Quantitative Auswertung einer ungleichmäßigen Fehlerabschätzung im ZGWS

Ludwig Paditz (Dresden) Wolfgang Tysiak (Wuppertal)

Beitrag zur MGDDR-Tagung
10.-14. September 1990
Dresden

1. EINLEITUNG

Es sei $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit $EX_k = 0$ und $E|X_k|^{(2+\delta)} = \beta_{2+\delta,k} < \infty$ für ein festes $\delta \in (0,1]$, k=1(1)n, und
es gelte

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} EX_k^2 > 0.$$

In der Summationstheorie stochastischer Größen wird das asymptotische Verhalten der Verteilung von $(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/B_n$ untersucht. Als grundlegendes Ergebnis sei hier der zentrale Grenzwertsatz (ZGWS) genannt, der die Normalverteilung

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

als Grenzverteilung angibt und der umgekehrt eine markante Charakterisierung der Normalverteilung durch einen Summationsprozeß darstellt.

Mit den Arbeiten von Berry und Esseen wird seit den vierziger Jahren der Frage nach einer Fehlerabschätzung für

$$D_n(x) := |P(X_1 + X_2 + \ldots + X_n < xB_n) - \Phi(x)|$$

nachgegangen, wenn $n \in N$ dabei fest ist. 1966 bewies A.Bikelis folgende ungleichmäßige Fehlerabschätzung als Variante der bekannten Esseen'schen Ungleichung:
Es existiert eine Konstante $C = C(\delta) > 0$ derart, daß für alle $n \in N$ und alle $x \in R$ gilt:

$$D_n(x) \leq C \ B_n^{-(2+\delta)} \sum_{k=1}^{n} \beta_{2+\delta,k} (1 + |x|^{2+\delta})^{-1}. \qquad (1)$$

In diesem Beitrag werden neue numerische Resultate zur Konstantenabschätzung der in (1) auftretenden Größe $C = C(\delta)$ angegeben.

2. ZUM INTERNATIONALEN STAND BETREFFS DER KONSTANTEN-ABSCHÄTZUNG UND DER ESSEN'SCHEN UNGLEICHUNG

In einem Überblick werden hier zunächst wichtige Etappen zur Konstantenabschätzung in der gleichmäßigen Fehlerabschätzung von Esseen (aus dem Jahre 1945) zusammengestellt.

Die Esseen'sche Ungleichung lautet:

$$\sup_{x\in R} D_n(x) \leq K \; B_n^{-(2+\delta)} \sum_{k=1}^{n} \beta_{2+\delta,k} \quad , \qquad (2)$$

wobei $K = K(\delta)$ eine positive Konstante ist.

Konstantenabschätzungen im Fall $\delta = 1$ (Auswahl):

ESSEEN (1945):	K < 7.5	
BERGSTRÖM (1949):	K < 4.8	
TAKANO (1950):	K < 2.031	(Fall ident. vert. Zufallsgr.)
WALLACE (1959):	K < 1.98	(- " -)
ZOLOTAREV (1967):	K < 0.9051	
	K < 0.8197	(- " -)
van BEEK (1971):	K < 0.7975	
	K < 0.7882	(- " -)
ŠIGANOV (1982):	K < 0.7915	
	K < 0.7655	(- " -)

TYSIAK (1983):

$\delta =$	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
$K(\delta) <$	0.802	0.812	0.833	0.863	0.902	0.950	1.008	1.079	1.102

PADITZ (1986):

$$\sup_{0\leq\delta\leq 1} K(\delta) < 3.51$$

BENTKUS und KIRŠA (1989): K = 0.370352... (im Fall n=1).

Abschließend sei an die asymptotisch echte Konstante in (2) für den Fall identisch verteilter Zufallsgrößen erinnert (für $\delta = 1$):
ESSEEN (1956):

$$\sup_{(X_k)} \sup_{x \in R} \left(B_n^{-3} \sum_{k=1}^{n} \beta_{3,k} \right)^{-1} D_n(x) = 0.409732\ldots$$

3. ERGEBNISSE BETREFFS DER KONSTANTENABSCHÄTZUNG IN DER UNGLEICHMÄßIGEN FEHLERSCHRANKE (1)

Mehr als 10 Jahre gab es für die Konstante C in (1) keinerlei Vorstellungen über die Größenordnung. Erste numerische Abschätzungen dazu wurden in Dresden erzielt:
PADITZ (1977): $C(1) < 114.7$
PADITZ (1979):

$\delta =$	0.01	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	0.99
$C(\delta) <$	122.5	151.3	241.4	376.7	569.5	820.4	922.8

1981 zeigte MICHEL im Fall identisch verteilter Zufallsgrößen $C(1) < 30.54$.
Für den allgemeinen Fall teilten PADITZ und MIRACHMEDOV (1986) das Ergebnis $C(1) < 32.153$ mit.
PADITZ (1989) präzisierte dieses Ergebnis auf $C(1) < 31.935$.
1990 wurden von PADITZ und TYSIAK folgende numerische Abschätzungen erhalten, die hier erstmalig veröffentlicht werden:

$\delta =$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$C(\delta) <$	14.88	16.24	17.43	18.78	20.32	22.07	24.07	26.35	29.01

Ergebnisse über asymptotisch echte Konstanten liegen bisher nicht vor. BENTKUS und KIRŠA (1989) zeigten kürzlich (im Fall n=1):

$$\sup_{x \in R} |x|^3 D_1(x) \le \beta_{3,1} \; .$$

4. EINIGE ENTWICKLUNGSTENDENZEN BETREFFS KONSTANTEN-ABSCHÄTZUNGEN IN UNGLEICHUNGEN VOM TYP BERRY-ESSEEN

a) Neben den in den Abschnitten 2. und 3. dargestellten Untersuchungsrichtungen werden von einigen Autoren die Konstanten in (1) und (2) dahingehend präzisiert, daß von vorneherein nur gewisse x-Zonen und bestimmte Größenordnungen des Ljapunovbruches betrachtet werden, z.B. $x \in A_2$ und $L_{2+\delta,n} \leq 1/7$, wobei

$$A_2 = \left\{ x : |x|^{-(2+\delta)} \exp\left(\frac{x^2}{2\beta}\right) \leq a^{-1} L_{2+\delta,n}^{-1} \right\} \cap \{ x : |x| \geq K \}$$

ist und a, β, K frei wählbare Parameter darstellen. Vertreter dieser Untersuchungsrichtung sind z.B. PRAWITZ (1972-75) für (2) oder NIKULIN (1989) für Ungleichung (1).

b) Es werden Fehlerschranken mit anderen Momentcharakteristika (z.B. Pseudomomente) aufgestellt. Vertreter z.B. SAZONOV und seine Schüler. Konstantenabschätzung z.B. von ŠIGANOV (1987).

c) Fehlerabschätzung und Konstantenabschätzung im R^k von BLÖNDAL (1973).

d) Analoge Untersuchungen werden in der Summationstheorie schwach abhängiger Zufallsgrößen durchgeführt, z.B, für Martingaldifferenzfolgen oder stark multiplikative Systeme. Konstantenabschätzungen gibt es hier z.B. von PADITZ und ŠARACHMETOV (1987, 1988).

e) Studium der Normalapproximation in anderen Metriken, z.B. gewichtete L_p-Metrik (globale Grenzwertsätze). Erste Vorstellungen zur Konstantenabschätzung in einer bereits seit mehr als 10 Jahren bekannten Fehlerabschätzung entwickelte PADITZ (1988).

f) Ungleichungen vom Typ Berry-Esseen gibt es inzwischen für verschiedene Anwendungsfälle aus der Mathematischen Statistik (gewichtete Summationsprozesse, U-Statistiken u.a.).

5. BEWEISTECHNIK UND ANALYTISCHE STRUKTUR DER KONSTANTEN $C = C(\delta)$

Die in Abschnitt 3 vorgelegten numerischen Resultate sind das Ergebnis einer umfangreichen Optimierungsaufgabe, die durch W.Tysiak mit Hilfe eines Computers bearbeitet wurde.
Die dazu notwendigen analytischen Strukturen wurden aus der Arbeit " On the Analytical Structure...", STATISTICS 20 (1989) von L.Paditz entnommen.

Dr.sc.nat. Ludwig Paditz
HfV "Friedrich List" Dresden
Sekt. Mathem. u. Naturwiss.
PSF 103, DDR - 8072 Dresden

Dr.rer.nat. Wolfgang Tysiak
Briller Straße 44
D - 5600 Wuppertal 1