Prof. Dr. L. Paditz 11.04.2014

Integration: Formel (10) im Arbeitsblatt

======================================

Ansatz für $\int_{\square}^{\square} \frac{1}{(x^2+p*x+q)^n} dx$ mit $n>1$, p, q fest vorgegeben

und $x^2+p*x+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\left(\frac{p}{2}\right)^2$ mit $q-\left(\frac{p}{2}\right)^2>0$:

$$\int_{\square}^{\square} \frac{1}{(x^2+p*x+q)^n} dx=\frac{P*x+Q}{(x^2+p*x+q)^{n-1}}+R*\int_{\square}^{\square} \frac{1}{(x^2+p*x+q)^{n-1}} dx,$$

wobei P, Q, R eindeutig bestimmt sind.

Ableitung der drei Terme:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\square}^{\square} \frac{1}{(x^2+p*x+q)^n} dx\right) \Rightarrow A$$

$$\frac{1}{(x^2+p\cdot x+q)^n}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{P*x+Q}{(x^2+p*x+q)^{n-1}}\right)$$

$$-(x^2+p\cdot x+q)^{-2\cdot n+1}\cdot\left(2\cdot P\cdot n\cdot x^2\cdot(x^2+p\cdot x+q)^{n-1}-2\cdot P\cdot x^2\cdot(x^2+p\cdot\right.$$

simplify(ans)$\Rightarrow$B

$$\frac{-(2\cdot P\cdot n\cdot x^2+P\cdot n\cdot p\cdot x-3\cdot P\cdot x^2-2\cdot P\cdot p\cdot x+2\cdot Q\cdot n\cdot x+Q\cdot n\cdot p-2\cdot Q\cdot x-P\cdot q-}{(x^2+p\cdot x+q)^n}$$

$$\frac{d}{dx}\left(R*\int_{\square}^{\square}\frac{1}{(x^2+p*x+q)^{n-1}}dx\right)\Rightarrow C$$

$$R\cdot(x^2+p\cdot x+q)^{-n+1}$$

$$(A=B+C)*(x^2+p\cdot x+q)^n$$

$$1=-\left(\frac{2\cdot P\cdot n\cdot x^2+P\cdot n\cdot p\cdot x-3\cdot P\cdot x^2-2\cdot P\cdot p\cdot x+2\cdot Q\cdot n\cdot x+Q\cdot n\cdot p-2\cdot Q\cdot x-P\cdot}{(x^2+p\cdot x+q)^n}\right.$$

simplify(ans)⇒GL

$$1=-2\cdot P\cdot n\cdot x^2-P\cdot n\cdot p\cdot x+3\cdot P\cdot x^2+R\cdot x^2+2\cdot P\cdot p\cdot x-2\cdot Q\cdot n\cdot x+R\cdot p\cdot x-Q\cdot n\cdot$$

Koeff.-vergleich:

für x^2: $0=-2\cdot P\cdot n+3\cdot P+R$

für x^1: $0=-P\cdot n\cdot p+2\cdot P\cdot p-2\cdot Q\cdot n+R\cdot p+2\cdot Q$

für x^0: $1=-Q\cdot n\cdot p+q\cdot(P+R)+Q\cdot p$

in Matrixform:

$$\begin{bmatrix}3-2n & 0 & 1\\ 2p-n*p & 2-2n & p\\ q & p-n*p & q\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}P\\ Q\\ R\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}3-2n & 0 & 1\\ 2p-n*p & 2-2n & p\\ q & p-n*p & q\end{bmatrix}\right)$$

$$-n^2\cdot p^2+4\cdot n^2\cdot q+2\cdot n\cdot p^2-p^2-8\cdot n\cdot q+4\cdot q$$

simplify(ans)

$$-(n-1)^2\cdot(p^2-4\cdot q)$$

tatsächlich ist für die oben betrachteten n,p,q die Matrix von vollem Rang, da det(...)≠0.

Berechnung von $\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 3-2n & 0 & 1 \\ 2p-n*p & 2-2n & p \\ q & p-n*p & q \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{-(2\cdot n-2)}{n^2\cdot p^2-4\cdot n^2\cdot q-2\cdot n\cdot p^2+p^2+8\cdot n\cdot q-4\cdot q} \\ \dfrac{-(n\cdot p-p)}{n^2\cdot p^2-4\cdot n^2\cdot q-2\cdot n\cdot p^2+p^2+8\cdot n\cdot q-4\cdot q} \\ \dfrac{-\left(4\cdot n^2-10\cdot n+6\right)}{n^2\cdot p^2-4\cdot n^2\cdot q-2\cdot n\cdot p^2+p^2+8\cdot n\cdot q-4\cdot q} \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} \dfrac{-2}{(n-1)\cdot\left(p^2-4\cdot q\right)} \\ \dfrac{-p}{(n-1)\cdot\left(p^2-4\cdot q\right)} \\ \dfrac{-2\cdot(2\cdot n-3)}{(n-1)\cdot\left(p^2-4\cdot q\right)} \end{bmatrix}$$

Übergang zu $x^2+p*x+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\left(\frac{p}{2}\right)^2=(x-b)^2+c^2$ mit

$-2b=p$ und $q=b^2+c^2$

ans|p=−2b and $q=b^2+c^2$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{-2}{(n-1)\cdot\left(4\cdot b^2-4\cdot\left(b^2+c^2\right)\right)} \\ \dfrac{2\cdot b}{(n-1)\cdot\left(4\cdot b^2-4\cdot\left(b^2+c^2\right)\right)} \\ \dfrac{-2\cdot(2\cdot n-3)}{(n-1)\cdot\left(4\cdot b^2-4\cdot\left(b^2+c^2\right)\right)} \end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2\cdot c^2\cdot(n-1)} \\ \frac{-b}{2\cdot c^2\cdot(n-1)} \\ \frac{n-\frac{3}{2}}{c^2\cdot(n-1)} \end{bmatrix}$$

Endergebnis: $\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\cdot c^2\cdot(n-1)} \\ \frac{-b}{2\cdot c^2\cdot(n-1)} \\ \frac{n-\frac{3}{2}}{c^2\cdot(n-1)} \end{bmatrix}$ ergibt

$$\frac{P*x+Q}{\left(x^2+p*x+q\right)^{n-1}}+R*\int_{□}^{□}\frac{1}{\left(x^2+p*x+q\right)^{n-1}}dx \mid P=\frac{1}{2\cdot c^2\cdot(n-1)} \text{ and }$$

$$\left(x^2+p\cdot x+q\right)^{-n+1}\cdot\left(\frac{x}{2\cdot c^2\cdot(n-1)}-\frac{b}{2\cdot c^2\cdot(n-1)}\right)+\frac{\int \left(x^2+p\cdot x+q\right)^{-1}}{c^2\cdot(n}$$

simplify(ans)

$$\frac{\left(x^2+p\cdot x+q\right)^{-n+1}\cdot(x-b)}{2\cdot c^2\cdot(n-1)}+\frac{\int \left(x^2+p\cdot x+q\right)^{-n+1}dx\cdot\left(n-\frac{3}{2}\right)}{c^2\cdot(n-1)}$$

$$\int_{□}^{□}\frac{1}{\left(x^2+p*x+q\right)^{n}}dx=\frac{1}{2\cdot c^2\cdot(n-1)}*\frac{x-b}{\left(x^2+p*x+q\right)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2c^2\cdot(n-1)}$$

mit $x^2+p*x+q=(x-b)^2+c^2$

$$\int_{\square}^{\square} \frac{1}{\left((x-b)^2+c^2\right)^n} dx = \frac{1}{2\cdot c^2\cdot(n-1)} * \frac{x-b}{\left((x-b)^2+c^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2c^2\cdot(n-}$$

$$\int \frac{1}{\left((x-b)^2+c^2\right)^n} dx = \frac{\left((x-b)^2+c^2\right)^{-n+1}\cdot(x-b)}{2\cdot c^2\cdot(n-1)} + \int \frac{\left((x-b)^2+c}{2\cdot c}$$

Probe:

$\frac{d}{dx}(\text{ans})$

$$\frac{1}{\left((x-b)^2+c^2\right)^n} = \frac{-(x-b)^2}{c^2\cdot\left((x-b)^2+c^2\right)^n} + \frac{\left((x-b)^2+c^2\right)^{-n+1}\cdot(2\cdot n-}{2\cdot c^2\cdot(n-1)}$$

linke Seite nach rechts:

$$\frac{-1}{\left((x-b)^2+c^2\right)^n} + \frac{-(x-b)^2}{c^2\cdot\left((x-b)^2+c^2\right)^n} + \frac{\left((x-b)^2+c^2\right)^{-n+1}\cdot(2\cdot n-}{2\cdot c^2\cdot(n-1)}$$

$$\frac{-(x-b)^2}{c^2\cdot\left((x-b)^2+c^2\right)^n} - \frac{1}{\left((x-b)^2+c^2\right)^n} + \frac{\left((x-b)^2+c^2\right)^{-n+1}\cdot(2\cdot n-}{2\cdot c^2\cdot(n-1)}$$

simplify(ans)

$$\frac{-\left(x^2+b^2+c^2-2\cdot b\cdot x\right)^{-3\cdot n+1}\cdot\left(\left((x-b)^2+c^2\right)^{2\cdot n-1}\cdot\left(x^2+b^2+c^2-\right.\right.}{c^2}$$

simplify(ans)

0