Prof. Dr. Ludwig Paditz, 08.11.2016

Statistik für Produktionstechniker
==============================

18. Bei 10 Messungen einer physikalischen Größe X ergaben sich folgende Werte:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ 332 & 354 & 338 & 340 & 345 & 360 & 366 & 352 & 346 & 342 \end{bmatrix}$$

Unter der Annahme, dass die Werte $x_1, \ldots, x_n$ eine konkrete Stichprobe aus einer Grundgesamtheit darstellen, die der Normalverteilung unterliegt, ermittle man zweiseitige Konfdenzintervalle zum Konfdenzniveau $1-\alpha = 0,95$ für

(a) den Erwartungswert $\mu = E(X)$ bei bekannter Varianz $\sigma^2 = var(X) = 105$;
(b) den Erwartungswert $\mu = E(X)$ bei unbekannter Varianz $\sigma^2 = var(X)$;
(c) die Varianz $\sigma^2 = var(X)$ bei unbekanntem Erwartungswert $\mu = E(X)$.
(d) Wie groß müsste der Stichprobenumfang gewählt werden, damit bei gleichem Konfdenzniveau $1-\alpha = 0,95$ die Länge des Konfdenzintervalls in (a) höchstens 8 beträgt?

Lösung:

(a) Z-Intervall

matToList(trn([332 354 338 340 345 360 366 352 346 342

{332,354,338,340,345,360,366,352,346,342}

OneSampleZInt 0.95, $\sqrt{105}$, listx, 1

done

DispStat

done

LInterval

341.1489908

RInterval

353.8510092

$\overline{x}$

347.5

s_x

10.46953252

dim(listx)⇒n

10

elementare Rechnung:

Eingabemöglichkeiten: "L" ... left (Lage der Fläche)

invNormCDf("L",0.975,1,0)

1.959963985

invNormCDf(0.975,1,0)

1.959963985

invNormCDf(0.975)

1.959963985

$\overline{x}-\frac{\sqrt{105}}{\sqrt{n}}$*invNormCDf("L",0.975,1,0)

341.1489908

$\bar{x}+\frac{\sqrt{105}}{\sqrt{n}}*\text{invNormCDf}(\text{"L"}, 0.975, 1, 0)$

353.8510092

im Stat-Editor

stop

(b) T-Intervall

OneSampleTInt 0.95, listx, 1

done

DispStat

done

LInterval

340.0105476

RInterval

354.9894524

$\bar{x}$

347.5

s_x

10.46953252

dim(listx)⇒n

10

elementare Rechnung:

im ClassPad: t-Quantildefinition von rechts!

Eingabe **invTCDf(** $\frac{\alpha}{2}$ **, n−1)** statt Eingabe **invTCDf(1−** $\frac{\alpha}{2}$ **, n−1)** invTCDf(0.025, n−1)

2.262157163

$\overline{x}-\frac{S_x}{\sqrt{10}}*\text{invTCDf}(0.025,n-1)$

340.0105476

$\overline{x}+\frac{S_x}{\sqrt{10}}*\text{invTCDf}(0.025,n-1)$

354.9894524

im Stat−Editor

stop

(c) χ^2−Intervall

kein OneSample−Befehl vorhanden!

elementare Rechnung:

im ClassPad: **χ^2**−Quantildefinition von rechts!

Eingabe **invChiCDf($\frac{\alpha}{2}$, n−1)** statt Eingabe

invChiCDf($1-\frac{\alpha}{2}$, n−1)

invChiCDf($\frac{0.05}{2}$, n−1)

19.0227678

invChiCDf($1-\frac{0.05}{2}$, n−1)

2.7003895

stdDev(listx)⇒s

10.46953252

$$\frac{(n-1)*s^2}{\text{invChiCDf}(0.025,n-1)}$$

51.85890983

$$\frac{(n-1)*s^2}{\text{invChiCDf}(1-0.025,n-1)}$$

365.3176699

(d)

notwendiger Stichprobenumfang n in (a):

Intervall−Länge=

$\bar{x}+\frac{\sqrt{105}}{\sqrt{n}}*\text{invNormCDf}(\text{"L"},0.975,1,0)-(\bar{x}-\frac{\sqrt{105}}{\sqrt{n}}*\text{invNormCDf}$

$2*\frac{\sqrt{105}}{\sqrt{n}}*\text{invNormCDf}(\text{"L"},0.975,1,0)\le 8$

DelVar n

done

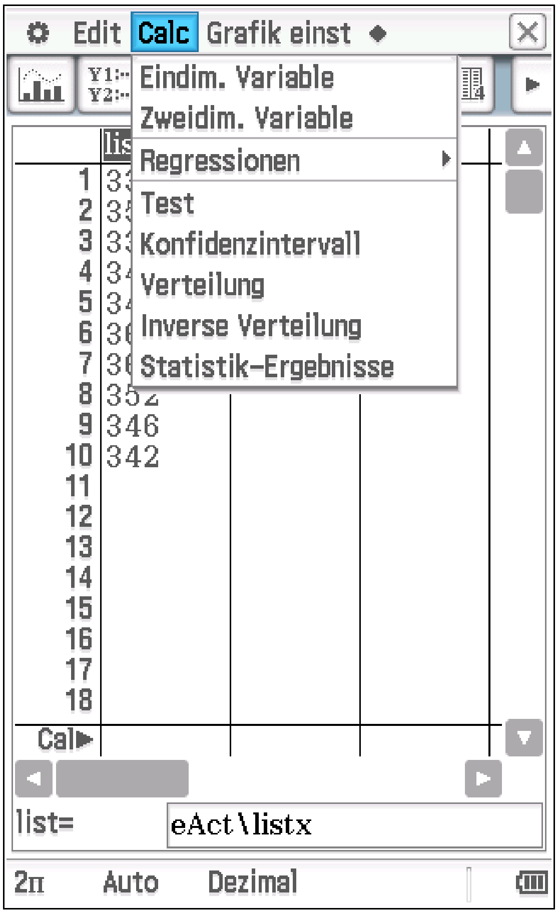
$2*\frac{\sqrt{105}}{\sqrt{n}}*\text{invNormCDf}(\text{"L"},0.975,1,0)\le 8$

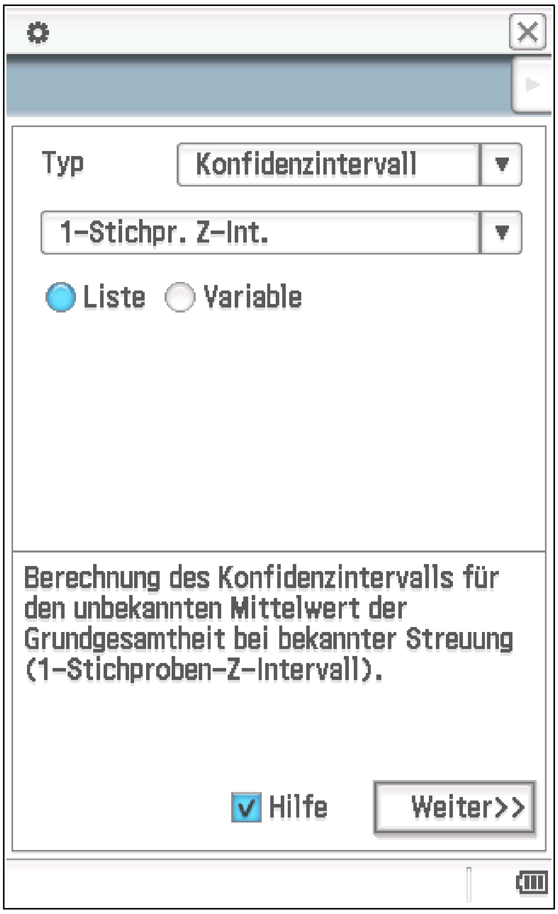
$$\frac{40.16730891}{n^{0.5}}\le 8$$

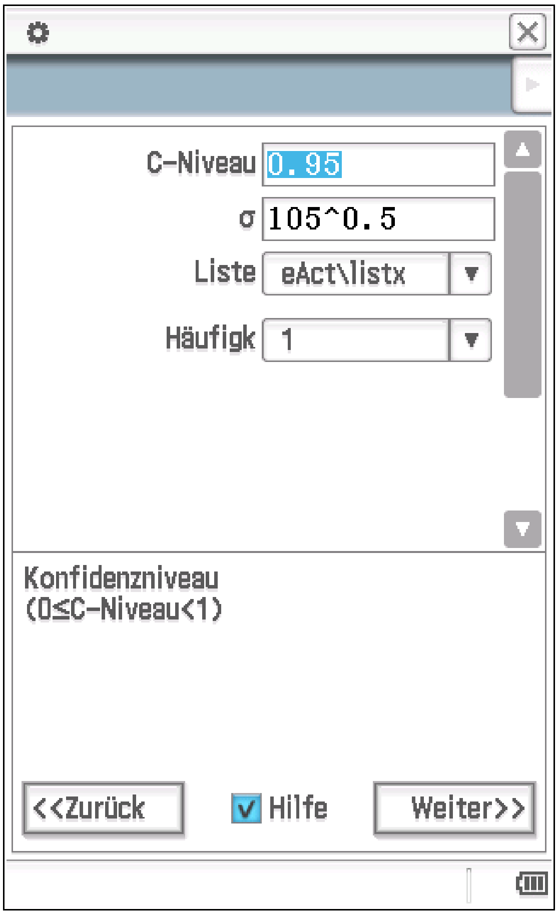
solve(ans,n)

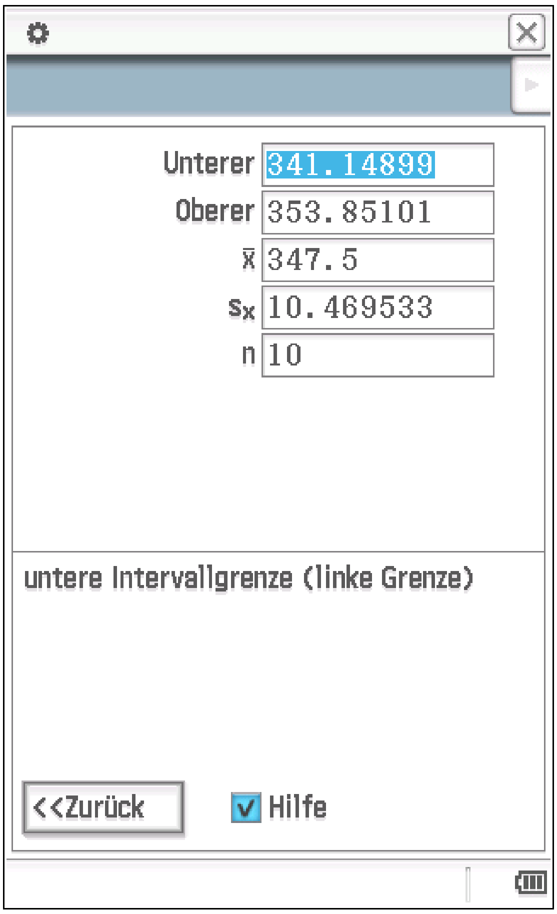
$\{n\ge 25.20957351\}$

Der notwendige SP−Umfang n muss mindestens 26 betragen.

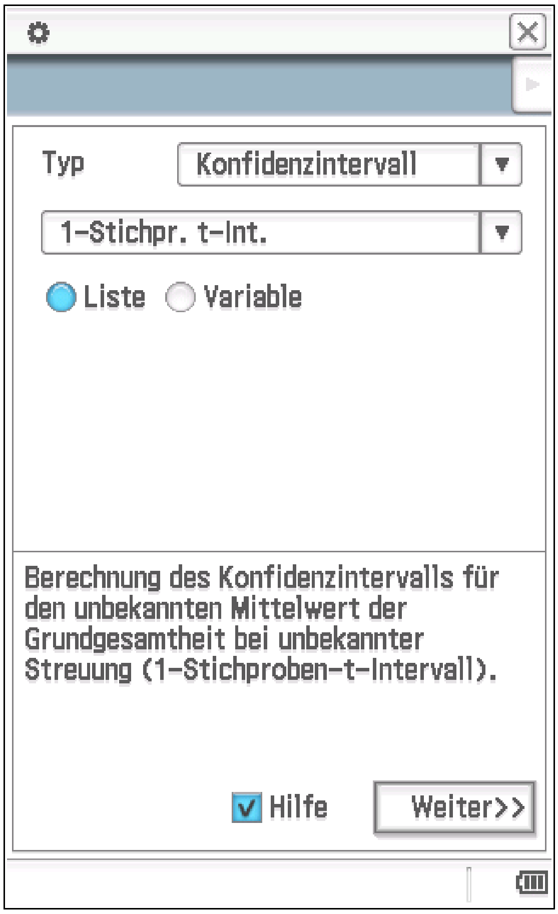

Edit Calc Grafik einst
Eindim. Variable
Zweidim. Variable
Regressionen
Test
Konfidenzintervall
Verteilung
Inverse Verteilung
Statistik-Ergebnisse
8 352
9 346
10 342
Cal
list=
eAct\listx
2π Auto Dezimal

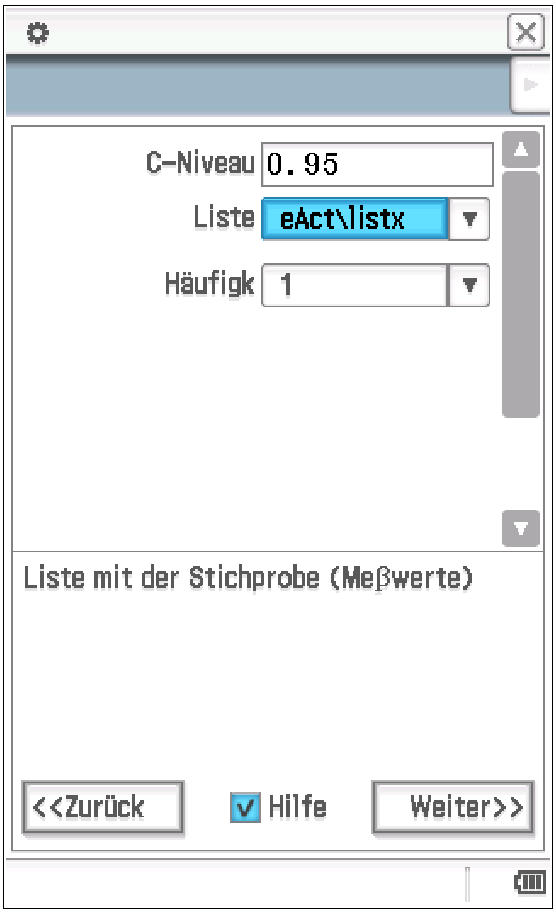

Typ
Konfidenzintervall
1-Stichpr. Z-Int.
Liste
Variable
Berechnung des Konfidenzintervalls für den unbekannten Mittelwert der Grundgesamtheit bei bekannter Streuung (1-Stichproben-Z-Intervall).
Hilfe
Weiter>>

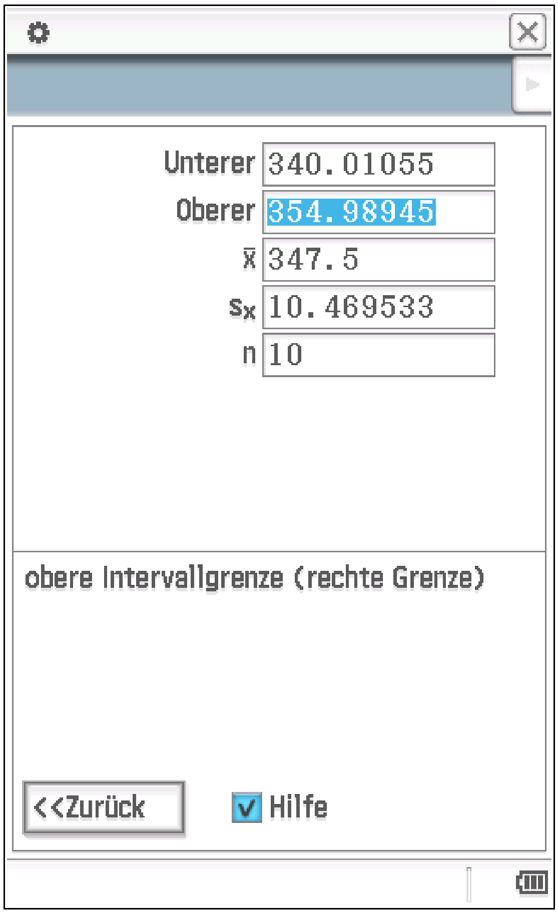

C-Niveau 0.95
σ 105^0.5
Liste eAct\listx
Häufigk 1
Konfidenzniveau
(0≤C-Niveau<1)
<<Zurück
Hilfe
Weiter>>


Unterer 341.14899
Oberer 353.85101
x̄ 347.5
sx 10.469533
n 10
untere Intervallgrenze (linke Grenze)
<<Zurück
Hilfe


Typ
Konfidenzintervall
1-Stichpr. t-Int.
Liste
Variable
Hilfe
Weiter>>
listx
list2
list3
1 332
2 354
3 338
4 340
5 345
6 360
Cal▶
[3]=


Typ
Konfidenzintervall
1-Stichpr. t-Int.
Liste
Variable
Berechnung des Konfidenzintervalls für den unbekannten Mittelwert der Grundgesamtheit bei unbekannter Streuung (1-Stichproben-t-Intervall).
Hilfe
Weiter>>


C-Niveau 0.95
Liste eAct\listx
Häufigk 1
Liste mit der Stichprobe (Meβwerte)
<<Zurück
Hilfe
Weiter>>


Unterer 340.01055
Oberer 354.98945
x̄ 347.5
sx 10.469533
n 10
obere Intervallgrenze (rechte Grenze)
<<Zurück
Hilfe

Prof. Dr. Ludwig Paditz, 08.11.2016

Statistik für Produktionstechniker

==============================

19. Aus einer Produktionslinie für ein bestimmtes Bauteil wurden n = 584 Teile entnommen und auf ihre Qualität überprüft. Dabei ergab sich, dass 92 dieser Teile die Güteklasse A erreichten.
Sei p = P({Güteklasse A}) der relative Anteil der Teile in der Gesamtproduktion, die die Güteklasse A erreichen. Ermitteln Sie ein zweiseitiges und beide einseitigen konkreten Konfdenzintervalle für p = P(A) zum Konfidenzniveau $1-\alpha = 0.95$. Was sagen diese aus?

Lösung:
dichotome Grundgesamtheit mit unbekanntem Parameter p

Schätzung für p: $\hat{p}=\frac{92}{584}$

$$\frac{92}{584}$$

0.1575342466

großer SP-Umfang n:
elementare Rechnung:

$$\hat{p} \pm \text{InvNormCDf}(0.975)*\sqrt{\frac{\hat{p}*(1-\hat{p})}{n}}$$

InvNormCDf(0.975)

1.959963985

$$\frac{92}{584}-1.959963985*\sqrt{\frac{\frac{92}{584}*(1-\frac{92}{584})}{584}}$$

0.1279877981

$$\frac{92}{584}+1.959963985*\sqrt{\frac{\frac{92}{584}*(1-\frac{92}{584})}{584}}$$

0.187080695

Mit dem ClassPad-Befehl **OnePropZInt:**

OnePropZInt 0.95,92,584

done

DispStat

done

LInterval

0.1279877981

RInterval

0.187080695

$\hat{p}$

0.1575342466

Ergebnis: $p\in[0.12799, 0.18708]$ mit Wkt. 0.95

im Stat-Editor

Zum Vergleich die genauere Formel:

z:=InvNormCDf(0.975)

1.959963985

H_n:=92

92

n:=584

$$\frac{1}{n+z^2}\left(H_n+\frac{z^2}{n}-z*\sqrt{\frac{H_n*(n-H_n)}{n}+\frac{z^2}{4}}\right)$$

0.1269813116

$$\frac{1}{n+z^2}\left(H_n+\frac{z^2}{n}+z*\sqrt{\frac{H_n*(n-H_n)}{n}+\frac{z^2}{4}}\right)$$

0.1860506342

Ergebnis: p∈[0.12698, 0.18605] mit Wkt. 0.95

Einseitige p-Intervalle: [a, 1] bzw. [0, b]

z:=InvNormCDf(0.95)

1.644853627

$$\frac{1}{n+z^2}\left(H_n+\frac{z^2}{n}-z*\sqrt{\frac{H_n*(n-H_n)}{n}+\frac{z^2}{4}}\right)$$

0.1320264085

$$\frac{1}{n+z^2}\left(H_n+\frac{z^2}{n}+z*\sqrt{\frac{H_n*(n-H_n)}{n}+\frac{z^2}{4}}\right)$$

0.1816049652

bzw. vereinfacht (n groß)

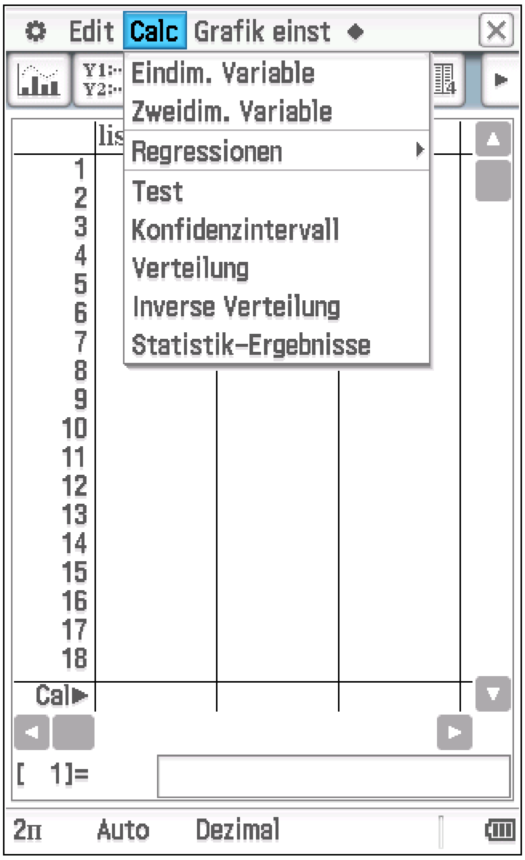
$$\frac{92}{584}-1.644853627*\sqrt{\frac{\frac{92}{584}*(1-\frac{92}{584})}{584}}$$

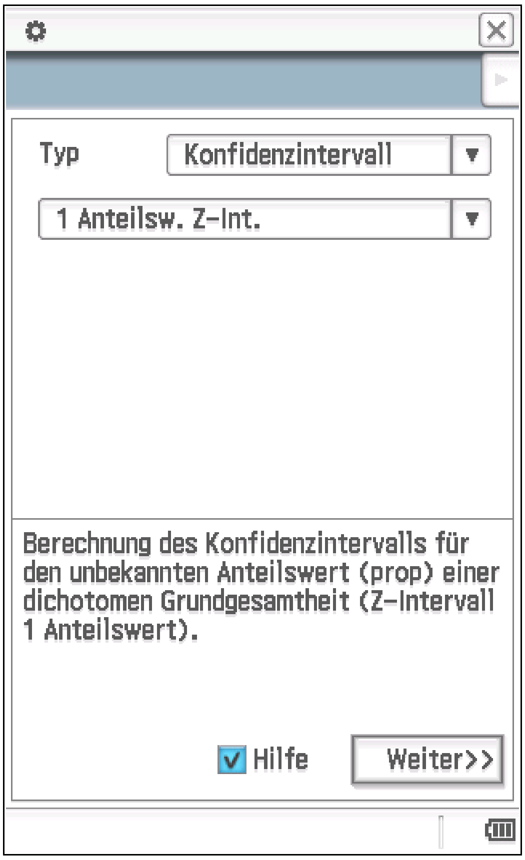
0.1327380854

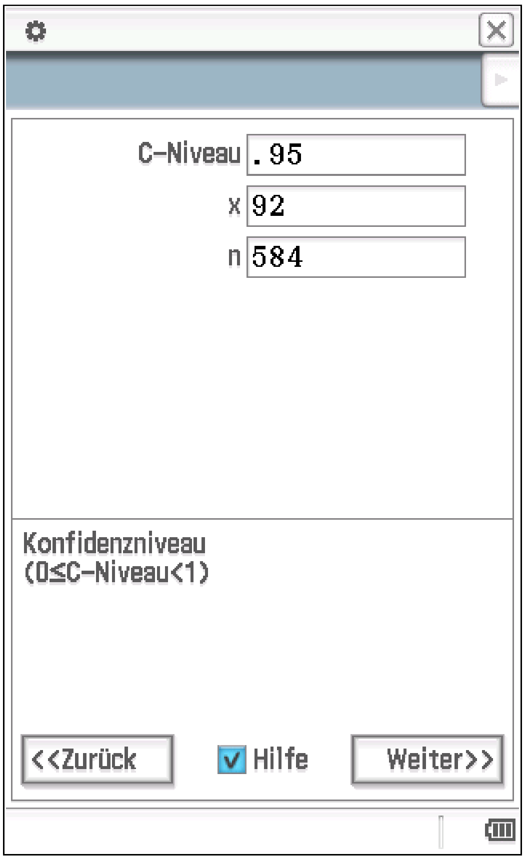
$$\frac{92}{584}+1.644853627*\sqrt{\frac{\frac{92}{584}*(1-\frac{92}{584})}{584}}$$

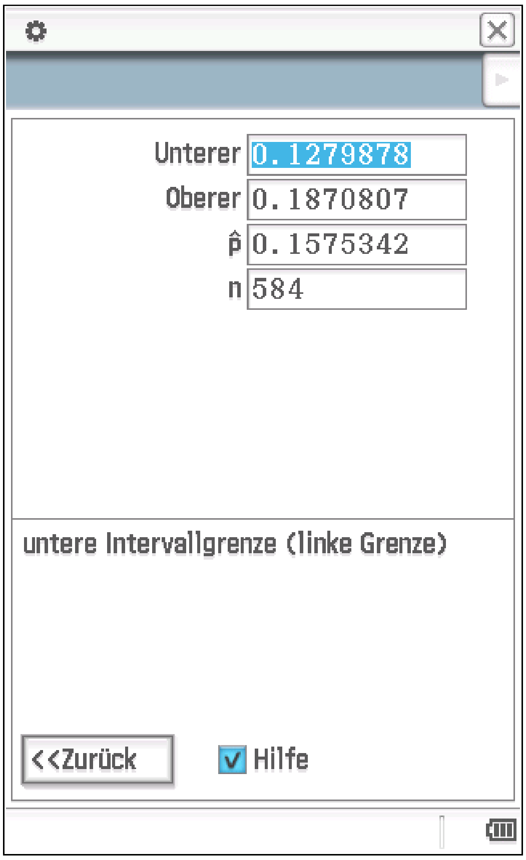
0.1823304078

Ergebnis: [a, 1]=[0.1327, 1] bzw. [0, b]=[0, 0.1823]

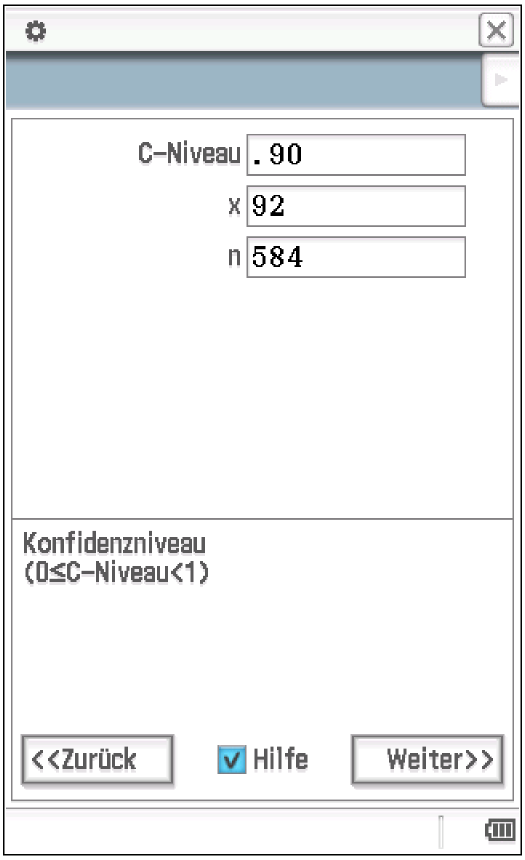


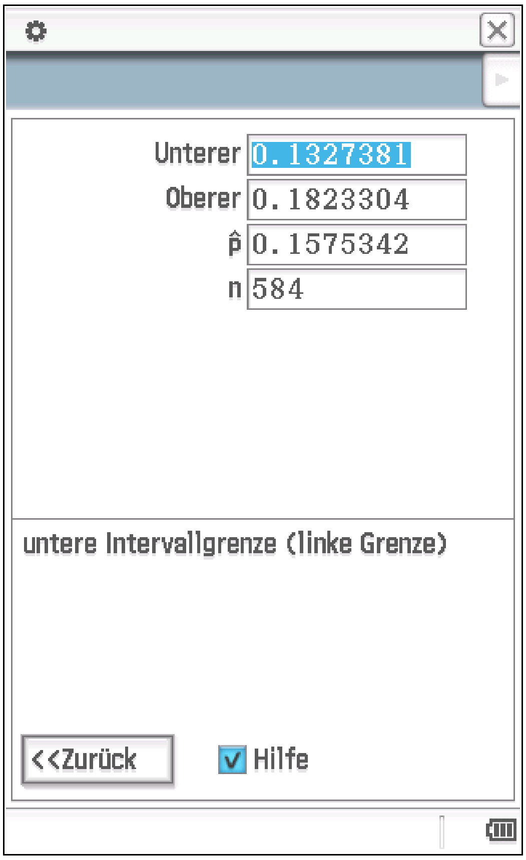


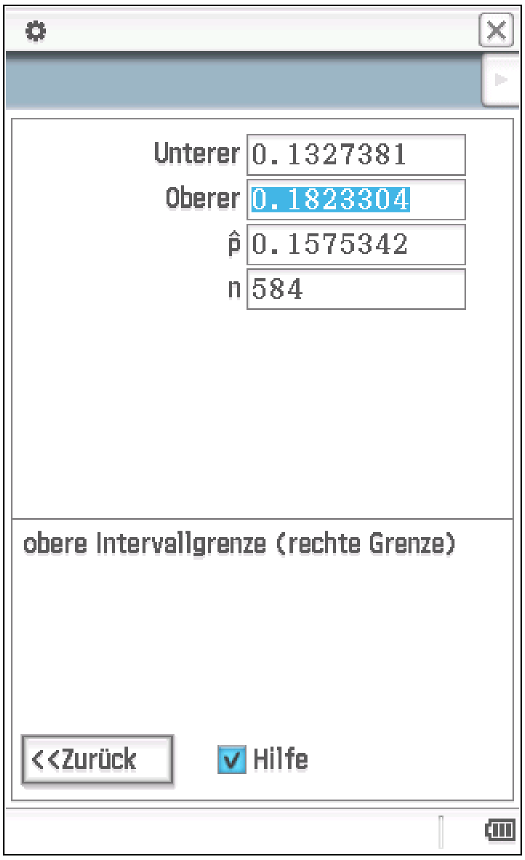




Zweiseitiges Intervall







Grenzen für einseitige Intervalle

Prof. Dr. Ludwig Paditz, 08.11.2016

Statistik für Produktionstechniker
================================

20. Bei zwei unabhängig voneinander durchgeführten Befragungen über Ernährungsgewohnheiten machten $n_1 = 50$ bzw. $n_2 = 120$ Personen, die zu einer gemeinsamen Alters- und Beschäftigungsgruppe gehören, Angaben zu ihrem täglichen Fettkonsum (in g). Es wird angenommen, dass die erhaltenen Werte Realisierungen mathematischer Stichproben von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen sind. Aus den Werten wurden die empirischen Mittelwerte $\bar{x}_1=60,25$; $\bar{x}_2=60,1$ und die empirischen Varianzen $s_1^2=12^2$, $s_2^2=15^2$ ermittelt.

(a) Berechnen Sie für beide Stichproben konkrete zweiseitige Konfidenzintervalle für μ zum Niveau $1-\alpha=0,95$ unter der Voraussetzung $\sigma^2=144$.
Wie verändern sich diese Intervalle, wenn der Stichprobenumfang wächst und die empirischen Mittelwerte bzw. Varianzen dabei gleich bleiben?
(b) Bestimmen Sie für die Stichprobe vom Umfang $n_2=120$ zweiseitige Konfidenzintervalle für μ bei unbekannter Varianz zum Niveau $1-\alpha$ mit $\alpha=0,01$, $\alpha=0,05$ und $\alpha=0,1$!

Lösung:

(a) vorhandener Befehl im ClassPad:

OneSampleZInt $1-\alpha, \sigma, \bar{x}, n$

OneSampleZInt 0.95,12,60.25,50

done

DispStat

done

```
========================
1-Stichprob.  Z-Int.
Daten=Variable
   Lower = 56.923831
   Upper = 63.576169
      x̄ = 60.25
      n = 50
========================
```

OneSampleZInt 0.95,12,60.1,120

done

DispStat

done

```
========================
1-Stichprob.  Z-Int.
Daten=Variable
   Lower = 57.952967
   Upper = 62.247033
      x̄ = 60.1
      n = 120
========================
```

Stat-Editor

(b) vorhandener Befehl im ClassPad:

OneSampleTInt 1−α, $\bar{x}$, s_x, n

OneSampleTInt 0.99,60.1,15,120

done

DispStat

done

========================

1−Stichprob. t−Int.

Daten=Variable

Lower = 56.515463

Upper = 63.684537

$\bar{x}$ = 60.1

n = 120

========================

OneSampleTInt 0.95,60.1,15,120

done

DispStat

done

========================

1−Stichprob. t−Int.

Daten=Variable

Lower = 57.83002

Upper = 62.36998

$\bar{x}$ = 60.1

n = 120

========================

OneSampleTInt 0.90,60.1,15,120

done

DispStat

done

========================

1-Stichprob. t-Int.

Daten=Variable

Lower = 57.847691

Upper = 62.352309

$\bar{x}$ = 60.1

n = 120

========================

Stat-Editor

Formeln:

für 1-Stichprob. Z-Int.:

$\bar{x}\mp\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z\_(1-\alpha/2)$

$60.25-\frac{12}{\sqrt{50}}*\text{InvNormCDf}(\text{"L"},1-\frac{0.05}{2},1,0)$

56.92383082

$60.25+\frac{12}{\sqrt{50}}*\text{InvNormCDf}(\text{"L"},1-\frac{0.05}{2},1,0)$

63.57616918

Bem.: optional "L", "C","R" in InvNormCDf(...)

für 1-Stichprob. t-Int.:

$\bar{x} \mp \frac{s}{\sqrt{n}} t\_(n-1, 1-\alpha/2)$

$60.1 - \frac{15}{\sqrt{120}} * \text{InvTCDf}\left(\frac{0.01}{2}, 119\right)$

56.51546262

$60.1 + \frac{15}{\sqrt{120}} * \text{InvTCDf}\left(\frac{0.01}{2}, 119\right)$

63.68453738

Bem.: Man beachte die Syntax bei

$\text{InvTCDf}\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right) = t\_(n-1, 1-\alpha/2)$,

programmiert als rechtsseitiges Quantil.

Prof. Dr. Ludwig Paditz, 08.11.2016

Statistik für Produktionstechniker
==============================

21. Zur Überprüfung eines Messgerätes zur Geschwindigkeitsmessung wurden 30 Kontrollmessungen vorgenommen, indem die Geschwindigkeit eines Gegenstandes, der sich mit exakt 30 km/h bewegte, 30 mal gemessen wurde. Dabei ergab sich ein arithmetisches Mittel dieser Kontrollmessungen von 29,6 km/h bei einer empirischen Standardabweichung von 1,2 km/h. Es soll angenommen werden, dass der Messfehler durch eine normalverteilte Zufallsvariable beschrieben werden kann.
Geben Sie ein zweiseitiges und beide einseitigen Konfidenzintervalle zum Konfidenzniveau 0,95 für die Varianz des Messfehlers an. Was sagen diese aus?

Lösung:
$n=30,\ \bar{x}=29.6,\ s=1.2$

Formel für das Chi-Quadrat-Streuungsintervall (zweiseitig):

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2\_n-1,1-\alpha/2} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2\_n-1,\alpha/2}$$

$$\frac{29*1.2^2}{\text{InvChiCDf}(0.05/2,29)}$$

0.9133401637

$$\frac{29*1.2^2}{\text{InvChiCDf}(1-0.05/2,29)}$$

2.602343954

Ergebnis:

$0.9133401637 \le \sigma^2 \le 2.602343954$

Bem.:

Eine fertige Formel für das Chi^2-Intervall ist im ClassPad nicht vorhanden.

Im ClassPad sind die Chi^2-Quantile genau wie die t-Quantile rechtsseitig programmiert:

χ^2_n-1,α/2 = InvChiCDf(1-α/2,n-1)

Formeln für das Chi-Quadrat-Streuungsintervall (einseitig):

$$0 \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2\_n-1,\alpha} \text{ bzw. } \frac{(n-1)s^2}{\chi^2\_n-1,1-\alpha} \le \sigma^2 < \infty$$

$$\frac{29*1.2^2}{\text{InvChiCDf}(1-0.05,29)}$$

2.35820739

$0 \le \sigma^2 \le 2.35820739$

bzw.

$$\frac{29*1.2^2}{\mathrm{InvChiCDf}(0.05,29)}$$

0.9812729185

$0.9812729185 \le \sigma^2 < \infty$