerhalb des unter (a) angegebenen $\overline{\mathbf{x}}$-Intervalls. D.h. mit Wkt. 95% akzeptiert der Gütekontrolleur das Gerät, mit einer Wkt. von 5% weist er ein **korrekt geeichtes Gerät** zur Nachbesserung zurück.

(c) $\bar{x} \in N(\mu, \frac{\sigma^2}{10})$ mit $\sigma^2 = 0{,}1$, d.h.

$\bar{x} \in N(\mu, 0.01)$ und $Z = \frac{\bar{x}-\mu}{0.1} \in N(0,1)$

Angenommen $\mu=0$ und $\sigma=0.1$, dann
solve(NormCDf(−c, c, 0.1, 0)=0.95, c)

{c=0.1959963985}

$-0.1959963985 \le \bar{x} \le 0.1959963985$

Nun sei $\mu=0.1$:
NormCDf(−0.1959963985, 0.1959963985, 0.1, 0.1)

0.8299249544

Nun sei $\mu=0.2$:
NormCDf(−0.1959963985, 0.1959963985, 0.1, 0.2)

0.4839947262

Nun sei $\mu=0.3$:
NormCDf(−0.1959963985, 0.1959963985, 0.1, 0.3)

0.1491612318

Je größer μ, desto geringer die Wkt. das 95%-Intervall für $\mu=0$ zu treffen.

Prof. Dr. Ludwig Paditz, 18.11.2016

Statistik für Produktionstechniker
==============================

27.

Ein Losverkäufer wirbt mit dem Spruch "Jedes 10. Los gewinnt". Sie sind interessiert und kaufen 100 Lose. Wir wollen dazu annehmen, dass so viele Lose vorhanden sind, dass wir die Binomialverteilung zur Beschreibung der Gewinnanzahl benutzen können. Sie stellen fest, dass Sie nur zwei Gewinnlose gezogen haben.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, derart wenige Gewinne (also zwei oder noch weniger) unter 100 Losen zu haben, obwohl die Werbung ehrlich war. Überlegen Sie sich, welche Aussagen sich treffen lassen.

(b) Um 100%-ig sicher zu sein, ob Sie betrogen worden sind, müssten Sie natürlich alle Lose kontrollieren (aufkaufen). Sie entschließen sich, nochmals 100 Lose zu kaufen. Bei welcher Anzahl von Gewinnen ist die Grenze, ab der man den Verkäufer des Betruges verdächtigen kann, wenn man einen ehrlichen Verkäufer nur mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5% verdächtigen will?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit entsprechend der unter (b) aufgestellten Grenze einen Verkäufer (zu Recht) zu verdächtigen, bei dem (entgegen seiner Werbung) nur jedes 15-te Los gewinnt?

(d) Wo läge die entsprechend (b) berechnete Grenze, wenn man 1000 Lose kauft? Benutzen Sie dazu, dass für eine binomialverteilte Zufallsvariable $Y_n \sim B(n,p)$ für große n gilt, dass $P(Y_n \leq x)$ näherungsweise durch die entsprechende Wahrscheinlichkeit einer $N(n\cdot p, n\cdot p\cdot(1-p))$-verteilten Zufallsvariablen bestimmt werden kann.
(ZGWS mit Stetigkeitskorrektur: $P(Y_n+0.5 \leq x)$ näherungsweise $N(n\cdot p, n\cdot p\cdot(1-p))$-verteilt)

Lösung:

(a) Lostopf mit N Losen (N sehr groß)

Zgr. $X=\begin{cases} 0, \text{Los ist eine Niete} \\ 1, \text{Los ist ein Gewinn} \end{cases}$

$P(X=0)=0.9=1-p,\ \ P(X=1)=0.1=p$

Bernoulli-Schema (Ziehen ohne Zurücklegen, wobei sich die "Stochastik" im Lostopf nicht ändern soll)

$Y_n=X_1+X_2+...+X_n$ ist $B(n,p)$-verteilt

Anzahl der Gewinnlose bei n Entnahmen.

n=100

ges. $P(Y_n \leq 2)$

binomialCDf(0,2,100,0.1)

1.944884652E-3

Bei ehrlicher Werbung ist es eher unwahrscheinlich (Wkt. nur

$\approx 0,2\%$) nur höchstens 2 Gewinne zu erzielen, da
$E(Y_n)=n*p=100*0.1=10$ Gewinne im Mittel zu erwarten sind.
Man wird mit größerer Wkt. mehr als 2 Gewinne erzielen.
Z.B. mindest. 9 und höchstens 11 Gewinne:
binomialCDf(9,11,100,0.1)

0.3821592119

(b) Binomialtest mit n=100

1. Hypothesen H_0: $p=p_0=0.1$ Ha: $p<p_0$

2. Irrtumswkt. $\alpha=0.05=5\%$

3. $T=\frac{Y_n-n*p_0}{\sqrt{n*p_0*(1-p_0)}}$ ist unter H_0 näherungsweise
N(0,1)-verteilt (ZGWS, Moivre 1730, Laplace 1812)

4. Kritischer Bereich (Ablehnungsbereich) (einseitig wegen einseitigem Ha)

$K^*=\{t|t<-z_{1-\alpha}\}$

invNormCDf("L",0.05,1,0)

-1.644853627

5. Testentscheidung:

$$T=\frac{2-10}{\sqrt{100*0.1*0.9}}$$

$$T=-\frac{8}{3}$$

approx(ans)

T=-2.666666667

$T=-2.67\in K^*=(-\infty,-1.645)$, d.h.
bei $Y_n=2$ muss H_0 abgelehnt werden, da Zweifel aufkommen, dass p=0.1 gilt (jedoch möglich **Fehler 2.Art** bei dieser Entscheidung auf Grundlage einer Stichprobe: Ablehnung einer

Hypothese, obwohl diese richtig sein könnte.)

Allgemeiner: $T=\frac{Y_n-10}{\sqrt{100*0.1*0.9}}=\frac{Y_n-10}{3}<-1.644853627$

bedeutet:

$Y_n<10-1.644853627*3$

$Y_n<5.065439119$

Bei höchstens 5 Gewinnen würde man H_0 stets ablehnen!

genauer (ZGWS mit Stetigkeitskorrektur 0.5):

solve$\left(\frac{Y_n+0.5-10}{3}<-1.644853627, Y_n\right)$

$\{Y_n<4.565439119\}$

bzw. $P(Y_n\leq4)$ und $P(Y_n\leq5)$ direkt berechnen:

binomialCDf(0,4,100,0.1)<0.05

0.02371108266<0.05

binomialCDf(0,5,100,0.1)>0.05

0.05757688649>0.05

Bei höchstens 4 Gewinnen würde man H_0 stets ablehnen (Fall n=100)!

Diskussion mit n=1000:

Y_n sei B(1000,0.1)-verteilt

invBinomialCDf(0.05,1000,0.1)

85

Ergebnis mit Warnhinweis:

======================

prob = 0.05

xInv = 85

----

prob-0.01=0.04

*xInv = 84

======================

binomialCDf(0,85,1000,0.1)>0.05

0.06069373052>0.05

binomialCDf(0,84,1000,0.1)<0.05

0.0485025069<0.05

Bei höchstens 84 Gewinnen würde man H_0 stets ablehnen (Fall n=1000)!

(c) Diskussion mit einem fiktiven Betrüger: $p=\frac{1}{15}$

Y_n sei B(1000,1/15)-verteilt

$P(Y_n \geq 5)=$

binomialCDf(5,100,100,1/15)

0.8039475774

binomialCDf(85,1000,1000,1/15)

0.01411855698

näherungsweise mit ZGWS und Stetigkeitskorrektur:

normCDf(84.5,∞,$\sqrt{1000*1/15*14/15}$,1000*1/15)

0.01188620544

Bei größerem Stichprobenumfang hat ein Betrüger weniger Chance, nicht ertappt zu werden.

Beim ehrlichen Losverkäufer ändert praktisch sich nichts:

binomialCDf(5,100,100,1/10)

0.9762889173

binomialCDf(85, 1000, 1000, 1/10)

0.9514974931

normCDf(84.5, ∞, $\sqrt{1000*1/10*9/10}$, 1000*1/10)

0.9488541377

(d) siehe (c)

normCDf(−∞, 4.5, $\sqrt{100*1/15*14/15}$, 100*1/15)

0.1925332409

normCDf(−∞, 84.5, $\sqrt{1000*1/15*14/15}$, 1000*1/15)

0.9881137946

Die Wkt., den Betrüger zu verdächtigen, steigt mit größerem n erheblich an!

Prof. Dr. Ludwig Paditz, 23.11.2016

Statistik für Produktionstechniker
================================

28. Ein Getränkeproduzent kauft eine Flaschenabfüllanlage. Der Hersteller versichert, dass die Abfüllmenge normalverteilt ist mit der Standardabweichung von 4ml.
Der Produzent wählt eine zufällige Stichprobe von 16 Flaschen, um zu prüfen, ob bei der Abfüllmenge signifkante Abweichungen zum Niveau 0,05 vom Sollwert 500ml
auftreten. Wie lautet seine Entscheidung?
Benutzen Sie ein geeignetes statistisches Testverfahren. Es wurden folgende Abfüllmengen gemessen:
503 501 500 499 493 504 507 499 507 491 502 497 498
502 505 501

Lösung:

{503,501,500,499,493,504,507,499,507,491,502,497,49▶

{503,501,500,499,493,504,507,499,507,491,502,497,49▶

dim(ans)

16

α=0.05, μ=500, σ=4

OneSampleZTest "≠",500,4,listx,1

done

DispStat

done

==========================

1-Stichprob. Z-Test

Daten=Liste

$\mu \neq 500$ (Alternativhypothese)

z = 0.5625 (Testgröße T)

prob = 0.5737754 (kritische Irrtumswkt.>α)

$\bar{x}$ = 500.5625

s_x = 4.4567365

n = 16

==========================

Wegen prob>α erfolgt keine Ablehnung der Nullhypothese, d.h. kein Einwand gegen $\mu=\mu_0=500$.

Test im Stat-Menü

Prof. Dr. Ludwig Paditz, 23.11.2016

Statistik für Produktionstechniker

================================

29. Für die Einschätzung der Eignung als Deponiestandort werden Untergrunduntersuchungen an einer Tonschicht durchgeführt. Die mittlere Mächtigkeit der Tonschicht soll nach den Ergebnissen der Voruntersuchungen 90cm betragen. Zwölf weitere Bohrungen ergeben die Werte (in cm):

63 72 69 99 98 61 53 72 108 78 97 76

Es wird angenommen, dass die Mächtigkeitswerte der Tonschicht durch eine normalverteilte Zufallsvariable beschrieben werden können.

(a) Sind die Ergebnisse der Bohrungen auf dem Signifkanzniveau 0,02 mit der ursprünglichen Mächtigkeitsangabe vereinbar?

(b) Welche Schlussfolgerung erhält man auf dem Signifkanzniveau von 0,05?

Lösung:

{63,72,69,99,98,61,53,72,108,78,97,76}→listx

{63,72,69,99,98,61,53,72,108,78,97,76}

mean(listx)

$$\frac{473}{6}$$

approx(ans)

78.83333333

variance(listx)

$$\frac{10169}{33}$$

approx(ans)

308.1515152

(a) einfacher t-Test (zweiseitig)

1. H_0: $\mu=\mu_0=90$ Ha: $\mu\neq\mu_0$
2. $\alpha=0.02$
3. $t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{78.83333333-90}{\sqrt{308.1515152}/\sqrt{12}}$

ist t_{n-1}-verteilt

4. $K^{*}=\{t \mid |t|>t_{n-1,\,1-\alpha/2}\}$
5. Entscheidung:

$$\frac{78.83333333-90}{\sqrt{308.1515152}/\sqrt{12}}$$

-2.203596235

invTCDf(0.01,11)

2.718079184

$t\notin K^{*}$, d.h. kein Einwand gegen H_0

OneSampleTTest "≠",90,listx,1

done

DispStat

done

========================

1-Stichprob. t-Test

Daten=Liste

$\mu \neq 0$

$t = -2.203596$

prob = 0.0497725 > 0.02 (krit. Irrtumswkt.)

$\bar{x} = 78.833333$

$s_x = 17.554245$

$n = 12$

========================

STAT-Editor

(b) einfacher t-Test (zweiseitig)

1. H_0: $\mu=\mu_0=90$ Ha: $\mu\neq\mu_0$
2. $\alpha=0.05$
3. $t=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\dfrac{78.83333333-90}{\sqrt{308.1515152}/\sqrt{12}}$

ist t_{n-1}-verteilt

4. $K^{*}=\{t \mid |t|>t_{n-1,\,1-\alpha/2}\}$
5. Entscheidung:

$$\frac{78.83333333-90}{\sqrt{308.1515152}/\sqrt{12}}$$

-2.203596235

invTCDf(0.025,11)

2.20098516

$t\in K^{*}$, d.h. Ablehnung von H_0

Prof. Dr. Ludwig Paditz, 07.12.2016

Statistik für Produktionstechniker

===============================

30. Sie beobachten, dass jemand

(a) bei 100 Münzwürfen 60 mal Wappen wirft.

(b) bei 100 Münzwürfen 65 mal Wappen wirft.

(c) bei 50 Münzwürfen 33 mal Wappen wirft.

Prüfen Sie, ob es sich um eine faire Münze handelt (α = 0,01).

Lösung:

Test für einen Anteilswert (p=0,5)

(a)

OnePropZTest "≠",0.5,60,100

done

DispStat

done

=======================

Z-Test (1 Wkt.)

Prop ≠ 0.5

z = 2

prob = 0.0455003 > α (Nichtablehnung)

$\hat{p}$ = 0.6

n = 100

=======================

(b)

OnePropZTest "≠",0.5,65,100

done

DispStat

done

========================

Z-Test (1 Wkt.)

Prop ≠ 0.5

z = 3

prob = 2.6998E-3 < α (Ablehnung)

p̂ = 0.65

n = 100

========================

(c)

OnePropZTest "≠",0.5,33,50

done

DispStat

done

========================

Z-Test (1 Wkt.)

Prop ≠ 0.5

z = 2.2627417

prob = 0.0236516 > α (Nichtablehnung)

p̂ = 0.66

n = 50

========================

STAT-Editor

(a) per Hand: (H ist binomialverteilt)

1. H_0: $p=p_0=0.5$ Ha: $p \neq p_0$
2. $\alpha=0.01$
3. $Z=\frac{H - n*p_0}{\sqrt{n*p_0*(1-p_0)}}=\frac{60-50}{\sqrt{50*0.5}}$
4. $K^*=\{z| \ |z|>z_{1-}\alpha/2\}$
5. Entscheidung:

$z=\frac{60-50}{\sqrt{50*0.5}}$

$z=2$

invNormCDf("L",1-0.01/2,1,0)

2.575829304

$z \notin K^*$, Nichtablehnung von H_0

Bem.:

normCDf(2,∞,1,0)*2

0.0455002639